

شناسایی تانسور اینرسی با استفاده از شبیه‌ساز ماهواره یاتاقان هوایی نیمه کروی براساس روش حداقل مربعات مقاوم شده در برابر نویز

محمدعلی امینی^۱، حسن سالاریه^۲ و آریا الستی^۳

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۹/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱۰/۱۶)

چکیده

در این مقاله، بر پایه روش حداقل مربعات بازگشتی، روشی برخط برای شناسایی مؤلفه‌های تانسور ممان اینرسی اجسام با استفاده از شبیه‌ساز ماهواره چرخ عکس‌العملی سه درجه آزادی ارائه شده است. دینامیک شبیه‌ساز یاتاقان هوایی مجهز به سه عدد عملگر چرخ عکس‌العملی به دست آمده و مورد استفاده قرار گرفته است. تنها سنسور مورد استفاده، سنسور ژایرو نرخ سه جهته است. به دلیل وجود نویز در این سنسور، ماتریس برازشگر مورد استفاده در روش حداقل مربعات دارای عدم قطعیت تصادفی بوده و در نتیجه روش حداقل مربعات کلاسیک، قابل استفاده نیست. برای حل این مشکل، روشی مقاوم به نویز ارائه و پایداری این روش اثبات شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی این روش، موفقیت این روش در شناسایی مؤلفه‌های تانسور اینرسی را اثبات می‌کند.

واژه‌های کلیدی: شناسایی، تانسور ممان اینرسی، شبیه‌ساز یاتاقان هوایی نیمه کروی ماهواره، روش مقاوم به نویز، روش حداقل مربعات بازگشتی

Identification Of inertia Tensor Using Semi-Spherical Air Bearing Satellite Simulator Based on a Robust Least Squares Method

M.A. Amini, H. Salarieh and A. Alasty

Mechanical Engineering Department

Sharif University of Technology

(Received: 10/December/2012; Accepted: 6/January/2014)

ABSTRACT

In this paper a method for online identification of moment of inertia tensor parameters of bodies based on recursive least squares method, with a 3 axis reaction wheel air bearing satellite simulator is presented. Dynamics of simulator is implemented in special manner. The only available sensor is a three axes rate gyro which measures the angular velocity of satellite in the body coordinate system. Due to existence of noise in this sensor, the regressor matrix that used in least squares method is not deterministic. So in this case, the classic least squares method cannot be utilized, and its convergence is not guaranteed. For solving this problem, a modified least squares method with robust scheme is presented and its stability is proved. Simulation Results have proved the success of this method in identification of inertia tensors using an air-bearing simulator.

Keywords: Identification, Moment of Inertia Tensor, Semi-Spherical Air Bearing Satellite Simulator, Robust Method, Recursive Least Squares Method

۱- کارشناسی ارشد: aliamini64@yahoo.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): salarieh@sharif.ir

۳- استاد: aalasti@sharif.edu

۱- مقدمه

استفاده از قانون بقای مومنتوم برای حرکت دورانی است. به این ترتیب که موتورهای متصل به چرخ‌های عکس‌العملی، باعث گردش این چرخ‌ها شده و در نتیجه، به دلیل قانون بقای مومنتوم زاویه‌ای در کل مجموعه، کل بدنه شبیه‌ساز در جهت مخالف شروع به حرکت خواهد کرد. در شکل ۱ نمونه‌ای از شبیه‌ساز چرخ عکس‌العملی سه محوره و چرخ‌های عکس‌العملی مورد استفاده در آنها، نشان داده شده است.



شکل (۱): نمونه‌ای از شبیه‌ساز یاتاقان هوایی نیمه کرووی.

به دلیل توانایی این نوع شبیه‌ساز در حرکت در جهات مختلف، می‌توان با طراحی الگوریتمی مناسب، تمام مؤلفه‌های تانسور ممان اینرسی را طی یک آزمایش شناسایی نمود. یکی دیگر از موارد استفاده این شبیه‌سازها، امتحان و عیب‌یابی روش‌های توسعه‌یافته برای اندازه‌گیری برخط خواص جرمی ماهواره است. خواص جرمی ماهواره‌ها و فضایی‌ها به دلایل مختلفی مانند برخورد با اجسام فضایی، تغییر مقدار سوخت، باز شدن پانل‌های خورشیدی، حرکت سرنشینان فضایی و... ممکن است در طول ماموریت تغییر کند. به این منظور، الگوریتم‌های شناسایی برخط خواص جرمی طراحی و توسعه یافته‌اند. این الگوریتم‌ها حتماً باید بر روی زمین مورد آزمایش و عیب‌یابی قرار گیرند. یکی از روش‌های معمول برای آزمایش این الگوریتم‌ها، استفاده از شبیه‌سازهای ماهواره است. البته به دلیل وجود تفاوت‌های دینامیکی بین رفتار ماهواره و شبیه‌ساز، دینامیک شبیه‌ساز با دینامیک ماهواره دارای تفاوت‌هایی بوده و در نتیجه بحث جدایی را نیز می‌طلبند.

در این مقاله، ابتدا مختصری از کارهای انجام شده در این زمینه ارائه و سپس به تشریح الگوریتم پرداخته شده است. شوارتز^۱ و بقیه در سال ۲۰۰۳، روش‌های مختلف کالمن فیلترینگ (مثل کالمن فیلتر تعمیم یافته و کالمن فیلتر تعمیم یافته بازگشتی) را برای تخمین حالت‌ها و پارامترهای یک شبیه‌ساز (سیمولاتور) ماهواره را با یکدیگر مقایسه کردند [۱]. همین گروه در سال ۲۰۰۵ برای تخمین خواص جرمی همان

امروزه شاهد آن هستیم که طراحی، پرتاب و کنترل ماهواره و فضاییما، یکی از عرصه‌های مهم تکنولوژی در سرتاسر دنیا محسوب می‌شود و بودجه‌های کلانی در این مسیر صرف می‌شود. در کشور ما نیز در دهه گذشته، اقدامات ویژه‌ای در این بخش صورت گرفته است. به دلیل پرهزینه بودن پروژه‌های فضایی، در نتیجه ریسک پذیری بسیار کم آن، یکی از مهم ترین دغدغه‌های موجود، اطمینان از وضعیت ماهواره یا فضاییما و توانایی کنترل و عیب‌یابی آنهاست. به عبارت دیگر، با توجه به هزینه‌های بالای ساخت یک ماهواره، هر روشی که بتواند خطرپذیری مأموریت ماهواره را کاهش دهد، دارای ارزش توجه و بررسی است.

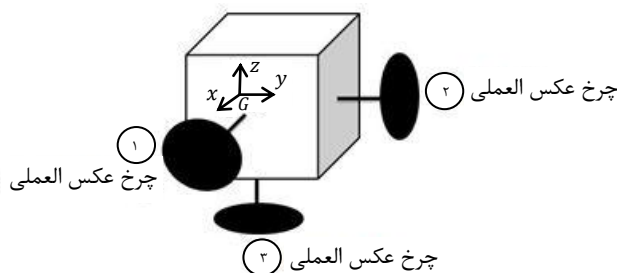
اطلاع دقیق از خواص جرمی یک ماهواره برای توانایی در کنترل وضعیت و همچنین عیب‌یابی یک ماهواره و یا فضاییما، امری بسیار ضروری است. به عبارت دیگر، در صورت مشاهده عیوب ناشناخته در ماهواره در مدار، می‌توان از اطلاعات برخط خواص جرمی، برای کمک به عیب‌یابی ماهواره استفاده کرد. در عمل برای چنین مقصودی، خواص جرمی این سیستم‌ها باید بر روی زمین به طور بسیار دقیق اندازه‌گیری شود. همچنین به دلیل مقاصد عیب‌یابی، اطلاع از خواص جرمی تک‌تک اجزای یک ماهواره و یا فضاییما، امری اجتناب‌ناپذیر است. از طرفی دستگاه‌های اندازه‌گیری تانسور اینرسی معمولاً به صورت یکجا و از طریق انجام فقط یک تست نمی‌توانند خواص جرمی اجسام را تعیین کنند و بعضاً لازم است چندبار جسم مورد نظر از دستگاه باز شود و در راستای دیگری بسته شود و این کار هم دقت بسیار زیادی را می‌طلبند و هم بسیار زمان بر است. در حالی که اگر بتوان با یک تست همه مؤلفه‌های تانسور را تعیین نمود، کار بسیار ساده تر خواهد شد. یکی از روش‌هایی که می‌تواند این قابلیت بسیار خوب را برای اندازه‌گیری خواص جرمی فراهم کند، استفاده از سازوکار شبیه‌سازهای یاتاقان هوایی کرووی و نیمه کرووی و یا دمبلی است.

شبیه‌سازها با شبیه‌سازی محیط نسبتاً بی‌اصطکاک و کم اغتشاش فضا، امکان امتحان صحت عملکرد ماهواره، قبل از پرتاب به فضا را برای ماهواره فراهم می‌کنند. یکی از انواع این شبیه‌سازها، شبیه‌ساز یاتاقان هوایی کرووی یا نیمه کرووی چرخ عکس‌العملی است. این شبیه‌ساز، با استفاده از یک یاتاقان هوایی کرووی یا نیمه کرووی امکان گردش آزادانه یا مقید حول سه محور را داراست. با استفاده از سه چرخ عکس‌العملی در سه راستای مختلف، نیروی محرکه شبیه‌ساز برای حرکت در این سه محور فراهم می‌شود. در واقع اصول کار این چرخ‌ها،

کرده و مقایسه نموده‌اند و سپس با یک روش حداقل مربعات دسته‌ای، ماتریس اینرسی را تخمین زده‌اند. در تمام کارهای ذکر شده، آن دسته از کارهایی که بر پایه روش حداقل مربعات بوده‌اند، یا نویز را لحاظ نکرده‌اند و یا در صورت لحاظ کردن، الگوریتم مقاومی ارائه نکرده‌اند و اثبات پایداری ارائه نداده‌اند. در ادامه ابتدا دینامیک ماهواره معرفی خواهد شد و سپس در بخش بعدی این معادله برای شبیه‌ساز اصلاح خواهد شد.

۲- استخراج دینامیک ماهواره

شکل ۲ شمای کلی ماهواره، چرخ‌های عکس‌العملی و دستگاه مختصات روی جسم را نمایش می‌دهد.



شکل (۲): شمای کلی سیستم و جهت قرارگیری چرخ‌های واکنشی.

همان‌طورکه در شکل ۲ قابل ملاحظه است، محورهای مختصات، موازی محورهای دوران چرخ‌های عکس‌العملی در نظر گرفته شده‌اند و همچنین مرکز مختصات، بر روی مرکز جرم کل جسم است.

در این حالت می‌توان نشان داد [۸]:

$$T_{ext} = \omega \times (I\omega + h) + I\dot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

T_{ext} برآیند گشتاورهای خارجی وارد بر کل سیستم است و همچنین،

$$h = \sum_{i=1}^3 I_{RW_i} \omega_{RW_i} \quad (2)$$

درحالی‌که، I_{RW} ماتریس ممان اینرسی چرخ عکس‌العملی نسبت به مرکز جرم مجموعه چرخ عکس‌العملی و ω_{RW} سرعت دوران نسبی چرخ عکس‌العملی نسبت به دستگاه قرار گرفته بر روی ماهواره است.

همچنین I ممان اینرسی کل سیستم حول مرکز جرم آن و ω سرعت دورانی دستگاه مختصات وصل به بدنه ماهواره است.

شبیه‌ساز از یک روش حداقل مربعات دسته‌ای^۱ استفاده کردند [۲] و توضیح دادند در کارهایی که هزینه‌ها پایین تر است و دقت بالا نیز نیاز نیست، استفاده از روش حداقل مربعات، به صرفه است. همچنین در سال ۲۰۰۵، ون دایک^۲ با کمک شوارتز، روش UKF^۳ را نیز بررسی کردند و نتایج مقایسه آن با EKF^۴ را در تخمین پارامترهای یک فضاپیما شبیه‌سازی شده مقایسه کردند [۳].

کیم^۵ در سال ۲۰۰۶ برای تخمین ماتریس ممان اینرسی فضاپیما، از یک روش حداقل مربعات مقید^۶ استفاده کرد [۴]. برای آزمایش این روش، از یک شبیه‌ساز ماهواره پنج درجه آزادی، استفاده شده است. او ادعا می‌کند، در هنگام محدود بودن داده‌ها، این روش مزیت دارد.

کوتلو^۷ در سال ۲۰۰۷، یک مدل شبیه‌سازی شده با نرم‌افزار MATLAB، برای ماهواره‌های LEO ارائه کرده است [۵] و پس از فیلتر کردن ورودی‌ها با استفاده از کالمن فیلتر، ماتریس ممان اینرسی را با استفاده از روش حداقل مربعات تخمین زده است.

دسوزا^۸ و بقیه در سال ۲۰۰۸، بر روی یک شبیه‌ساز ماهواره سه درجه آزادی که دارای سه چرخ عکس‌العملی^۹ است، روشی تجربی برای پیدا کردن خواص اینرسی ارائه کردند [۶]. در واقع در این روش، ابتدا خروجی‌ها را به ازای گشتاورهای مختلف ثبت می‌کند و سپس به‌صورت آفلاین خواص اینرسی را محاسبه می‌کند.

در سال ۲۰۱۰، جون^{۱۰} و بقیه، روشی بر اساس مدل حداقل همبستگی ارائه کردند. دلیل این کار را هم، بالا بودن حساسیت روش حداقل مربعات به نویز عنوان کرده‌اند.

در همین سال کیم^{۱۱} و بقیه، یک روش ترکیبی را برای تخمین پارامتر ماهواره‌ی STSAT-3 مورد استفاده قرار دادند [۷]. آن‌ها ابتدا سنسورهای ورودی را با استفاده از سه روش مختلف (کالمن فیلتر، باترورث^{۱۲}، انتقال مرتبه صفر^{۱۳}) فیلتر

1-Batch Least Squares Method

2 -VanDyke

3-Unscented Kalman Filter

4-Extended Kalman Filter

5- Keim

6 -Constrained Least Squares Method

7-Kutlu

8- Desouza

9-Reaction Wheel

10-Jun

11- Kim

12-Butterworth

13-Zero Shift Order

همچنین همان طور که مشخص است، $\dot{\omega}_{RW}$ در راستای محور ζ است.

با انتقال معادله (۵) به دستگاه اصلی سیستم و نوشتن آن برای هر سه چرخ عکس‌عملی و همچنین با فرض تقارن این چرخ‌ها حول محور ζ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} (1) T_1 = J_1(\dot{\omega}_{RW_1} + \dot{\omega}_x), \\ (2) T_2 = J_2(\dot{\omega}_{RW_2} + \dot{\omega}_y), \\ (3) T_3 = J_3(\dot{\omega}_{RW_3} + \dot{\omega}_z), \end{cases} \quad (6)$$

که، در این معادله T_1 ، T_2 و T_3 در واقع مماس‌های وارده از موتورهای چرخ‌های عکس‌عملی ۱، ۲ و ۳، که در شکل ۲ نشان داده شده‌اند، می‌باشند.

همچنین J_1 ، J_2 و J_3 نیز مؤلفه‌های سوم ارائه شده در معادله (۴) برای هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی می‌باشند.

سه پارامتر J ، T و ω_{RW} به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

و

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

و همچنین:

$$\omega_{RW} = \begin{bmatrix} \omega_{RW_1} \\ \omega_{RW_2} \\ \omega_{RW_3} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

باتوجه به معادلات (۷)، (۸) و (۹)، می‌توان معادله (۶) را به صورت زیر نوشت.

$$T = J(\dot{\omega}_{RW} + \dot{\omega}). \quad (10)$$

همچنین با استفاده از این تعاریف، می‌توان متغیر h که در معادله شماره (۲) آورده شده است، باز نویسی کرد.

$$h = J_1 \omega_{RW_1} \hat{i} + J_2 \omega_{RW_2} \hat{j} + J_3 \omega_{RW_3} \hat{k}.$$

در نتیجه:

$$h = J \omega_{RW}. \quad (11)$$

در نتیجه معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

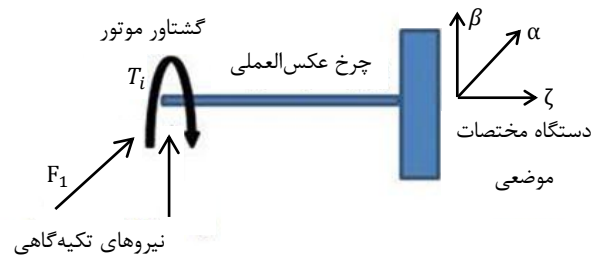
$$T_{ext} = \omega \times (I\omega + J\omega_{RW}) + I\dot{\omega} + J\dot{\omega}_{RW}. \quad (12)$$

معادلات (۱۰) و (۱۲) در واقع خلاصه‌ای از دینامیک دورانی سیستم ماهواره است.

معادله (۱) در واقع با تعمیم معادله اوایلر برای چند جسم صلب است که به یکدیگر متصل هستند ولی نسبت به یکدیگر حرکت نسبی دارند.

برای به دست آوردن رابطه گشتاور موتور چرخ عکس‌عملی با سرعت زاویه‌ای سیستم، باید معادلات اوایلر چرخ‌های عکس‌عملی به صورت جداگانه نوشته شوند.

دیاگرام آزاد هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی در شکل ۳ قابل مشاهده است.



شکل (۳): نیروهای وارد بر چرخ عکس‌عملی.

با نوشتن معادلات اوایلر حول مرکز جرم و با فرض حرکت دستگاه مختصات با بدنه ماهواره

$$T_i + \sum r_i \times F_i = \omega \times (I_{RW}(\omega + \omega_{RW})) + I_{RW}(\dot{\omega} + \dot{\omega}_{RW}). \quad (3)$$

همان طور که در شکل ۳ قابل ملاحظه است، T_i گشتاور وارد بر چرخ عکس‌عملی i ام توسط موتور i ام است. شماره هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی را می‌توان در شکل ۲ مشاهده کرد.

در این معادله، ماتریس مماس اینرسی در دستگاه موضعی $\alpha\beta\zeta$ ، به صورت زیر است:

$$I_{RW} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix}. \quad (4)$$

در معادله شماره (۳) مؤلفه حول محور ζ برای هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی به صورت زیر است:

$$T_i = J_i(\dot{\omega}_{RW} + \dot{\omega}_\zeta) + (I_{\beta\beta} - I_{\alpha\alpha})\omega_\alpha\omega_\beta. \quad (5)$$

که در آن، ω_α ، ω_β و ω_ζ مؤلفه‌های سرعت دورانی بدنه ماهواره در راستای محورهای موضعی چرخ عکس‌عملی می‌باشند.

در ضمن قابل ذکر است که دستگاه $\alpha\beta\zeta$ بر روی مرکز جرم چرخ عکس‌عملی قرار دارد ولی با سرعت زاویه‌ای بدنه (و نه چرخ عکس‌عملی) حرکت می‌کند.

می‌توان نشان داد که با نوشتن معادلات اوپلر حول این نقطه ثابت، مشابه آن چه در مورد مرکز جرم گفته شد، رابطه زیر برای کل سیستم به دست می‌آید:

$$(T_{ext})_O = \omega \times (I_O \omega + J \omega_{RW}) + I_O \dot{\omega} + J \dot{\omega}_{RW}. \quad (14)$$

که در آن، I_O ممان اینرسی کل سیستم نسبت به نقطه O و $(T_{ext})_O$ ممان‌های خارجی وارد بر کل سیستم نسبت به نقطه O است. از طرفی در مورد معادلات گشتاور چرخ‌های عکس‌عملی همچنان معادله زیر برقرار است.

$$T = J(\dot{\omega}_{RW} + \dot{\omega}). \quad (15)$$

در مورد گشتاور مطرح شده در معادله (۱۴) نیز می‌توان گفت:

$$(T_{ext})_O = T_{ext} + r_{OG} \times (-mg) \hat{K}. \quad (16)$$

که در آن، T_{ext} اثر گشتاورهای خارجی نامعلوم است که با به شکل اغتشاش مدل می‌شود، r_{OG} بردار بین مرکز مختصات و مرکز جرم کل سیستم و بردار \hat{K} ، بردار یکه راستای Z در مختصات ثابت XYZ است. برای ساده کردن معادله (۱۶)، باید بردار \hat{K} بر حسب بردارهای چسبیده به جسم (xyz) نوشته شود.

در مختصات زوایای اوپلر، ابتدا مختصات متحرک و مختصات ثابت منطبق بر یکدیگر هستند. سپس مختصات متحرک حول محور Z به اندازه زاویه ψ ، چرخانده می‌شود. و در پی آن این مختصات، حول محور Y جدید به اندازه زاویه θ چرخانده شده و در آخر مختصات متحرک به اندازه زاویه ϕ حول محور X جدید دوران پیدا می‌کند.

می‌توان نشان داد که ماتریس دوران بین دو مختصات به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi C_\theta & -S_\theta \\ -S_\psi C_\phi + C_\psi S_\theta S_\phi & C_\psi C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi & C_\theta S_\phi \\ S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi & -C_\psi S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}. \quad (17)$$

که در آن، S نماد تابع \sin و C نماد تابع \cos هستند. بین سرعت دورانی جسم و مشتقات زوایای اوپلر می‌توان رابطه برقرار نمود.

سرعت زاویه‌ای مطلق دستگاه از جمع برداری سه سرعت دورانی زوایای اوپلر حاصل می‌شود و از طرفی نسبت به دستگاه متصل به جسم

$$\omega = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}. \quad (18)$$

برای به دست آوردن سرعت دورانی دستگاه اصلی مختصات می‌توان با ترکیب روابط (۱۰) و (۱۲) به معادله زیر رسید:

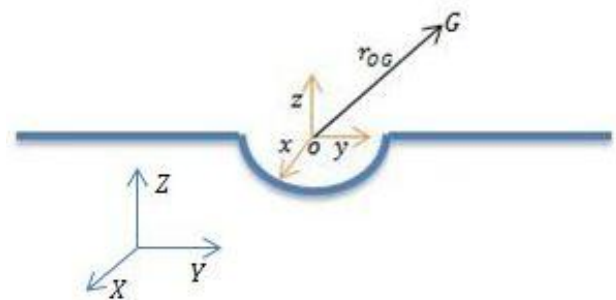
$$\dot{\omega} = (I - J)^{-1} [T_{ext} - T - \omega \times (I\omega + J\omega_{RW})]. \quad (13)$$

در سیستم شبیه‌ساز ماهواره فرض بر این است که می‌توان مقدار ω_{RW} را با استفاده از سنسور نصب شده بر روی موتورها (مثلاً انکودرهای دورانی) به دست آورد. در صورتی که این امر ممکن نباشد، به راحتی می‌توان از معادله (۱۰) برای این کار استفاده کرد.

قابل ذکر است که با توجه به نداشتن سنسور و یا عملگر خطی، جرم و مکان مرکز جرم ماهواره مستقلاً و به صورت جداگانه، قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند.

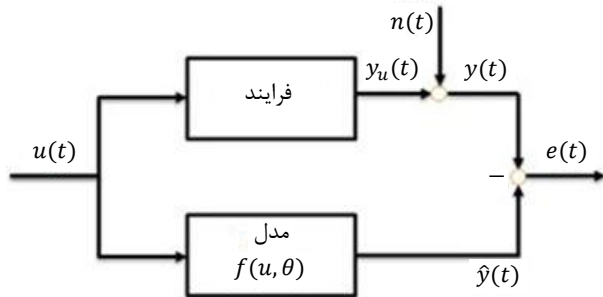
۳- اصلاح معادلات دینامیکی برای شبیه‌ساز یاتاقان هوایی ماهواره

در شبیه‌ساز ماهواره، به دلیل وجود نیروی قائم در محل یاتاقان هوایی، معادلات کمی متفاوت خواهد بود. برای راحت تر شدن محاسبات بهتر است که مرکز مختصات را بر روی نقطه مرکز نیم کره یاتاقان هوایی که نقطه‌ای ثابت است گذاشته شود. به این ترتیب می‌توان معادلات را دوباره بازنویسی کرد. تنها فرق این روش، وارد شدن مقدار جرم و مکان مرکز جرم در محاسبات است. در شکل ۴ محل قرارگیری محور مختصات در شبیه‌ساز ماهواره به نمایش در آمده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، نقطه ثابت مرکز نیم کره یاتاقان هوایی با حرف O نمایش داده شده است و همچنین نقطه G ، مرکز جرم کل سیستم است.



شکل (۴): محل قرارگیری محور مختصات در دینامیک شبیه‌ساز ماهواره.

کردن خطا در شرایط وجود نویز سفیدنیزموثر است [۹]. این حرف بدان معنی است که اختلال سفید در نویز، خللی در روش حداقل مربعات ایجاد نمی کند.



شکل (۵): نمای کلی شناسایی به روش حداقل مربعات.

تابع هدفی که در روش حداقل مربعات کمینه می شود، عبارت است از:

$$I = \int_0^t \frac{1}{2} e^2(\tau) d\tau. \quad (23)$$

که در آن، e خطای میان خروجی مدل تخمین زده شده و خروجی واقعی در هر زمان است.

در روش حداقل مربعات، فرض بر خطی بودن خروجی مدل نسبت به پارامترهای بهینه سازی است. به این مفهوم که:

$$y(i) = \theta_1 \varphi_1(i) + \theta_2 \varphi_2(i) + \dots + \theta_n \varphi_n(i) \quad (24)$$

$$= \varphi^T(i) \theta.$$

$$\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)^T. \quad (25)$$

$$\varphi^T(i) = (\varphi_1(i) \varphi_2(i) \dots \varphi_n(i)). \quad (26)$$

که در آن، پارامترهای θ ، پارامترهای واقعی سیستم و متغیرهای φ ، متغیرهایی به نام برازشگر^۱ می باشند. در واقع برازشگرها می توانند حتی ترکیبهایی کاملاً غیر خطی از ورودیها باشند. آنچه در این روش از خطی بودن نیاز است، رابطه خروجی به پارامترها است. به طور ساده تر:

$$e = y - \hat{y} = y - \varphi^T(i) \hat{\theta}. \quad (27)$$

که در آن، $\hat{\theta}$ بردار پارامترهای تخمینی سیستم می باشند. با جایگذاری معادله (۲۷) در تابع هدف ارائه شده در معادله (۲۳)، و انجام عملیات مشتق گیری و ساده سازی می توان نشان

می توان نشان داد که رابطه بین سرعت های دورانی مطلق جسم و مشتقات زوایای اوایلر به صورت زیر است:

$$\omega_x = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \quad (19)$$

و به صورت معکوس می توان نوشت:

$$\dot{\psi} = \sec \theta (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi),$$

$$\dot{\theta} = \omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi,$$

$$\dot{\phi} = \omega_x + \dot{\psi} \sin \theta$$

$$= \omega_x + \omega_y \tan \theta \sin \phi + \omega_z \tan \theta \cos \phi, \quad (20)$$

با استفاده از جواب معادله دیفرانسیل ارائه شده در معادله (۲۰)، زوایای اوایلر در هر لحظه به دست می آیند.

با داشتن این سه زاویه، با ضرب ماتریس دوران C در بردار \hat{K} که مؤلفه های این بردار در مختصات متصل به جسم به دست می آیند.

$$C \hat{K} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (21)$$

حال می توان با داشتن بردار \hat{K} در دستگاه مختصات متصل به جسم جسم، و تبدیل ضرب خارجی به ضرب ماتریس، معادله (۱۶) را ساده تر نوشت.

$$(T_{ext})_o = T_{ext} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi & 0 & \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgr_x \\ mgr_y \\ mgr_z \end{bmatrix}. \quad (22)$$

که در آن، r_x, r_y, r_z مؤلفه های بردار r_{OG} در دستگاه متصل به جسم می باشند.

۴- روش حداقل مربعات

همان طور که از نام این روش مشخص است، روش حداقل مربعات، بر پایه کمینه کردن مجموع مربعات خطای تخمین خروجی سیستم است.

همان طور که در شکل ۵ مشاهده می شود، منظور از خطا، اختلاف بین خروجی مدل و سیستم واقعی است. البته سیستم اصلی دارای نویز در قسمت خروجی است. با کمی محاسبات آماری می توان نشان داد که روش حداقل مربعات برای کمینه

$$\Theta = \begin{bmatrix} I_{O_{xx}} \\ I_{O_{yy}} \\ I_{O_{zz}} \\ I_{O_{xy}} \\ I_{O_{xz}} \\ I_{O_{yz}} \\ mgr_x \\ mgr_y \\ mgr_z \end{bmatrix}. \quad (32)$$

$$\Phi^T(1:3) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x & -\omega_y\omega_z & \omega_y\omega_z \\ \omega_z\omega_x & \dot{\omega}_y & -\omega_z\omega_x \\ -\omega_x\omega_y & \omega_x\omega_y & \dot{\omega}_z \end{bmatrix}. \quad (33)$$

$$\Phi^T(4:6) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x & \dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y & \omega_y^2 - \omega_z^2 \\ \dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z & \omega_z^2 - \omega_x^2 & \dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y \\ \omega_x^2 - \omega_y^2 & \dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z & \dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x \end{bmatrix}. \quad (34)$$

$$\Phi^T(7:9) = \begin{bmatrix} 0 & -C_\theta C_\phi & C_\theta S_\phi \\ C_\theta C_\phi & 0 & S_\theta \\ -C_\theta S_\phi & -S_\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

معادلات (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) هرکدام سه سطر از ۹ سطر ماتریس برازشگر Φ را نمایش می‌دهند.

بدین ترتیب دینامیک شبیه‌ساز یاتاقان هوایی ماهواره نیز به فرم خطی نسبت به پارامترهای مجهول تبدیل می‌شود و در نتیجه می‌توان شناساگرهای تطبیقی را برای آن به کار برد.

همچنین برای به دست آوردن ω_{RW} در سمت چپ معادله (۳۱)، همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد، یا باید مستقیماً این مقدار با استفاده از سنسورهای موتور نظیر انکودرها اندازه گرفته شود و یا از معادله (۱۰) استفاده شود. یعنی:

$$\dot{\omega}_{RW} = J^{-1}T - \dot{\omega}. \quad (36)$$

و به عبارت دیگر:

$$\omega_{RW} = J^{-1} \left(\int T dt \right) - \omega + c. \quad (37)$$

همان‌طور که در معادله (۱۲) قابل مشاهده است، نیروهای مؤثر در حرکت دورانی ماهواره با دو متغیر T و T_{ext} نشان داده شده‌اند.

داد که جواب بهینه در هر زمان با استفاده از قوانین تطبیق زیر حاصل می‌شوند.

$$\dot{\hat{\theta}} = P \phi e, \quad (28)$$

$$\dot{P} = -P \phi \phi^T P,$$

که در آن، P یک ماتریس $n \times n$ است که با یک مقدار اولیه در فرایند تطبیق قرار می‌گیرد. این ماتریس در واقع ماتریس کواریانس مقادیر خطا در زمان است.

ماتریس P با گذر زمان کوچک می‌شود و در نتیجه اگر پس از گذشت زمانی قابل توجه، پارامتری در سیستم تغییر کند، الگوریتم، کارایی خود را برای تعقیب مجدد جواب از دست می‌دهد. برای جبران این نقص از دو روش بهره برده می‌شود. روش اول، روش مقدار دهی مجدد ماتریس P است. به این مفهوم که وقتی اثر^۱ این ماتریس از حدی کوچک تر شد، این ماتریس به مقدار اولیه اش برگردانده می‌شود. روش دوم، روش استفاده از فاکتور فراموشی است. در این روش به جای استفاده از تابع هدف ارائه شده در معادله (۲۳)، از تابع هدف زیر استفاده می‌شود.

$$I = \int_0^t \frac{1}{2} e^{\lambda(t-\tau)} (y - \phi^T \hat{\theta})^2(\tau) d\tau. \quad (29)$$

به پارامتر λ فاکتور فراموشی گفته می‌شود. همان‌طور که مشخص است، اگر در معادله (۲۹) مقدار این پارامتر را برابر صفر قرار دهیم، تابع هدف، همان تابع هدف قبلی خواهد شد. با زیاد کردن این پارامتر، تابع هدف تأثیر خطاهای قدیمی‌تر را کم تر خواهد کرد و در نتیجه مشکل قبلی حل خواهد شد. در این حالت پس از محاسبه حالت بهینه، قوانین تطبیق زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\hat{\theta}} = P \phi e, \quad (30)$$

$$\dot{P} = \lambda P - P \phi \phi^T P,$$

۵- پیاده سازی روش روی شبیه‌ساز ماهواره یاتاقان

هوایی

با استفاده از معادله (۲۲) می‌توان معادله (۱۴) را به صورت زیر بر حسب پارامترها خطی سازی نمود:

$$T_{ext} - T + J\dot{\omega} - \omega \times J\omega_{RW} = \Phi^T \Theta. \quad (31)$$

که در آن،

در واقع فرض روش مربعات خطا، بدون خطا بودن ماتریس برازشگر است و اثبات پایداری این روش تنها وقتی اعتبار دارد که در اندازه‌گیری ماتریس برازشگر خطایی وجود نداشته باشد. البته روش حداقل مربعات می‌تواند اختلال در خروجی را اگر به صورت نویز سفید باشد تحمل کند [۹].

برای بر طرف کردن این مشکل سعی شده است با تغییر قانون تطبیق، الگوریتم، نسبت به نویز مقاوم شود. برای آشنایی با نحوه اثبات پایداری این روش، ابتدا اثبات پایداری روش حداقل مربعات معمولی که ماتریس برازشگر آن قطعی است آورده می‌شود.

۶-۱- اثبات پایداری روش حداقل مربعات (بدون حضور نویز در برازشگر)

با توجه آن چه در بخش دوم گفته شد، در روش حداقل مربعات

$$\dot{\theta} = P \phi e, \quad (40)$$

$$\dot{P} = -P\phi\phi^T P,$$

که در آن، θ بردار پارامترهای واقعی، $\hat{\theta}$ بردار پارامترهای تخمینی، ϕ ماتریس برازشگر، P ماتریس کواریانس و e خطای تخمین شناساگر است.

برای اثبات پایداری، از تابع لیاپانوف زیر استفاده می‌شود:

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta}. \quad (41)$$

که در آن،

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}. \quad (42)$$

در نتیجه:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta}.$$

با توجه به معادلات (۴۰) و (۴۲) داریم:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} (-P\phi e) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta}.$$

با توجه به این که:

$$PP^{-1} = I. \quad (43)$$

در نتیجه:

$$P\dot{P}^{-1} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}. \quad (44)$$

با جایگذاری معادله (۴۰) در معادله بالا:

$$P\dot{P}^{-1} = \phi\phi^T. \quad (45)$$

گشتاور T در واقع گشتاور محوری وارد بر چرخ عکس‌العملی است. این مقدار شامل گشتاور وارد از طرف موتور و همچنین گشتاور اصطکاکی یا تاقان‌ها است. یعنی

$$T = T_{motor} - T_{friction}. \quad (38)$$

در این مقاله فرض بر این است که گشتاور اصطکاکی یا تاقان‌های چرخ عکس‌العملی ناچیز است. در نظر گرفتن و شناسایی پارامترهای اصطکاکی، موضوع تحقیقات بعدی خواهد بود.

گشتاور T_{ext} در واقع کلیه گشتاورهای خارجی وارد بر کل سیستم حول مرکز جرم آن است. با توجه به معلق بودن ماهواره در فضا، در این مقاله این گشتاور به صورت یک اختلال با توزیع گوسی مدل شده است. با توضیحات ذکر شده، ساختار شناساگر و سیستم مشخص است. لازم به یادآوری است که گشتاور سیستم باید یک سیگنال غنی باشد. در این گزارش این سیگنال به صورت یک موج سینوسی شامل چندین فرکانس در نظر گرفته شده است. همچنین شتاب با استفاده از یک فیلتر به دست می‌آید. فرم لاپلاس این فیلتر به صورت زیر است:

$$y = \frac{s}{\lambda_a s + 1} u. \quad (39)$$

که در آن، λ_a یک عدد کوچک است که با توجه به میزان نویز موجود در اندازه‌گیری، قابل تنظیم است. این ضریب به گونه‌ای انتخاب می‌شود که معکوس آن که نماینده فرکانس شکست فیلتر است از یک پنجم فرکانس نویز سنسورهای سرعت موجود کوچکتر باشد.

با توجه به مسائل ذکر شده، معادله (۳۲) یک صورت آماده برای ورود به الگوریتم حداقل مربعات است. تنها مشکل استفاده از این روش، وجود نویز در ماتریس برازشگر است. همان‌طور که در معادلات (۳۴)، (۳۵) و (۳۶) قابل مشاهده است، ماتریس برازشگر تابعی از سرعت‌های دورانی و شتاب‌های دورانی است؛ در حالی که همه این متغیرها دارای نویز بوده و اثبات پایداری در الگوریتم کلاسیک را دچار مشکل می‌کند. در بخش بعدی روشی برای غلبه بر این مشکل ارائه شده است.

۶- مقاوم‌سازی الگوریتم کمترین مربعات خطا نسبت به

نویز اندازه‌گیری

همان‌طور که در بخش ۴ اشاره شد، روش حداقل مربعات ارائه شده، نسبت به نویز در سنسورهای اندازه‌گیری حساس است.

$$e_r = y - \phi^T \hat{\theta} = \phi^T \tilde{\theta}. \quad (50)$$

$$e_s = y - \phi'^T \hat{\theta}. \quad (51)$$

همان‌طور که مشخص است، بین این دو خطا، بردار e_s قابل اندازه‌گیری است. با استفاده از معادله (۴۹)، رابطه بین این دو خطا به صورت زیر است:

$$e_s = \phi^T \tilde{\theta} - \sigma^T \hat{\theta} = e_r - \sigma^T \hat{\theta}. \quad (52)$$

الگوریتم اصلاحی، ابتدا به صورت یک قضیه مطرح خواهد شد و سپس اثبات آن خواهد آمد.

قضیه: قانون تطبیق شناساگر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{\hat{\theta}} = P \phi' e_s + u, \quad (53)$$

$$\dot{P} = -P \phi' \phi'^T P,$$

حد بالای θ را که بردار متغیرهای واقعی است برابر β بگیرید:

$$\|\theta\| < \beta. \quad (54)$$

و حد بالای σ را که ماتریس نویزهای برازشگراست، برابر ζ در نظر بگیرید:

$$\|\sigma\| < \zeta. \quad (55)$$

و قرار دهید:

$$u = P u_0. \quad (56)$$

که u_0 از حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$u_0^T \hat{\theta} = C \gamma. \quad (57)$$

اگر بتوان تابعی به قدر کافی هموار مانند α پیدا کرد که:

$$\|u_0\| < \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma). \quad (58)$$

که در آن، γ

$$\gamma = \frac{1}{2} (\beta \zeta)^2. \quad (59)$$

و C نیز از رابطه زیر به دست بیاید:

$$(1 - C)\gamma + \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma)\beta = 0. \quad (60)$$

می‌توان نشان داد که خطای اندازه‌گیری به صفر میل خواهد کرد. اثبات این قضیه در پیوست این مقاله آورده شده است.

برخی نکات:

با توجه به معادله (۴۵) و با توجه به این که:

$$\phi^T \tilde{\theta} = y - \phi^T \hat{\theta} = e.$$

در نتیجه:

$$\dot{V} = -e^T e + \frac{1}{2} e^T e.$$

و به دست می‌آید:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T e. \quad (46)$$

با توجه به معادله (۴۶) و استفاده از قضیه لاسال - یوشیزاوا [۱۱] می‌توان نتیجه گرفت که \dot{V} و در نتیجه e به سمت صفر میل خواهند کرد.

لازم به ذکر است که با استفاده از تعریف خطا

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \phi \phi^T \tilde{\theta}. \quad (47)$$

با توجه به معادله (۴۷) و این واقعیت که حد \dot{V} به صفر میل می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که اگر ماتریس $\phi \phi^T$ دارای رنک کامل باشد، خطای پارامترها نیز به سمت صفر میل می‌کند. به طور دقیق تر، می‌توان نشان داد که اگر وجود داشته باشند $T > 0$ و $\alpha > 0$:

$$\int_t^{t+T} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau > \alpha I. \quad (48)$$

متغیر $\tilde{\theta}$ نیز به سمت صفر میل می‌کند. به این شرط، شرط غنای ورودی گفته می‌شود [۱۱].

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، بر خلاف فرض روش حداقل مربعات، ماتریس برازشگر در این مسئله دارای نویز است. علاوه بر این که اندازه مؤلفه‌های سرعت دورانی از سنسورهای نویزی گرفته می‌شود، شتاب دورانی نیز با استفاده از مشتق گیری و عبور نتیجه از فیلتری بر روی این داده‌های نویزی به دست می‌آید که مشکل را مضاعف می‌کند.

در ادامه سعی شده است با بهبود دادن قانون تطبیق، مقاومت روش در برابر نویز بالا رود.

۶-۲- مقاومت‌سازی روش حداقل مربعات

به دلیل وجود نویز، به جای ماتریس ϕ ، ماتریس ϕ' قابل اندازه‌گیری است که:

$$\phi' = \phi + \sigma. \quad (49)$$

که در آن، ماتریس σ دربردارنده نویزهایی است که به برازشگر اضافه می‌شود.

دو متغیر خطا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

فرض قضیه ارائه شده در خصوص محدود بودن مقدار نویز است.

دامنه اختلال ورودی، ۱ درصد گشتاورهای خارجی و دامنه نویز اندازه‌گیری سرعت دورانی نیز، ۰.۱ درصد مقدار متوسط سرعت زاویه‌ای سیستم در نظر گرفته شده است. این مقادیر در حدود مقادیر خطایی است که در سنسورهای شبیه‌ساز ماهواره شریف مشاهده شده است.

در این شبیه‌سازی، تابع u_0 ارائه شده در معادله (۵۶)، برای صدق در معادله (۵۷) به صورت زیر انتخاب شده است.

$$\begin{cases} u_{0i} = C\gamma/\hat{\theta}_i & i = \operatorname{argmax}(\hat{\theta}), \\ u_{0i} = 0 & i \neq \operatorname{argmax}(\hat{\theta}), \end{cases} \quad (61)$$

در نتیجه تابع $\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma)$ ارائه شده در معادله (۵۸) به صورت زیر است:

$$u_{0i} = C\gamma/\hat{\theta}_i. \quad (62)$$

در صورت باقی ماندن مشکل صفر شدن مقدار مخرج در معادله (۶۲)، عدد کوچک و مثبتی به مخرج کسر اضافه می‌شود. اگر چه این کار اثبات همگرایی را در استفاده از قضیه مطرح شده خدشه دار می‌کند، ولی در شبیه‌سازی‌های انجام شده، ملاحظه می‌شود تاثیری بر روی کیفیت همگرایی ندارد. تابع تحریک ورودی مورد استفاده، به صورت زیر است:

$$T = \begin{bmatrix} \sin(t) + \sin(2t) + \sin(5t) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin(2t + \pi) + \sin(5t) \end{bmatrix} \quad (63)$$

در جدول ۱ بقیه پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی آورده شده است.

جدول (۱): مقادیر پارامترهای استفاده شده در الگوریتم.

مقدار	پارامتر
10	β
0.01	ζ
$10^7 I$	$P(0)$
0.5	λ
0.02	λ_a

نتایج حاصله از این شبیه‌سازی در ادامه مشاهده می‌شوند. در شکل ۶ میزان خطای شناساگر به نمایش در آمده است.

الف- همان‌طورکه در فرضیات قضیه بیان شد، شرط اعتبار داشتن روش کران دار بودن نویز اندازه‌گیری است. بنابراین نویزهای گوسی سفید و رنگی که فاقد کران هستند، در شرایط قضیه صدق نمی‌کنند. البته در مسائل واقعی نویز سنسورها در عمل کران دار می‌باشند،

ب- وجود بایاس در سنسورها مادامی که شرایط معادلات (۵۴) و (۵۵) را برهم نزند پایداری تخمین‌گر را خدشه‌دار نمی‌کند و قضیه معتبر است و

ج- در صورت وجود بایاس در خروجی سنسورهای اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای می‌توان با افزودن برخی سنسورهای دیگر، بایاس سنسورها را نیز مانند پارامترهای جرمی تخمین زد که البته خارج از اهداف این مقاله است.

۷- شبیه‌سازی و ارائه نتایج

شبیه‌سازی در ۶۰ ثانیه انجام شده است و در ثانیه بیستم، پارامترهای سیستم تغییر می‌کنند. دلیل در نظر گرفتن این دو مقدار آن است که به اندازه کافی زمان برای تکمیل همگرایی وجود داشته باشد.

بازه‌های زمانی شبیه‌سازی (پله‌های انتگرال‌گیری عددی)، ۰/۰۰۵ ثانیه است. ماتریس ممان اینرسی اولیه جسم و مؤلفه mgr اولیه سیستم به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$mgr = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

پس از تغییر خواص جرمی در ثانیه بیستم، ماتریس ممان اینرسی و مؤلفه جرم و مرکز جرم، به صورت زیر می‌باشند:

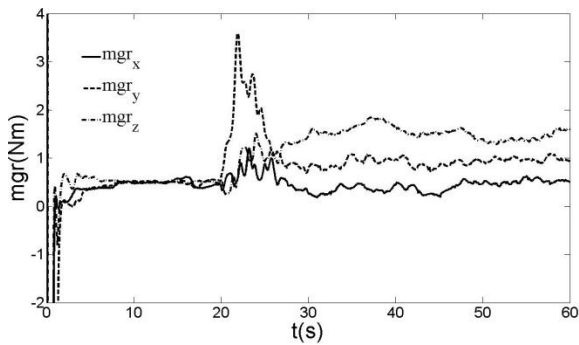
$$I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$mgr = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

ماتریس J نیز به صورت زیر است:

$$J = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

برای مدل‌سازی اختلال ورودی و نویز، از مجموع چند تابع سینوسی با فرکانس‌های بالا استفاده شده است. دلیل این کار،



شکل (۹): نمودار پارامتر mgr تخمینی شبیه‌ساز.

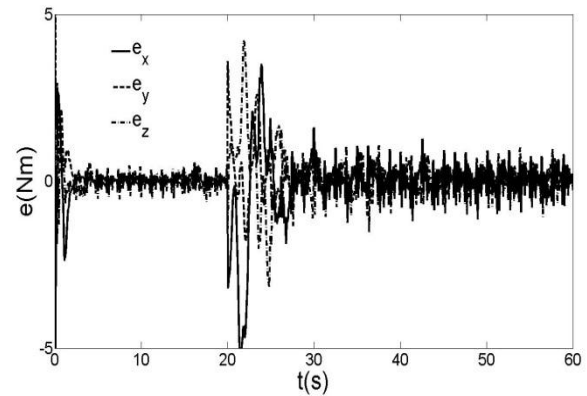
از نتایج شبیه‌سازی‌ها ملاحظه می‌شود که این الگوریتم توانسته است با دقت خوبی پارامترها را قبل و بعد از تغییر، ردگیری نماید. در جدول ۲ مقایسه مقادیر تخمینی و مقادیر واقعی، قبل از تغییر پارامترها و همچنین در انتهای شبیه‌سازی آورده شده است.

جدول (۲): جدول مقایسه مقادیر واقعی با مقادیر تخمینی.

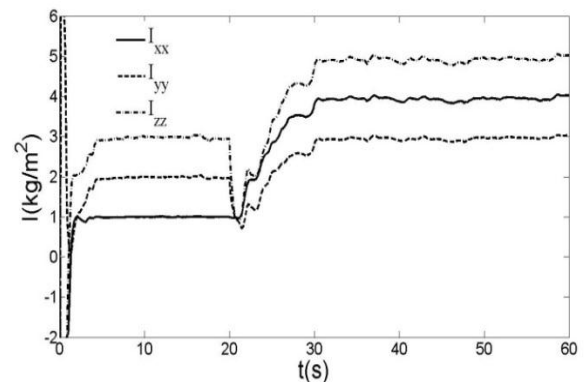
پس از تغییر پارامتر (kgm^2)		قبل از تغییر پارامتر (kgm^2)				
خطا %	تخمینی	واقعی	خطا %	تخمینی	واقعی	
۳	۳/۸۷۰۷	۴	۱/۱	۰/۹۸۸۶	۱	I_{xx}
۰/۶	۲/۹۸۲۶	۳	۰/۳۰	۲/۰۰۵	۲	I_{yy}
۲	۴/۹۰۰۳	۵	۱/۲۰	۲/۹۶۳۱	۳	I_{zz}
۱	۰/۹۸۹۲	۱	-	-۰/۰۰۱۴	۰	I_{xy}
-	-۰/۰۶۳۸	۰	-	-۰/۰۰۳۲	۰	I_{xz}
-	-۰/۰۱۲۹	۰	-	-۰/۰۰۵۳	۰	I_{yz}
۰/۸	۰/۵۰۴۳	۰/۵	۱۳/۶	۰/۴۳۲۱	۰/۵	mgr_x
۷	۰/۹۲۹۶	۱	۴/۸	۰/۵۲۴۲	۰/۵	mgr_y
۶/۴	۱/۵۹۵۸	۱/۵	۴/۹	۰/۴۷۵۵	۰/۵	mgr_z

قابل ذکر است که بزرگ‌ترین منشاء خطا در تخمین پارامترها، فیلتر محاسبه شتاب است. هرچه نویز بر روی سنسورهای ژایرو بیش تر باشد، این فیلتر خطای بیشتری خواهد داشت. به دلیل ماهیت جمع شونده این خطا در ماتریس کواریانس و همچنین زوایای اویلر در ماتریس برازشگر، دقت اندازه‌گیری به

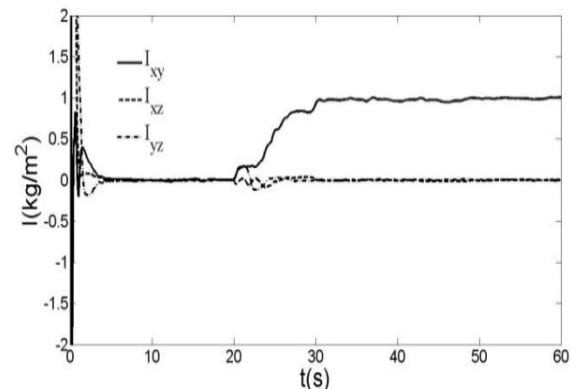
شکل ۷ نحوه همگرایی پارامترهای قطری ماتریس ممان اینرسی تخمینی توسط شناساگر و در شکل ۸ نحوه همگرایی پارامترهای ضربی ماتریس ممان اینرسی تخمینی توسط شناساگر مشاهده می‌شوند. همچنین در شکل ۹ نحوه همگرایی پارامترهای mgr قابل مشاهده است.



شکل (۶): نمودار خطای تخمین در شبیه‌ساز بر حسب زمان.



شکل (۷): نمودار پارامترهای قطری تخمینی ممان اینرسی شبیه‌ساز.



شکل (۸): نمودار پارامترهای ضربی تخمینی ممان اینرسی شبیه‌ساز.

6. Desouza, L. "Experimental Parameters Estimation of Satellite Attitude Control Simulator", Journal of Aerospace Engineering, vol. 1, p. 14, 2008.
7. Kim, D. H., Yang, S., Cheon, D. I., Lee, S. and Oh, H. S. "Combined Estimation Method for Inertia Properties of STSAT-3", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 24, pp. 1737-1741, 2010.
8. Chobotov, V. A., "Spacecraft Attitude Dynamics and Control", Reprint ed. 2008, (Orbit, a Foundation Series), Krieger, Malabar, FL, 2008, c1991.
9. Nelles, O., "Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models", Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg 2001.
10. H.K. Khalil, "Nonlinear Systems", 3rd ed, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 2002.
11. Åström, K.J. and Wittenmark, B. "Adaptive control", 2nd ed, Dover Publications, Mineola N.Y, 2008.

۱۰- پیوست

اثبات قضیه ارائه شده در بخش ۲-۶ ارائه خواهد شد.

تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید.

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta}. \quad (64)$$

با مشتق گرفتن از تابع لیاپانوف:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta}. \quad (65)$$

با توجه به قانون تطبیق ارائه شده در معادله (۵۳) داریم:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} (P \phi' e_s + u) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta}. \quad (66)$$

با توجه به معادله (۴۴) مشخص است که:

$$P^{-1} = P^{-1} \dot{P} P^{-1}. \quad (67)$$

با جایگذاری معادله (۵۳) داریم:

$$P^{-1} = \phi' \phi'^T. \quad (68)$$

با جایگذاری معادله (۶۸) در معادله (۶۶) داریم:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} (P \phi' e_s + u) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T \phi' \phi'^T \tilde{\theta}. \quad (69)$$

در نتیجه:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T \phi' e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1} u + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T \phi' \phi'^T \tilde{\theta}. \quad (70)$$

با استفاده از معادله (۴۹) به دست می‌آید:

شدت افت خواهد کرد. یکی از کارهای قابل انجام، استفاده از مشاهده‌گرهای تطبیقی برای محاسبه شتاب جسم است که در کارهای بعدی ارائه خواهد شد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی مقاوم در برابر نویز، بر پایه روش حداقل مربعات بازگشتی برای شناسایی مؤلفه‌های ماتریس ممان اینرسی و مرکز جرم با استفاده از شبیه‌ساز ماهواره یاتاقان هوایی چرخ واکنشی ارائه و پایداری آن اثبات شد. این روش توانست پارامترهای ممان اینرسی را با خطایی کم تر از ۳ درصد و پارامترهای مرکز جرم را با خطایی کم تر از ۱۴ درصد، قبل و بعد از تغییر پارامترها، تعقیب کند. دلیل بالاتر بودن خطا در پارامترهای مرکز جرم، وابستگی آن به تخمین زوایای اوپلر است که خطا را بالاتر می‌برد. با افزایش مقدار نویز، به دلیل مشکل بودن تخمین شتاب، خطا در محاسبات بالا خواهد رفت. برای رفع این مشکل، در کارهای آتی نسبت به طراحی یک شناساگر تطبیقی و یا استفاده از غنی‌ساز داده‌ها با استفاده از سنسورهای کمکی اقدام خواهد شد.

۹- مراجع

1. Schwartz, J.L., and Christopher, D.H. "Comparison of System Identification Techniques for a Spherical Air-Bearing Spacecraft Simulator", Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 116, No. 03-611, pp. 1725-1741, 2004.
2. Schwartz, J.L., and Hall, C.D. "System Identification of a Spherical Air-bearing Spacecraft Simulator", Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 119, No. 4-122, pp. 333-350, 2005.
3. VanDyke, M.C., Schwartz, J.L. and Hall, C.D. "Unscented Kalman Filtering for Spacecraft Attitude State and Parameter Estimation", Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 119, No. 04-115, pp. 217-228, 2005.
4. Keim, J.A., Behçet Açıkmeşe, A. and Shields, J.F. "Spacecraft Inertia Estimation Via Constrained Least Squares", in Aerospace Conference, Big Sky, MT, 2006.
5. Kutlu, A., Hacıyev, C. and Tekinalp, O. "Attitude Determination and Rotational Motion Parameters Identification of a LEO Satellite Through Magnetometer and Sun Sensor Data", in Recent Advances in Space Technologies, Istanbul, pp. 458-461, 2007.

بنابراین:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta. \quad (۷۹)$$

با جایگذاری معادله (۵۶) که در شروط قضیه ذکر شد داریم:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T u_0 + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta. \quad (۸۰)$$

با استفاده از معادله (۴۲) به دست می‌آید:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e_s^T e_s - \tilde{\theta}^T u_0 + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta + \theta^T u_0. \quad (۸۱)$$

با توجه به فرضیات (۵۴) و (۵۵) و همچنین تعریف γ در معادله (۵۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta &= \frac{1}{2}(\theta^T \sigma)(\theta^T \sigma)^T = \\ \frac{1}{2}\|\theta^T \sigma\|^2 &< \frac{1}{2}(\beta\zeta)^2 < \gamma. \end{aligned} \quad (۸۲)$$

همچنین اگر u_0 به نحوی انتخاب شود که معادله (۵۷) ارائه شده در فرضیات اغنا شود. یعنی:

$$u_0^T \hat{\theta} = C\gamma. \quad (۸۳)$$

که در آن، فعلاً C یک پارامتر مجهول است، به دست می‌آید:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e_s^T e_s - C\gamma + \gamma + \theta^T u_0. \quad (۸۴)$$

با توجه به معادله (۸۳)، می‌توان α ای پیدا کرد که،

$$\|u_0\| < \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma). \quad (۸۵)$$

با استفاده از معادله (۸۵) و نامساوی کوشی می‌توان گفت:

$$\theta^T u_0 \leq \|\theta\| \|u_0\| \leq \beta\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma).$$

در نتیجه

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e_s^T e_s + (1-C)\gamma + \beta\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma). \quad (۸۶)$$

واضح است که اگر شرط مطرح شده در فرض معادله (۶۰) مطرح شده در فرضیات برقرار باشد، یعنی متغیر C به نحوی انتخاب شود که،

$$(1-C)\gamma + \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma)\beta = 0. \quad (۸۷)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\theta}^T \phi e_s + \tilde{\theta}^T \sigma e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \\ &\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T (\phi \phi^T + \phi \sigma^T + \sigma \phi^T + \sigma \sigma^T) \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۱)$$

با توجه به معادلات (۵۲) و (۵۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_s^T (e_s + \sigma^T \hat{\theta}) - \tilde{\theta}^T \sigma e_s + \\ &\tilde{\theta}^T P^{-1}u + \frac{1}{2}e_r^T e_r + \tilde{\theta}^T \phi \sigma^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۲)$$

باز هم با استفاده از معادله (۵۲) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \hat{\theta} - e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \\ &\tilde{\theta}^T P^{-1}u + \frac{1}{2}(e_s + \sigma^T \hat{\theta})^T (e_s + \sigma^T \hat{\theta}) + \\ &\tilde{\theta}^T \phi \sigma^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۳)$$

با توجه معادله (۴۲) و معادله (۵۲) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \theta + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \\ &\frac{1}{2}e_s^T e_s + \frac{1}{2}e_s^T \sigma^T \hat{\theta} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma e_s + \\ &\frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} + (e_s + \sigma^T \hat{\theta})^T \sigma^T \tilde{\theta} + \\ &\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۴)$$

با ساده‌سازی:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \theta + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \\ &e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} + e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \\ &\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۵)$$

با استفاده از معادله (۴۲) و ساده‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \\ &\frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} + e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T (\theta - \hat{\theta}) + \\ &\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \sigma \sigma^T (\theta - \hat{\theta}). \end{aligned} \quad (۷۶)$$

با ساده‌سازی مجدد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u - \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} + \\ &\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta - \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} - \\ &\frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (۷۷)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta + \\ &\frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta - \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta. \end{aligned} \quad (۷۸)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e_s^T e_s. \quad (88)$$

این نتیجه طبق قضیه لاسال- یوشیزاوا [۱۰] تضمین می‌کند که خطای تخمینی (e_s) به صفر میل خواهد کرد و باتوجه به تابع لیاپانوف، خطای تخمین پارامترها نیز کراندار باقی خواهد ماند.

با قضیه ارائه شده، روش حداقل مربعات نسبت به نویز برازشگر مقاوم شده است و می‌توان از پایداری مشاهده گر مطمئن بود. البته با استفاده از روش ارائه شده، اثبات صفر شدن خطای پارامترها به آسانی حالت قبل نیست و احتیاج به بررسی‌های بیشتر در کارهای آتی دارد.