

بررسی اثر ناهمواری سطح بر عمل کرد روان کاری

در یاتاقان‌های لغزشی پله‌ای

محمد هادی قناعتیان^۱، محمود خداداد^۲ و اصغر دشتی رحمت آبادی^۳

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه یزد

(تاریخ دریافت: ۸۸/۸/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۲/۳)

چکیده

در تئوری‌های مربوط به مسائل روان کاری، سطوح یاتاقان را صاف و بدون زبری در نظر می‌گیرند، در حالی که چنین فرضی در عمل صحت ندارد. در حالتی که زبری هم‌مرتب با ضخامت فیلم سیال است، تأثیر قابل توجهی بر پارامترهای عملکرد یاتاقان خواهد داشت. هندسه سطح یاتاقان آن‌چنان نامنظم است که گاه اجباراً از مدل‌های آماری استفاده می‌شود. معمولاً، حل تحلیلی معادلات حاکم در حالتی که زبری موجود است، بسیار دشوار است. در این مقاله با استفاده از روش المان محدود به بررسی تأثیر زبری سطح بر فشار و میزان تحمل بارهای عمودی و مماسی یاتاقان‌های لغزشی پله‌ای پرداخته شده است. مسأله به ازای دو پروفیل زبری مختلف بررسی و نتایج با هم مقایسه شده‌اند که همخوانی نسبتاً خوبی را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: روان کاری، زبری سطح، یاتاقان‌های لغزشی پله‌ای، المان محدود، فشار، میزان تحمل بار عمودی و مماسی

Investigation of Surface Roughness Effect on the Lubrication Performance of the Sliding Bearings

M.H. Ghanaatian, M. Khodadad, and A. Dashti- Rahmatabadi

Mech. Eng. Dep't.
Yazd Univ.

(Received: 20 Nov. 2009 ; Accepted: 23 Apr. 2011)

ABSTRACT

In lubrication theories, the bearing surfaces are considered smooth, which is not really true. It has been shown in cases where the roughness is in the same order as the lubricant film that there would be a major effect in bearing performance. The surface geometry is so irregular that it is sometimes necessary to use statistical models. Usually, when we are faced with roughness effects, the analytical solution is very difficult. In this paper, finite element method is used to examine the roughness effects on the performance parameters of step slider bearings. The problem was solved for two different surface profiles and the results were compared showing relatively close agreements.

Keywords: Lubrication, Surface Roughness, Step Sliding Bearing, Finite Element, Pressure, Normal and Tangential Load Capacity

۱-کارشناس ارشد: hadi.ghanaatian@gmail.com

۲-استادیار(نویسنده پاسخگو): khodadad@yazduni.ac.ir

۳-دانشیار: dashti@yazduni.ac.ir

فهرست علائم

c	دامنه زبری در تابع توزیع احتمال بتا
k_p	ماتریس سختی مربوط به تابع $p(x)$
k_k	ماتریس سختی مربوط به تابع $k(x)$
K_g	ماتریس سختی کل
N	تابع شکل
P	متغیر ثانویه
pr	فشار در یاتاقان
r_α, r_q	ماتریس‌های مربوط به شرایط مرزی
u	متغیر اولیه
w_x	ظرفیت تحمل بار مماسی
w_z	ظرفیت تحمل بار عمودی
η_0	لزجت روان کار
$H(x)$	ضخامت واقعی فیلم روان کار
k	ماتریس سختی
$k(x)$	ضریب مشتق متغیر اولیه در معادله دیفرانسیل
$p(x)$	ضریب متغیر اولیه در معادله دیفرانسیل
$q(x)$	تابع دلخواه در معادله دیفرانسیل
k_α	ماتریس سختی مربوط به ضریب α
$h(x)$	ضخامت اسمی فیلم روان کار
h_o	ضخامت اسمی فیلم روان کار در قسمت خروجی
sh	ارتفاع پله یاتاقان
$f(\mathcal{E})$	تابع توزیع احتمال
$fr(x)$	پروفیل زبری

علائم یونانی

α, β	ضرایب مربوط به شرایط مرزی
\mathcal{E}	متغیر زبری تصادفی

۱- مقدمه

سطوح صاف در مقیاس اتمی، کاملاً تخت نیستند. هر چند دقت زیادی در هنگام ساخت در مورد صیقلی بودن سطوح به کار می‌رود اما سرعت افزایش تولید و روش‌های جدید، مشخصات مربوط به سطوح را تغییر می‌دهند. هندسه واقعی سطح به حدی پیچیده است که با تعداد محدودی از پارامترها نمی‌توان آن را به خوبی بیان نمود [۱]. مشخصه‌های هندسی

سطوح را به سه دسته عمده تقسیم‌بندی می‌کنند. دسته اول خطای شکل که ممکن است شکل سطوح، به علت خطا در فرآیند ساخت، از فرم مشخص شده خارج شود. دوم موجی بودن سطح که به خاطر موج‌های نسبتاً بلند همراه با ارتعاشات ناخواسته در ماشین ابزار اتفاق می‌افتد و سوم زبری که علاوه بر موارد فوق، به واسطه بی‌نظمی‌های فرآیند تولید و برش ممکن است اتفاق بیفتد [۲].

در روان‌کاری یاتاقان‌های صاف و بدون زبری سطح که حالتی غیر واقعی است می‌توان با دقت خوبی از مدل کردن معادله رینولدز برای یافتن فشار استفاده کرد. معادله رینولدز در یاتاقان دارای زبری هم کاربرد دارد اما برای حل عددی مساله بایستی پارامترهایی دیگری نیز در نظر گرفته شود [۳]. در حالتی که زبری هم مرتبه با ضخامت فیلم سیال است، زبری تأثیر قابل توجهی بر پارامترهای عمل‌کرد خواهد داشت [۴-۸].

از نمونه مدل‌های ارائه شده برای زبری می‌توان به مقایسه فشار به دست آمده از آزمایش با مقدار تئوری در حالت زبری با پروفیل‌های دایروی، چندجمله‌ای و غیره اشاره کرد [۹]. با توجه به نوع پروفیل زبری، میزان اثر آن بر عمل‌کرد یاتاقان متفاوت خواهد بود. در یاتاقان‌های از نوع سوزنی، جهت طولی زبری که در فرآیند ساخت ایجاد می‌شود، تأثیر زیادی داشته [۱۰] و در تماس‌های از نوع الاستوهیدرودینامیکی می‌توان اثر زبری عرضی را غالب دانسته و از پروفیل سینوسی برای مدل کردن زبری استفاده کرد [۱۱].

تاکنون مدل‌های متفاوتی برای زبری ارائه شده است. به عنوان نمونه توراگا^۱ و همکاران مدل المان محدود یک بعدی برای یاتاقان‌های هیدرودینامیکی ارائه نمودند [۱۲]. نادوونامانی^۲ و همکاران [۱۳] اثر زبری سطح بر روان‌کاری هیدرودینامیکی یاتاقان‌های لغزشی پله‌ای در حالت یاتاقان متخلخل را مورد بررسی قرار دادند. از بررسی‌های اولیه انجام شده با روش المان محدود، حل المان محدود جریان غیر قابل تراکم در مسائل روان‌کاری است [۱۴]. این روش نسبت به روش‌های عددی دیگر مزایایی دارد. علاوه بر عمومیت آن نسبت به هندسه و تغییرات خواص میدان، تعریف شرایط

1- Turaga

2-Naduvnamani

۲-۱- معادله حاکم

صورت کلی معادلات ناویر- استوکس، شامل جملات اینرسی، فشار، جرمی و لزجت می‌باشد. به‌طور کلی حل این معادلات به‌صورت تحلیلی کار پیچیده‌ای است. در دسته‌ای از مسائل فقط ترم‌های فشار و لزجت، غالب هستند که آن جریان‌ها را حرکت لزج آهسته می‌نامند و مسائل روانکاری فیلم سیال از این دسته می‌باشند. شکل تعدیل یافته معادله رینولدز حاکم بر یاتاقان‌های هیدرودینامیکی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\mu\eta_0 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1)$$

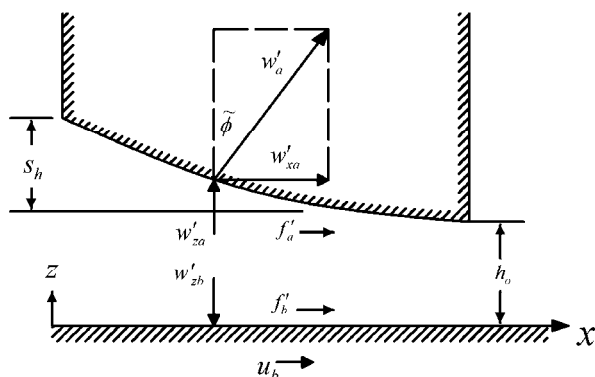
در حالت یاتاقان دارای زبری سطح، H به‌صورت ترکیبی از ضخامت اسمی یاتاقان و پروفیل زبری مورد نظر در می‌آید:

$$H(x) = h(x) + fr(x), \quad (2)$$

در این بررسی که عمل‌کرد یاتاقان پله‌ای مورد بحث قرار گرفته‌است، ضخامت اسمی یاتاقان در قسمت‌های ورودی و خروجی، به ترتیب برابر $h(x) = h_o + s_h$ و $h(x) = h_o$ در نظر گرفته شده است. از نمونه‌های ارائه شده برای زبری سطح یاتاقان، استفاده از تابع بتا به‌صورت زیر است:

$$f(\varepsilon) = \frac{15}{16c} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} \right)^2, \quad -c \leq \varepsilon \leq c. \quad (3)$$

که مقدار این تابع به ازای ε های خارج از محدوده مذکور، برابر صفر است. با جایگذاری‌های فوق در رابطه (۱)، می‌توان فشار را در نقاط مختلف یاتاقان به‌دست آورد. پس از به‌دست آوردن فشار از رابطه (۱)، می‌توان مؤلفه‌های نیروهای عمودی و مماسی را به دست آورد (شکل ۱).



شکل (۱): مؤلفه‌های نیروهای عمودی و مماسی.

مرزی بر مبنای فشار یا جریان و استفاده از شرایط تقارن از امتیازات دیگر آن می‌باشد. با ملاحظه کارهای انجام شده در زمینه زبری سطح می‌توان به این نتیجه رسید که برخی از بررسی‌های انجام شده مربوط به در نظر گرفتن و تخمین پروفیل مناسب برای زبری و برخی دیگر مربوط به ارائه تئوری‌های مختلف برای بررسی این پدیده می‌باشد. گاه هندسه سطح آن‌چنان نامنظم است که ناگزیر به استفاده از مدل‌های آماری خواهیم بود. برای مثال، یک پروفیل ممکن است به‌صورت یک پروسه تصادفی مدل شده باشد [۱۷-۱۵]. پارامترهای دیگری همچون لزجت نیز در عمل‌کرد یاتاقان‌های دارای زبری مؤثر می‌باشد. به عنوان مثال تأثیر لزجت در ناپایداری یاتاقان‌ها خصوصاً یاتاقان‌های گازی عامل مهمی بوده نمی‌توان از آن صرف نظر کرد. با وجود مزایای بی‌شمار یاتاقان‌های گازی، آنها دارای محدودیت‌هایی می‌باشند که از مهم‌ترین آنها کمی لزجت لایه روان کار، یعنی گاز است که باعث می‌شود سیستم یاتاقان آمادگی بیشتری برای ناپایداری داشته باشد [۱۸].

در یاتاقان مورد بحث این مقاله، روان کار از نوع روغنی بوده و لزجت فقط به عنوان یک متغیر ورودی در برنامه رایانه‌ای ایفای نقش می‌کند. ضمناً جریان روان کاری به‌صورت آرام در نظر گرفته شده است. در یاتاقان‌هایی که با سرعت‌های بالا سروکار دارند، فرض جریان آرام، فرض درستی نخواهد بود. در واقع، نمی‌توان از ترم اینرسی در مقایسه با ترم اصطکاک صرف‌نظر کرد و بایستی هر دو ترم را در محاسبات وارد کرد [۱۹]. در این مقاله، با در نظر گرفتن تابع توزیع احتمال بتا و توزیع سینوسی و با استفاده از روش المان محدود به بررسی تأثیر زبری سطح پرداخته شده است. در واقع ضخامت لایه روان کار بر حسب این توابع بیان خواهد شد و در نهایت با جایگذاری در معادلات حاکم، فشار و مابقی پارامترهای عمل‌کرد یاتاقان به‌دست خواهد آمد.

۲- تئوری

روابط اساسی و شرایط مرزی حاکم بر یاتاقان به‌صورت زیر می‌باشد.

که در آن، اندیس‌های مربوط به α و β نشان‌گر شماره گره هستند. فرم کلی جواب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)u(x_i) \quad (14)$$

$$= (N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \equiv \mathbf{N}^T \mathbf{d},$$

که در آن، $N_i(x)$ ها همان توابع شکل هستند. مدل المان محدود رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{k}_k \mathbf{d} + \mathbf{k}_p \mathbf{d} + \mathbf{k}_\alpha \mathbf{d} = \mathbf{r}_q + \mathbf{r}_\beta \quad (15)$$

$$\mathbf{k}_k \mathbf{d} = \int_{x_1}^{x_n} k \mathbf{B} \mathbf{B}^T dx \mathbf{d} = \quad (16)$$

$$\int_{x_1}^{x_n} k(x) \begin{pmatrix} N_1' \\ N_2' \\ \vdots \\ N_n' \end{pmatrix} (N_1' \quad N_2' \quad \dots \quad N_n') dx \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_p = \int_{x_1}^{x_n} (-p) \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \mathbf{d} = \quad (17)$$

$$- \int_{x_1}^{x_n} p(x) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} (N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n) dx \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mathbf{d},$$

$$\mathbf{k}_\alpha \mathbf{d} = - \begin{pmatrix} \alpha_1 k(x_1) u(x_1) \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_n k(x_n) u(x_n) \end{pmatrix} = \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 k(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_n k(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$$w'_{za} = w'_{zb} = \int_0^l p dx, \quad (4)$$

$$w'_{xb} = 0, \quad (5)$$

$$w'_{xa} = - \int_{h_0+sh}^{h_0} p dh = \int_0^l p \frac{dh}{dx} dx, \quad (6)$$

$$w'_{xa} = -(ph)'_0 + \int_0^l h \frac{dp}{dx} dx = \int_0^l h \frac{dp}{dx} dx, \quad (7)$$

$$w'_b = (w'_{zb})^2 + (w'_{xb})^2)^{1/2} = w'_{zb}, \quad (8)$$

$$w'_a = (w'_{za})^2 + (w'_{xa})^2)^{1/2}, \quad (9)$$

که در آن، a و b نشان‌دهنده سطوح بالایی و پایینی یاتاقان هستند.

۲-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای حل معادله موردنظر بر روی متغیر وابسته (فشار) اعمال می‌شود. فشار در ابتدا و انتهای یاتاقان برابر صفر است:

$$p(0) = 0 \quad \text{و} \quad p(l) = 0. \quad (10)$$

۳- فرمول‌بندی المان محدود برای یاتاقان‌های لغزشی

پله‌ای با سطوح زبر

در این قسمت معادلات مربوط به المان دو گرهی برای مساله مقدار مرزی یک بعدی مرتبه دو بیان می‌شود [۲۰].

۳-۱- مدل المان محدود

معادله حاکم بر هر المان را به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود: [۱۳]:

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) + p(x)u(x) + q(x) = 0, \quad (11)$$

$$x_1 < x < x_n.$$

شرایط مرزی طبیعی در دو سر المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-\frac{du(x_1)}{dx} = \alpha_1 u(x_1) + \beta_1, \quad (12)$$

$$\frac{du(x_n)}{dx} = \alpha_n u(x_n) + \beta_n, \quad (13)$$

$$K_g = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{21}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & K_{12}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n+1)} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

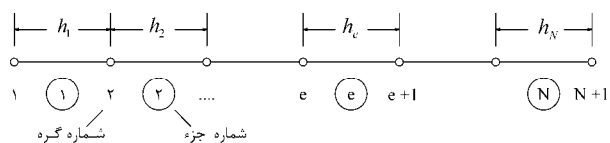
که با جای گذاری ماتریس سختی مربوط به هر المان به ازای مدل دو المانی داریم:

$$K_g = \begin{bmatrix} \frac{(h_o + sh)^3}{he_i} & -\frac{(h_o + sh)^3}{he_i} & 0 \\ -\frac{(h_o + sh)^3}{he_i} & \frac{(h_o + sh)^3}{he_i} + \frac{h_o^3}{he_o} & -\frac{h_o^3}{he_o} \\ 0 & -\frac{h_o^3}{he_o} & \frac{h_o^3}{he_o} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

۳-۴- اعمال شرایط مرزی

هر دو شرط مرزی بر روی متغیر اولیه (فشار) اعمال می شود، بدین نحو که فشار در ورود و خروج برابر صفر خواهد بود. به عبارتی اگر تعداد کل المان ها را n بگیریم (شکل ۲)، فشار در گره اول المان اول و گره دوم المان آخر برابر صفر می باشد:

$$u_1 = pr_1^{(1)} = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = pr_2^{(n)} = 0. \quad (28)$$



شکل (۲): المان بندی.

بنابراین، ماتریس متغیر اولیه $u(x)$ که ماتریسی $(n+1) \times 1$ است، به صورت زیر در می آید:

$$\mathbf{r}_q \equiv \int_{x_1}^{x_n} q(x) \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ \vdots \\ N_n(x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_n} qN_1 dx \\ \int_{x_1}^{x_n} qN_2 dx \\ \vdots \\ \int_{x_1}^{x_n} qN_n dx \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{r}_\beta = \begin{bmatrix} k(x_1)\beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ k(x_n)\beta_n \end{bmatrix}. \quad (20)$$

۳-۲- ماتریس های المان

با مقایسه معادله ۱ و صورت کلی رابطه (۱۱) داریم:

$$q(x) = -12\eta_0 u \frac{\partial(h(x) + fr(x))}{\partial x}, \quad (21)$$

ماتریس \mathbf{k}_k و \mathbf{r}_q برای قسمت های ورودی و خروجی به ازای توابع شکل خطی به صورت زیر در می آید:

$$\mathbf{k}_{ki} = \int_{x_1}^{x_2} ((h_o + sh) + fr(x)) dx \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{k}_{ko} = \int_{x_1}^{x_2} (h_o + fr(x)) dx \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{r}_{qi} = 12u\eta_0 \times \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(h_o + sh + fr(x))}{\partial x} dx \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

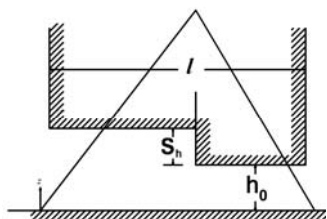
$$\mathbf{r}_{qo} = 12u\eta_0 \times \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(h_o + fr(x))}{\partial x} dx \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

اندیس های i و o نمایان گر قسمت ورودی و خروجی یاتاقان هستند.

۳-۳- ماتریس سختی کل

به طور کلی، اگر تعداد کل المان ها را n بگیریم، ماتریس سختی کل به شکل زیر در خواهد آمد:

شماتیک از توزیع فشار در حالت تحلیلی را نشان می‌دهد. با داشتن توزیع فشار، مقادیر ظرفیت تحمل بار عمودی و افقی و نیروهای برشی به دست خواهد آمد.



شکل (۳): توزیع فشار در یاتاقان پله‌ای با سطوح صاف.

نکته اساسی در المان‌بندی یاتاقان آن است که برای بالاتر بردن دقت جواب، بایستی امکان تعیین تعداد هر عدد گره دلخواه به ازای هر نیم‌موج سینوسی و یا هر دوره تناوب در تابع بتا وجود داشته باشد. تعداد المان‌های قسمت ورودی و خروجی توسط کاربر به برنامه داده خواهد شد. البته تعداد المان‌های قسمت ورودی و خروجی یاتاقان می‌تواند متفاوت انتخاب شود. طبیعی است که برنامه باید با تغییر تعداد المان‌ها، شماره گره جدید متناسب با پله را تعیین کند که برابر شماره سطر متناظر در ماتریس متغیر ثانویه می‌باشد.

۴- نتایج و بحث

در این قسمت عمل‌کرد یاتاقان در حالات بدون زبری و دارای زبری مقایسه شده پارامترهای عمل‌کرد یاتاقان در اثر افزایش ضریب ارتفاع زبری مورد بررسی قرار گرفته و در مورد نتایج حاصله بحث خواهد شد.

۴-۱- مقایسه عمل‌کرد یاتاقان در حالات بدون زبری و

دارای زبری

در این قسمت، تأثیر عامل زبری بر توزیع فشار و ظرفیت تحمل بار عمودی نشان داده شده است. شکل ۴، فشار ماکزیمم بدون بعد بر حسب طول بدون بعد یاتاقان در حالات بدون زبری و دارای پروفیل زبری سینوسی و بتا با ضریب ارتفاع زبری ۰/۳ در یاتاقان پله‌ای را نشان می‌دهد. در حالت بدون زبری جواب به دست آمده با جواب حاصل از حل تحلیلی تطابق کامل دارد. در حالتی که زبری وارد مسأله شود، فشار نیز افزایش خواهد یافت.

$$u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

فشار در گره‌های داخلی از مجهولات مسأله می‌باشد. از طرف دیگر متغیر ثانویه که در واقع همان گرادیان فشار است، در دو گره ابتدایی و انتهایی مجهول است. در گره‌های داخلی گرادیان فشار معلوم است. با توجه به پیوستگی فشار، برای تمامی گره‌های داخلی به جز گره واقع در پله داریم:

$$P_i = p_2^{(i-1)} + p_1^{(i)} = 0. \quad (30)$$

بنابراین، ماتریس متغیر ثانویه P ، که ماتریسی $(n+1) \times 1$ است به صورت زیر در می‌آید:

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_n \end{pmatrix}. \quad (31)$$

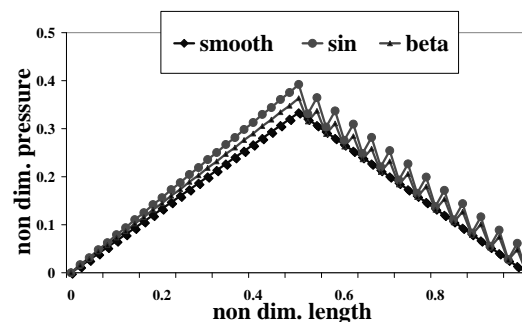
عبارت P_m ، گرادیان فشار در پله را بیان می‌کند و بایستی با استفاده از شرط پیوستگی فشار و برابری جریان برای نواحی ورودی و خروجی به دست آید. با توجه به ناپیوسته بودن متغیر ثانویه در گره واقع در پله، دو مقدار متفاوت $\frac{du(x_m)}{dx}$ برای این گره خواهیم داشت. برای به دست آوردن P_m داریم:

$$P_m = (h_o + sh)^3 \left(\frac{d(pr)}{dx} \right)_i - h_o^3 \left(\frac{d(pr)}{dx} \right)_o. \quad (32)$$

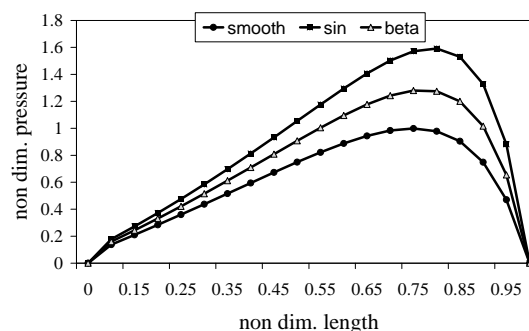
با داشتن P_m از رابطه (۳۲) و جای‌گذاری در رابطه (۱۵) می‌توان فشار را در گره‌های داخلی بدست آورده، آنگاه با استفاده از معادلات دامنه فشار را در نقاط مختلف به دست آورد. با داشتن توزیع فشار، مقادیر ظرفیت تحمل بار عمودی و افقی و نیروهای برشی به دست خواهد آمد. شکل ۳ نمونه

ماکزیمم برای پروفیل‌های سینوسی و بتا به ترتیب برابر $0.48/4\%$ و $0.35/5\%$ است. در بررسی انجام شده توسط زنگ و سیبل به وسیله انتگرال عددی و تابع بتا برای یاتاقان‌های لغزشی، فشار ماکزیمم در حالت یاتاقان صاف و یاتاقان با سطح شیب‌دار به ترتیب برابر $0.35/2$ و $0.35/5$ به دست آمده است که این رشد $0.35/2$ درصدی تطابق خوبی با رشد $0.35/5$ درصدی حاصل از برنامه در حالت پروفیل بتا نشان می‌دهد [۲۱]. با توجه به صحت عمل‌کرد برنامه برای پارامتر فشار و داشتن روابط ظرفیت تحمل بارهای عمودی و مماسی و ... می‌توان به درستی عمل‌کرد برنامه برای بقیه پارامترها پی برد. در هر دو نوع یاتاقان به ازای شرایط یکسان، پروفیل سینوسی اختلاف بیشتری در فشار به نسبت پروفیل بتا نشان می‌دهد؛ در حالی که پروفیل بتا، تغییر ملایم‌تری نسبت به یاتاقان صاف دارد. این نتیجه با در نظر گرفتن تغییرات هموارتر در تابع بتا قابل توجیه است. همان‌گونه مشاهده می‌شود در هر سه حالت، فشار ماکزیمم در پله اتفاق خواهد افتاد. در یاتاقان پله‌ای مقدار بدون بعد پارامتر مذکور برای حالت بدون زبری، 0.333 و برای حالت دارای زبری سینوسی و بتا به ترتیب 0.392 و 0.363 به دست آمده است که معادل افزایش 17% و 9% در فشار می‌باشد (شکل ۴). از طرفی به علت ضخامت کمتر فیلم سیال در قسمت خروجی، نوسان فشار در آن قسمت بسیار بیشتر از قسمت ورودی است.

برای بررسی میزان تأثیر افزایش ضریب ارتفاع زبری بر عمل‌کرد یاتاقان مسأله برای هفت ضریب ارتفاع مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. کم‌ترین ضریب ارتفاع زبری که صفر می‌باشد بیان‌گر یاتاقان کاملاً صاف است. در شکل ۶، فشار ماکزیمم و ظرفیت تحمل بار عمودی به ازای پروفیل‌های سینوسی و بتا مقایسه شده است. همان‌گونه که از این شکل پیداست به ازای افزایش ضریب ارتفاع زبری میزان افزایش در فشار ماکزیمم و بار عمودی پروفیل سینوسی بیشتر از بتا است. با افزایش ضریب ارتفاع زبری به یک میزان مشخص، نرخ افزایش فشار ماکزیمم در مقایسه با نرخ افزایش ظرفیت تحمل بار عمودی، مقدار بیشتری را نشان می‌دهد. شیب متوسط افزایش فشار در پروفیل‌های سینوسی و بتا به ترتیب برابر 0.56 و 0.16 است. در حالی که این شیب برای ظرفیت تحمل بار عمودی به ازای دو پروفیل به ترتیب 0.23 و 0.08



شکل (۴): توزیع فشار بدون بعد در یاتاقان پله‌ای.



شکل (۵): توزیع فشار بدون بعد در یاتاقان

دارای سطح شیب‌دار.

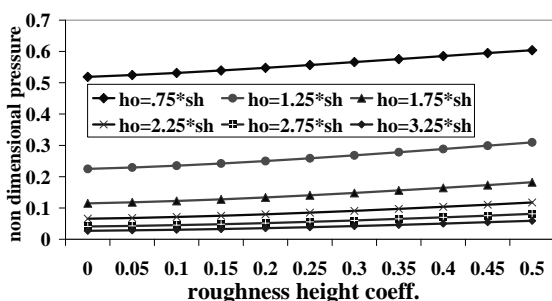
برای اعتبارسنجی جواب و اطمینان از عمل‌کرد صحیح برنامه رایانه‌ای، پروفیل فشار در حالت یاتاقان پله‌ای با حل تحلیلی مسأله مقایسه شده و تطابق کامل آن در شکل ۴ نشان داده شده است. از طرفی جواب همین برنامه برای یاتاقان با سطح شیب‌دار، هم در حالت یاتاقان صاف و هم یاتاقان با سطوح زبر با کار انجام شده توسط زنگ^۱ و سیبل^۲ و برای فاکتور فشار ماکزیمم در پله مقایسه شده است. تغییرات فشار برای یاتاقان لغزشی دارای سطح شیب‌دار نیز در شکل ۵ نشان شده است. در حل تحلیلی، مقدار ماکزیمم فشار بدون بعد در حالت بدون زبری برابر یک می‌شود. با توجه به شکل ۵، فشار ماکزیمم بدون بعد در یاتاقان بدون زبری برابر 0.99 به دست آمده که با توجه به درصد خطای 1% ، نمودار حل تحلیلی با تقریب بسیار خوبی منطبق با نمودار مربوط به یاتاقان صاف در شکل ۵ خواهد شد. درصد افزایش فشار

1- Tzeng
2- Saibel

پروفیل سینوسی به مقدار ثابتی خواهند رسید که نشان دهنده رفتار ملایم تر پروفیل بتا می باشد.

۴-۲- تغییر پارامترهای عمل کرد یاتاقان در اثر افزایش

ضریب ارتفاع زبری در ضخامت های مختلف فیلم سیال در شکل ۸، تغییرات در اثر افزایش زبری سطح به ازای ضخامت های مختلف فیلم سیال برای پروفیل بتا نشان داده شده است. در این نمودار، ضخامت فیلم سیال به صورت ضریبی از ارتفاع پله در نظر گرفته شده است.

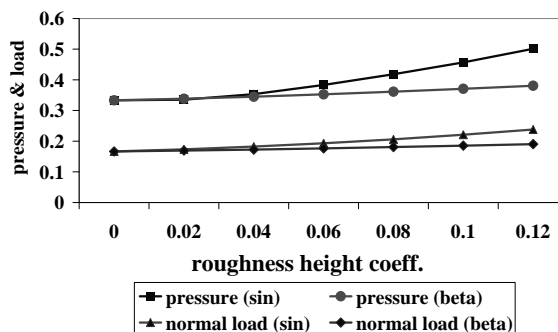


شکل (۸): تغییرات فشار ماکزیمم بر حسب ضریب ارتفاع در پروفیل بتا به ازای ضخامت های مختلف فیلم سیال.

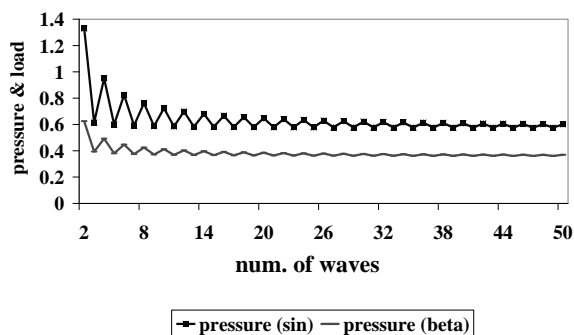
در جدول ۱ فشارها به ازای ضریب ارتفاع زبری ۰/۳ در هر دو پروفیل مورد مقایسه قرار گرفته است. این جدول نشان می دهد که در شرایط مساوی، میزان افزایش فشار ماکزیمم در پروفیل سینوسی بیشتر از پروفیل بتا است. این میزان افزایش، به ازای افزایش ضریب ارتفاع زبری در ضخامت های کوچک تر فیلم سیال مشهودتر بوده و هر چه که ضخامت فیلم سیال بیشتر شود اثر افزایش زبری سطح، کمتر خود را نشان خواهد داد. در واقع بر خلاف اثر افزایش ضریب ارتفاع زبری که منجر به افزایش فشار می شود، افزایش ضخامت فیلم سیال منجر به کاهش فشار خواهد شد.

یک مقایسه عددی این مسأله را بهتر بیان خواهد کرد. مقدار فشار ماکزیمم بدون بعد در حالت یاتاقان صاف با ضخامت فیلم سیال $ho = 0.75 * sh$ برابر ۰/۵۲ به دست آمده است. این در حالی است که در ضخامت $ho = 1.25 * sh$ با ضریب ارتفاع زبری ۰/۳، مقدار ماکزیمم فشار بدون بعد، ۰/۲۹ می باشد. بیشترین کاهش

می باشد. شکل ۷ تغییرات فشار ماکزیمم را به ازای کاهش طول موج زبری (افزایش تعداد نیم موجها) نشان می دهد.



شکل (۶): مقایسه فشار ماکزیمم و ظرفیت تحمل بار عمودی بدون بعد در پروفیل های سینوسی و بتا به ازای تغییر در ضریب ارتفاع زبری.



شکل (۷): مقایسه فشار ماکزیمم بدون بعد در پروفیل های سینوسی و بتا به ازای تغییر در طول موج زبری.

همان گونه که در شکل ۷ مشاهده می شود، با افزایش تعداد نیم موجها، فشار ماکزیمم پله و میزان بار عمودی کاهش خواهد داشت. میزان افت این دو پارامتر برای پروفیل سینوسی در شرایط برابر، بیشتر از پروفیل بتا می باشد. میانگین درصد کاهش فشار در پروفیل سینوسی نسبت به بتا به ترتیب ۳۹٪ به ۲۸٪ می باشد. این کاهش، در مورد ظرفیت تحمل بار عمودی ۳۱٪ به ۲۵٪ است. هم چنین مشاهده می شود که به ازای افزایش تعداد طول موجها از یک حد خاص مقدار متوسط پارامترهای مذکور ثابت خواهند شد. این مقدار بدون بعد برای فشار در پروفیل های سینوسی و بتا به ترتیب برابر ۰/۵۸ و ۰/۳۶ و برای ظرفیت تحمل بار عمودی برابر ۰/۲۹ و ۰/۱۸ است. این دو پارامتر در پروفیل بتا سریع تر از

کمتر خود را نشان خواهد داد. هم‌چنین در جدول ۲ به ازای ضریب ارتفاع زبری ۰/۳، بار مماسی در دو پروفیل، مورد مقایسه قرار گرفته است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، تغییرات ظرفیت تحمل بار مماسی بر حسب ضریب ارتفاع در پروفیل سینوسی نسبت به تغییرات مشابه در پروفیل بتا بیشتر است. هرچند همانند نمودار فشار، با افزایش ضخامت فیلم سیال، اثر افزایش زبری کمتر خود را نشان می‌دهد، اما تأثیر افزایشی ضریب ارتفاع در مقایسه با تأثیر کاهشی ضخامت، از مورد مشابه فشار، بیشتر است. برای درک بهتر این موضوع اگر در شکل ۹ از نقاطی که معادل فشار در یاتاقان صاف هستند خطوطی موازی رسم شود، مشاهده می‌شود که این خطوط، نمودارهای پایین‌تر که مربوط به ضخامت‌های بیشتر هستند را در چندین نقطه قطع می‌کنند. نقاط تقاطع به‌دست آمده نشان‌دهنده میزان ضریب ارتفاع زبری در ضخامتی است که بار مماسی آن با بار مماسی مربوط به یاتاقان صاف با ضخامت کمتر برابری می‌کند. به عبارت دیگر این نقاط نمایان‌گر نقطه شروع غلبه تأثیر ضریب ارتفاع بر ضخامت فیلم سیال هستند.

جدول (۲): مقادیر بار مماسی به ازای ضریب ارتفاع زبری

۰/۳ در دو پروفیل سینوسی و بتا.

بار مماسی در پروفیل بتا	بار مماسی در پروفیل سینوسی	ضخامت فیلم سیال
۰/۷۳۸۶	۰/۹۰۵	$ho = .75 * sh$
۰/۳۷۷۲	۰/۴۹۳۴	$ho = 1.25 * sh$
۰/۲۲۶۲	۰/۳۱۳۴	$ho = 1.75 * sh$
۰/۱۵۱	۰/۲۱۹۴	$ho = 2.25 * sh$
۰/۱۰۸۷	۰/۱۶۴۳	$ho = 2.75 * sh$
۰/۰۸۲۷	۰/۱۲۹۲	$ho = 3.25 * sh$

۴-۳- تغییر پارامترهای عمل‌کرد یاتاقان در اثر کاهش

طول موج زبری در ضخامت‌های مختلف فیلم سیال

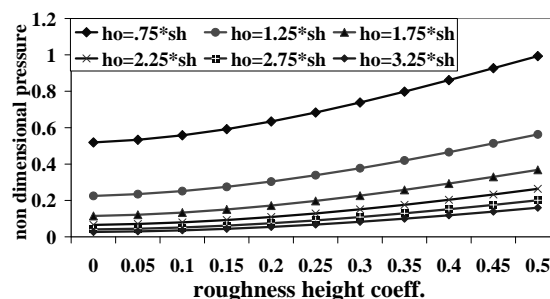
برای این منظور، تغییرات در فشار به‌صورت نموداری برای بتا رسم شده است. کاهش طول موج با افزایش تعداد امواج در یک طول مشخص، معادل می‌باشد. شکل ۱۰ تغییرات فشار ماکزیمم پله را برای پروفیل مذکور نشان می‌دهند. هم‌چنین

فشار، در اثر افزایش ضخامت فیلم سیال، به ازای نسبت‌های ho/sh کمتر از واحد و بیشتر از واحد به‌دست آمده است. به‌گونه‌ای که درصد افت فشار به ازای افزایش ضخامت از $ho = 0.75 * sh$ تا $ho = 1.25 * sh$ در یاتاقان با ضریب ارتفاع زبری ۰/۳ در پروفیل سینوسی و بتا به ترتیب ۵۰٪ و ۵۲٪ است. این در حالی است که مقادیر فوق به ازای افزایش ضخامت از $ho = 2.75 * sh$ تا $ho = 3.25 * sh$ در پروفیل سینوسی و بتا به ترتیب ۲۸٪ و ۳۰٪ می‌باشد.

جدول (۱): مقادیر فشار ماکزیمم بدون بعد به ازای ضریب

ارتفاع زبری ۰/۳ در دو پروفیل سینوسی و بتا.

ضخامت فیلم سیال	فشار ماکزیمم در پروفیل سینوسی	فشار ماکزیمم در پروفیل بتا
$ho = .75 * sh$	۰/۵۹۹۶	۰/۵۶۶
$ho = 1.25 * sh$	۰/۲۹۷۲	۰/۲۶۸۲
$ho = 1.75 * sh$	۰/۱۷۰۴	۰/۱۴۷۹
$ho = 2.25 * sh$	۰/۱۰۸	۰/۰۹۰۷
$ho = 2.75 * sh$	۰/۰۷۳۵	۰/۰۶۰۱
$ho = 3.25 * sh$	۰/۰۵۲۸	۰/۰۴۲۲



شکل (۹): تغییرات ظرفیت تحمل بار مماسی بدون بعد

بر حسب ضریب ارتفاع در پروفیل بتا.

در شکل ۹ اثر ضریب ارتفاع بر ظرفیت تحمل بار مماسی نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش ضریب ارتفاع زبری، میزان ظرفیت تحمل بار مماسی نیز افزایش می‌یابد. این افزایش، نسبت به افزایش بار عمودی بیشتر است که به علت تأثیر مستقیم ضخامت فیلم سیال در رابطه مربوط به محاسبه بار مماسی می‌باشد. در اینجا نیز هر چه ضخامت فیلم سیال بیشتر شود اثر زبری،

رسید. از طرفی مشاهده می‌شود که تغییر در ضریب ارتفاع زبری نسبت به تغییر در طول موج زبری به مراتب اثر بیشتری بر عمل کرد یاتاقان دارد. این نتیجه با نتیجه به دست آمده از مرجع [۲۱] هم‌خوانی دارد. روند کلی این تغییرات برای ظرفیت تحمل بار عمودی هم برقرار است. در اینجا نیز بیش‌ترین کاهش فشار ایجاد شده در اثر افزایش ضخامت فیلم سیال، برای نسبت‌های ho/sh کمتر از واحد و بیشتر از واحد به دست آمده است. به‌طور مثال درصد افت فشار به ازای افزایش ضخامت از $ho = 0.75 * sh$ تا $ho = 1.25 * sh$ در یاتاقان با ضریب ارتفاع زبری ۰/۳ در پروفیل سینوسی و بتا به ترتیب برابر ۵۲٪ و ۵۴٪ است در حالی که مقادیر فوق به ازای افزایش ضخامت از $ho = 2.75 * sh$ تا $ho = 3.25 * sh$ در پروفیل سینوسی و بتا به ترتیب برابر ۲۹٪ و ۳۰٪ می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

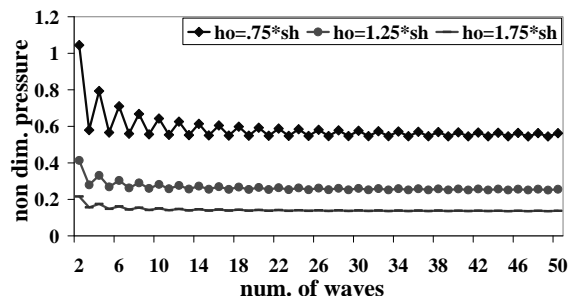
در این مقاله ابتدا تأثیر زبری بر عمل کرد یاتاقان لغزشی پله‌ای بررسی و سپس تغییرات در پارامترهای عمل کرد یاتاقان در اثر تغییر در سه عامل ضریب ارتفاع زبری، طول موج زبری و ضخامت فیلم سیال در دو پروفیل مختلف محاسبه و نتایج حاصله با هم، مقایسه گردید. نتایج حاکی از آن است که:

۱- با ایجاد عامل زبری، فشار افزایش یافته و بیش‌ترین مقدار افزایش فشار، در پله یاتاقان ایجاد می‌شود. متناسب با افزایش فشار، ظرفیت تحمل بار عمودی نیز افزایش می‌یابد. افزایش فشار در پروفیل سینوسی بیش از پروفیل بتا است،

۲- روند افزایش فشار و بار با افزایش ضریب ارتفاع زبری، بیشتر خواهد شد. این اثر در ضخامت‌های کوچکتر فیلم سیال بیشتر مشهود است. افزایش ضریب ارتفاع زبری منجر به افزایش بار مماسی نیز می‌شود. این تأثیر بیش از تأثیر مشابه در مورد فشار است. به ازای یک میزان مشخص از زبری، در پروفیل سینوسی، افزایش فشار، بار عمودی و بار مماسی بیشتری نسبت به پروفیل بتا ایجاد می‌شود،

۳- با کاهش طول موج زبری، فشار ماکزیمم و ظرفیت تحمل بار عمودی کاسته می‌شود. در تعداد طول موج‌های کم، فشار ماکزیمم و بار عمودی در پروفیل سینوسی نسبت به بتا اختلاف بیشتری را در مقایسه با طول موج‌های بیشتر نشان

در جدول ۳، مقدار فشار ماکزیمم بدون بعد در ضخامت‌های مختلف فیلم سیال در ضریب ارتفاع ۰/۳ پس از میرایی نسبی به ازای دو پروفیل با هم مقایسه شده است.



شکل (۱۰): تغییرات فشار ماکزیمم بر حسب تعداد امواج در پروفیل بتا به ازای ضخامت‌های مختلف.

جدول (۳): مقادیر فشار ماکزیمم بدون بعد به ازای ضریب ارتفاع ۰/۳

ضخامت فیلم سیال	فشار ماکزیمم در پروفیل سینوسی	فشار ماکزیمم در پروفیل بتا
$ho = .75 * sh$	۰/۶۰۱۹	۰/۵۶۲۲
$ho = 1.25 * sh$	۰/۲۸۴۳	۰/۲۵۵۵
$ho = 1.75 * sh$	۰/۱۵۸۶	۰/۱۳۷۴
$ho = 2.25 * sh$	۰/۰۹۸۶	۰/۰۸۲۷
$ho = 2.75 * sh$	۰/۰۶۶۲	۰/۰۵۴
$ho = 3.25 * sh$	۰/۰۴۷	۰/۰۳۷۴

با توجه شکل ۱۰ و جدول ۳ مشاهده می‌شود که فشار ماکزیمم به ازای تعداد موج‌های کم، در پروفیل سینوسی بیشتر از پروفیل بتا است اما با افزایش تعداد طول موج‌ها، تفاوت فشار کمتر خواهد شد. در اینجا نیز با افزایش ضخامت فیلم سیال، اثر کاهش طول موج زبری کمتر نمایان خواهد بود. هر دو عامل کاهش طول موج زبری و افزایش ضخامت فیلم سیال، باعث افت فشار در یاتاقان می‌شوند اما افزایش ضخامت، نقش به مراتب عمده‌تری را در کاهش فشار ایفا می‌کند. برخلاف اثر افزایش ضریب ارتفاع که همواره با افزایش آن، فشار روند افزایشی دارد، با کاهش طول موج زبری پس از تعداد مشخص، فشار به مقدار ثابتی خواهد

- Tech., Vol. 193, pp. 324-330, 1971.
6. Christensen, H. and Tonder, K. "The Hydrodynamic Lubrication of Rough Journal Bearing", ASME J. Lub. Tech., Vol. 95, pp. 166-172, 1973.
 7. Elrod, H.G. "A Review of Theories for the Fluid Dynamic Effects of Roughness on Laminar Lubrication", The 4th Leeds-Lyon Symp., Lyon. Mech. Eng. Publishers, pp. 11-26, London, 1978.
 8. Majumdar, B.C. and Hamrock, B.J. "Effect of Surface Roughness on Hydrodynamic Bearings", NASA Tech. Memorandum, NASA, Washington DC, 1981.
 9. Sharma, R.K. and Pandey, R.K. "Experimental Studies of Pressure Distributions in Finite Slider Bearing with Single Continuous Surface Profiles on the Pads", Tribology Int., Vol. 42, No. 7, pp. 1040-1045, 2009.
 10. Krupka, I., Sperka, P., Hartl, M., Xue Jin, S., and Xiao Yang, C. "Effect of Real Longitudinal Surface Roughness on Lubrication Film Formation within Line Elasto-hydrodynamic Contact", Tribology Int., Vol. 43, No. 12, pp. 2384-2389, 2010.
 11. Kumar, P., Jain, S.C., and Ray, S. "Effect of Transverse Surface Roughness and Additives in TEHD Contacts", Tribology Int., Vol. 41, No. 6, pp. 502-514, 2008.
 12. Turaga, R., Sekhar, A.S., and Majumdar, B.C. "Stochastic FEM Model of One-dimensional Hydrodynamic Bearings with Rough Surfaces", Wear, Vol. 197, No's. 1-2, pp. 221-227, 1996.
 13. Naduvinamani, N.B. and Siddangouda, A. "Effect of Surface Roughness on the Hydrodynamic Lubrication of Porous Step-Slider Bearings with Couple Stress Fluids", Tribology Int., Vol. 40, No. 5, pp. 780-793, 2007.
 14. Reddi, M.M. "Finite Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem", J. Lubrication Tech., Transactions of ASME, Vol. 91, pp. 524-533, 1969.
 15. Sun, D.C. and Chen, K.K. "First Effects of Stokes Roughness on the Hydrodynamic Lubrication", Transactions of ASME., Vol. 99, pp. 2-9, 1977.
 16. Nakamura, T. "The Analysis of Surface Roughness Curves", J. Soc. of Precision Eng. of Japan, Vol. 25, pp. 56-62, 1959.
 17. Ranganath-Nayak, P. "Random Process Model of Rough Surfaces", J. Lubrication Tech., Trans. ASME, Vol. 93, pp. 398-407, 1971.

می‌دهد. میزان افت فشار و ظرفیت تحمل بار عمودی به ازای یک میزان مشخص از کاهش طول موج زبری در پروفیل سینوسی نسبت به بتا بیشتر است. با افزایش تعداد موج‌ها که معادل کاهش طول موج زبری به ازای یک طول مشخص یاتاقان است فشار و بار عمودی به مقدار ثابتی خواهند رسید. در این بررسی، مشاهده شد که کاهش طول موج زبری بر عملکرد یاتاقان، به مراتب تأثیر کمتری نسبت به ضریب ارتفاع زبری دارد که مؤید نتایج قبلی است و

۴- برخلاف اثر افزایش ضریب ارتفاع زبری که منجر به افزایش فشار می‌شود، افزایش ضخامت فیلم سیال منجر به کاهش فشار خواهد شد. این تأثیر بر کاهش فشار در یاتاقان بیش از تأثیر افزایش ضریب ارتفاع زبری بر افزایش فشار می‌باشد. به‌طور مثال در حالتی که نسبت ضخامت فیلم سیال به ارتفاع پله (ho/sh) بیش از یک باشد، به ازای ضریب ارتفاع زبری $0/3$ ، میزان فشار ماکزیمم، از فشار مربوط به یاتاقانی با ضخامت کمتر از sh و بدون زبری، کمتر خواهد بود. این نکته نشان‌دهنده آن است که عامل زبری، بیش‌ترین تأثیر خود را برای ضخامت‌های $ho/sh < 1$ خواهد داشت. همان‌طور که پیشتر اشاره شد، در بررسی‌های گذشته، نتایج حاکی از آن بود که در حالاتی که زبری هم‌مرتبیه با ضخامت فیلم سیال باشد، تأثیر قابل توجهی بر عملکرد یاتاقان خواهد داشت.

مراجع

1. Gadelmawlaa, E.S., Kourab, M.M., Maksoud, T.M.A., Elewaa, C.I.M., and Solimand, H.H. "Roughness Parameters", J. Material Processing Tech., Vol. 123, No. 1, pp. 133-145, 2002.
۲. همراک، ب.، ترجمه برادران رحیمی، ا. " مبانی روان‌کاری فیلم سیال"، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ۱۳۷۷.
3. Larsson, R. "Modeling the Effect of Surface Roughness on Lubrication in all Regimes", Tribology Int., Vol. 42, No. 4, pp. 512-516, 2009.
4. Christensen, H. "Stochastic Models of Hydrodynamic Lubrication of Rough Surfaces", Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 184, pp. 1013-1026, 1969.
5. Christensen, H. and Tonder, K. "The Hydrodynamic Lubrication of Rough Bearing Surfaces of Finite Width", ASME J. Lub.

۱۸. رشیدی میبدی، ر. و دشتی رحمت آبادی، ا. "بررسی آثار پارامترهای طراحی بر عملکردهای استاتیکی و دینامیکی یاتاقانهای گازی غیر مدور"، نشریه مکانیک هوافضا، جلد ۴، شماره ۱، صص. ۱-۱۴، ۱۳۸۷.
۱۹. عاطفی، غ.، قلی زاده، م.، و مقیمی، م. "تحلیل نیروهای مؤثر در روغنکاری یک یاتاقان لغزنده"، نشریه مکانیک هوافضا، جلد ۳، شماره ۲، صص. ۱-۱۲، ۱۳۸۶.
20. Asghar-Bhatti, M. "Fundamental Finite Element Analysis and Applications", John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
21. Tzeng, T. and Saibel, E. "Surface Roughness Effects on Slider Bearing Lubrication", ASLE Transactions, Vol. 10, No. 3, pp. 334-338, 1967.