

آنالیز مودال پره بالگرد با روش‌های جرم‌های متمرکز و تست تجربی

سیدعلی موسوی^۱، محمد رضا الهامی^۲ و سعید محبوب‌مقدس^۳

دانشگاه جامع امام حسین^(ع)

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۳/۱۹)

چکیده

محدوده‌ی عملکرد مطمئن پره به لحاظ عدم بروز پدیده تشدید در شرایط مختلف کاری روتور با استفاده از روش آنالیز مودال مشخص می‌شود. با توجه به اینکه پره‌های فلزی یا کامپوزیتی بالگردها دارای انعطاف‌پذیری خاصی می‌باشند، که در سرعت‌های مختلف منجر به تغییر شکل این سازه در صفحات مختلف می‌گردد، این تغییر شکل‌ها می‌تواند اثر زیادی بر روی عملکرد آیرودینامیک بالگرد داشته باشد. تحلیل دینامیکی پره‌های بالگرد براساس مشخصات دینامیکی این سازه، در سرعت‌های دورانی مختلف انجام می‌شود و در این مقاله نیز تحلیلی براساس روش‌های جرم‌های متمرکز (روش مایکل‌اشتاد و المان محدود) و تست مودال بر روی سازه روتور انجام شده، که تحلیل المان محدود به دو روش نرم افزاری و تحلیلی صورت گرفته است. تست مودال برای صحت‌گذاری و مقایسه با روش‌های جرم‌های متمرکز در دو حالت استاتیکی و دینامیکی با سرعتی ثابت، بر روی سازه روتور انجام شده است. با مقایسه نتایج حاصل از هر دو روش و پس از اطمینان از وجود تطابق بین نتایج روش‌های جرم‌های متمرکز و نتایج تجربی، تجزیه و تحلیلی مطابق شرایط کاری روتور صورت گرفت و در نهایت دیاگرام کمپل رسم گردید. بر طبق این دیاگرام مشخص شد که هیچ‌گونه مشکل رزونانسی در پره‌ی روتور به‌وجود نیامده است، ضمن اینکه تطابق قابل قبولی بین نتایج عددی و تجربی وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: روتور بالگرد، آنالیز مودال، روش جرم‌های متمرکز، تست مودال، دیاگرام کمپل

Modal Analysis of Helicopter Blades with Lumped Mass Method and Experimental Test

S.A. Mousavi, M.R. Elhami and S. Mahjoub Moghadas

Imam Hossein University

(Received: 15/December/2014; Accepted: 9/June/2015)

ABSTRACT

Modal analysis is done periodically to ensure blades performance for non-occurrence of resonance obtained under various operating conditions. Since metal or composite helicopter blades have a certain flexibility at different speeds in different planes can lead to deformation of the structure that can have a great effect on the aerodynamic performance of the helicopter. In this paper, modal analysis of helicopter blade has been carried out by the lumped mass methods (myklestad and finite element method) and modal test on the rotor structure. The finite element analysis has been developed by two approach of analytical and software method. Modal testing was also performed in both static and dynamic states, with constant speed, to validate the lumped mass methods. Finally, the results of both methods are compared with each other. After ensuring there correspondence between lumped mass methods and experimental results, an analysis was done according to the operating conditions of the rotor and finally Campbell diagram has been generated. According to this diagram became clear there was not any problem with the resonance of the rotor blades, while the numerical result of case has an acceptable match with the experimental results.

Keywords: Helicopter Rotor, Modal Analysis, Lumped Mass Method, Modal Test, Campbell Diagram

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد: amousavi@ihu.ac.ir

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): melhami@ihu.ac.ir

۳- دانشیار: smahjoub@ihu.ac.ir

۱- مقدمه

اهمیت پره‌های روتور در کاربردهای هوایی و تاثیر آن بر عملکرد و کارایی بالگرد باعث شده است که امروزه جهت ساخت پره‌ها تست‌های مختلفی به لحاظ سازه‌ای بر روی آن‌ها صورت گیرد. اگر ارتعاشات پره‌ها با روش‌های مناسب کنترل نشود، باعث اختلال در عملکرد بالگرد، خستگی زودرس قطعات و در نتیجه کاهش عمر سیستم شده و حتی ممکن است باعث شکست پره و سقوط بالگرد شود و از طرفی نیز کاهش ارتعاشات روتور باعث افزایش راحتی خدمه و کنترل پذیری بهتر بالگرد می‌شود.

در بررسی ارتعاشات روتور بالگردها، معمولاً پره‌های آن به عنوان یک تیر دورانی در نظر گرفته می‌شود و معادلات حاکمه بر تیرهای دورانی برای آن‌ها استفاده می‌شود. این تیرها معمولاً به تیرهای یک بعدی اویلر-برنولی یا تیموشینکو که در معرض نیروی محوری گریز از مرکز هستند، ساده می‌شوند. پره‌های روتور بالگرد دارای حرکت خارج از صفحه^۱، یا حرکت داخل صفحه^۲ و پیچشی^۳ بوده که به صورت پریودیک در پاسخ به نیروهای آیرودینامیک و عمل کنترل خلبان به وقوع می‌پیوندد.

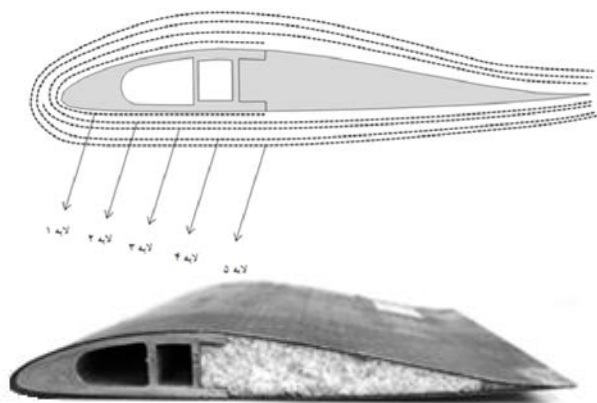
هوبولت و بروکس [۱] اولین کسانی بودند که معادلات دیفرانسیل را برای حرکات خمش طولی، خمش عرضی و پیچش به همراه زاویه پیچشی اولیه به دست آوردند. پره در نظر گرفته شده توسط هوبولت و بروکس به صورت غیر یکنواخت بود. متاسفانه حل تحلیلی و دقیق معادلات فوق تقریباً غیرممکن بود. لذا روش‌های متعددی برای حل تقریبی این معادلات ارائه گردید. هانتز [۲]، وایت و مالتینو [۳] روش ماتریس انتگرالی^۴ را برای حل معادلات فوق ارائه نمودند همچنین مورسی [۴، ۵] علاوه بر روش قبل از روش دیگری به نام انتقال ماتریسی^۵ برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و خصوصیات دینامیکی پره استفاده نمودند. رایت و همکاران [۶] تحلیل دینامیکی تیرهای دوار همگن دارای توزیع جرم و سختی خطی را با استفاده از سری‌های فریبینوس انجام دادند در این روش معادله دیفرانسیل حرکت به طور مجزا در نظر گرفته شده و در جواب معادله به صورت تابعی از سری‌های فریبینوس فرض شده است. شانون و فورشاو [۷] به بررسی ارتعاشات پره‌ها در خارج از صفحه دوران و تشدید آنها پرداخته است و تاثیرات پیچش

پره‌ها را نیز مورد بررسی قرار داده است. ردی [۸] روش‌های گالرکین، رایلی-ریتز و باقیمانده‌های وزنی را برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیرها ارائه نموده و این روش‌ها را مورد مقایسه قرار داده است. ناگولسوران [۹] ارتعاش جانبی یک تیر یکنواخت اویلر-برنولی را بر مبنای حل عمومی معادله‌ی شکل مود و با استفاده از برهم نهی چهار تابع مستقل خطی بررسی کرد. سوریس و همکاران [۱۰] ارتعاشات تیر دارای زاویه پیچش اولیه را به کمک توابع انتگرالی تحلیل کردند.

بازون [۱۱] روابط بین فرکانس‌های طبیعی خارج صفحه و داخل صفحه دوران را بر حسب ضرایب ساوتول^۶ مورد بحث قرار داد و همچنین بازون و همکاران [۱۲] در مقاله‌ای مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر تیموشینکو با سطح مقطع متغیر را با استفاده از روش المان محدود بررسی کرد. هو و شین [۱۳] معادلات حرکت را برای یک تیر دوار در خمش خارج از صفحه و خمش درون صفحه استخراج و بسامدهای آن را محاسبه کردند. میل [۱۴] با استفاده از روش گالرکین به محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی پره‌های بالگرد و همچنین پایداری آن‌ها پرداخته است. برامول [۱۵] به استخراج معادلات دیفرانسیل خارج از صفحه و داخل صفحه پره‌های روتور بالگرد پرداخته و روش‌های انرژی و مایکل اشتاد را برای حل این معادلات ارائه نمود.

لین و همکاران [۱۶] به بررسی پایداری و ارتعاشات آزاد تیر همگن دوار با شرایط مرزی الاستیک و دارای زاویه پیچش اولیه پرداخته همچنین در تحقیق مجزایی [۱۷] به بررسی ارتعاشات آزاد تیر غیرهمگن دارای زاویه پیچش اولیه و جرم متمرکز در انتها پرداخته است و تحلیل دینامیکی جرم متمرکز را همراه با اثر استهلاکی نیز بررسی [۱۸] و تابع گرین را برای این تیر به دست آورده است. نیومن [۱۹] به موضوع منابع بار روتور، که عامل اصلی ایجاد ارتعاشات در بالگرد می‌باشد پرداختند و اثر نیروی انتقالی از روتور به بدنه را مورد بررسی قرار داده است. رانو [۲۰] به روش‌های تقریبی محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها برای سیستم‌های پیوسته پرداخته و همچنین روش المان محدود را برای سیستم‌های پیوسته ارائه نموده است. تامسون و ماریدیلون [۲۱] به مباحث پایه‌ای ارتعاشات و کاربردهای آن پرداخته و روش المان محدود را برای سیستم‌های پیوسته ارائه نموده است. پانکو و کندی [۲۲] برای اولین بار آنالیز مودالی را بر روی سازه هواپیما به جهت استخراج فرکانس طبیعی و سطح استهلاک انجام داده‌اند.

1- Flapwise
2- Lagwise
3-Torsional
4 -IMM
5 -TMM



شکل (۲): لایه چینی پره.

جدول (۱): مشخصات مکانیکی پره.

نوع مشخصه مواد	فوم	آلومینیوم ۲۰۲۴	آلومینیوم ۶۱۰۶	گرافیت اپوکسی	شیشه اپوکسی
$\rho (Kg/m^3)$	۱۰۰	۲۷۶۸	۲۷۸۰	۱۷۸۰	۱۷۴۰
$E_1 (GPa)$	۲	۷۲/۷۰	۷۲/۴	۳۰	۱۵
$E_2 (GPa)$	-	-	-	۳۰	۱۵
$G_{12} (GPa)$	-	-	-	۵	۴/۵
ν	۰/۳	۰/۳	۰/۳	۰/۱	۰/۹۷
$G_{13} (GPa)$	-	-	-	۵	۴/۵
$G_{23} (GPa)$	-	-	-	۵	۴/۵

۳- روش های جرم های متمرکز

در این روش ها سازه‌ی تحت بررسی به المان هایی کوچک تر و مجزا از هم تقسیم بندی شده و در این راستا معادلات حاکم بر یک المان به دست می آید و در نهایت به کل سیستم تعمیم داده می شود. روش هایی که در این قسمت مورد بحث قرار می گیرد دو روش مایکل اشتاد و المان محدود می باشد.

۳-۱- روش مایکل اشتاد

در این روش تیر دوار مطابق شکل ۳ به چندین المان تقسیم شده و خاصیت سختی هر المان توسط یک المان تیر بدون جرم با سختی معادل، و جرم آن نیز توسط یک جرم متمرکز که در انتهای المان تیر قرار دارد در نظر گرفته می شود. این روش در گذشته برای محاسبه ی فرکانس های طبیعی و شکل مودهای پره های بالگرد مرسوم بوده است [۱۵]. با اعمال معادلات تعادل برای حالت تیر بدون جرم خواهیم داشت:



شکل (۱): شکل هندسی پره روتور.

هولمن [۲۳] در مقاله ای روش ترسیم دیاگرام کمپل را در آنالیز مودال ارائه نمود. فرانسیس و همکاران [۲۴] به ارائه روش های محاسبه فرکانس های طبیعی و شکل مودها برای تیرهای دوار پرداختند. راتو و گوپتا [۲۵] روش المان محدود را برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی و شکل مودهای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به کار بردند. راوتانی و دوکانیش [۲۶] به بررسی پایداری و ارتعاشات صفحات دورانی و همچنین تاثیر نیروی گریز از مرکز در سفتی آن پرداخت و معادلات المان محدود را برای آن استخراج نمود. هوا [۲۷] با استفاده از این معادلات به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای دورانی دارای جرم متمرکز و تاثیر نیروی گریز از مرکز، به روش اجزای محدود پرداخت. بایلاوا [۲۸] یک بازنگری کلی بر روش های محاسبه ارتعاشات تیرهای دورانی از قبیل روش مایکل اشتاد، گالرکین، ریلی ریتز و روش المان محدود انجام داد.

در مقاله حاضر، ضمن مطالعه روتور یک بالگرد به عنوان یک تیر دورانی، کارایی روش جرم های متمرکز و دقت این روش در مطالعه این نوع تیرها بررسی می شود و همچنین با انجام آزمایش مودال، نتایج تجربی برای روتورهای با دو پره یکنواخت ارائه شده که می تواند به عنوان مرجعی در سایر مطالعات در این زمینه باشد. در ادامه با استفاده از فرکانس های طبیعی روتور که از آزمایش و حل عددی به دست آمده دیاگرام کمپل (تشدید) روتور مورد مطالعه ترسیم و نقاط رزونانسی در دور کاری این روتور مشخص می گردد.

۲- تعریف مسئله

پره روتور موجود که در شکل ۱ نشان داده شده است، ۳/۸۷ متر طول دارد و هاب اتصال دهنده آن دارای طول ۰/۵ متر می باشد که طول تماس آن با پره روتور که به وسیله ی سه پیچ محکم می شود ۰/۲۳ متر می باشد. جنس هاب از آلومینیوم ۲۰۲۴ و ایرفویل پره که از نوع NACA 8h12 است دارای یک هسته (اسپار) از جنس آلومینیوم T-۶ ۶۱۰۶ و فوم می باشد که مطابق شکل ۲ توسط پنج لایه کامپوزیتی به صورت متقارن از زیر و رو این هسته را احاطه کرده اند. جنس لایه ها از مواد شیشه اپوکسی و گرافیت اپوکسی است که مشخصات این مواد در جدول ۱ آمده است.

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\omega^2 m L^3}{6EI}\right) & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ -\frac{\omega^2 m L^2}{2EI} & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ \omega^2 m \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) F & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R \quad (V)$$

با نوشتن ماتریس انتقال برای کل تیر و اعمال شرایط مرزی، فرکانس‌های طبیعی تیر را می‌توان محاسبه نمود. از مزایای این روش می‌توان به اعمال شرایط مرزی در حالات مختلف تیر و سرعت محاسباتی بالای آن نام برد که در جدول ۲ شرایط مرزی حالات مختلف تیر ارائه گردیده است و همچنین در این روش، الزامی به یکسان بودن المان‌ها وجود ندارد.

جدول (۲): نوع شرایط مرزی تیر

نوع تیر	Y	Φ	M	V
یک سر گیردار	0	0	-	-
یک سر لولا	0	-	0	-
آزاد	-	-	0	0

۳-۲- روش اجزاء محدود دینامیکی

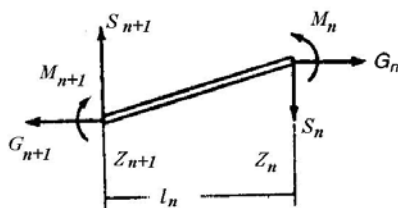
روش اجزای محدود، یک روش عددی است که برای حل دقیق مسائل پیچیده ارتعاشات به کار می‌رود [۲۰، ۲۹]. در این روش سازه‌ی تحت بررسی با چند المان اجزاء محدود جایگزین شده و دو فرض زیر، در نظر گرفته می‌شود:

۱- هر المان مانند یک عضو پیوسته رفتار می‌کند و

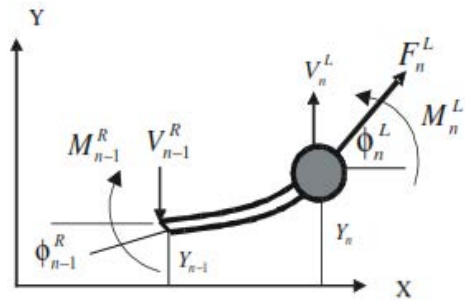
۲- المان‌ها در نقاط مفصل (گره) به هم متصل شده‌اند.

معمولاً تحلیل دقیق سازه‌ها تحت بارهای وارده بسیار مشکل است. لذا برای هر المان محدود، از یک حل تقریبی مناسب استفاده می‌شود. با کاهش اندازه‌ی المان‌ها و تحلیل آن‌ها، حل دقیق کل سازه به دست می‌آید.

در روش المان محدود، تعادل نیروها در گره‌ها، و سازگاری تغییر مکان‌ها در بین المان‌ها نیز در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۴ نیروها و گشتاورهای وارده بر روی یک المان پره نشان داده شده است که S نیروی برشی، M گشتاور خمشی، G نیروی گریز از مرکز و Z جابه‌جایی عرضی المان می‌باشد.



شکل (۴): نیروهای وارده بر یک المان اجزاء محدود پره.



شکل (۳): المان آزاد تیر.

$$Y_n^L - Y_{n-1}^R = L_n \Phi_{n-1}^R + \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n M_n^L + \left(\frac{L^3}{3EI}\right)_n V_n^L - \left(\frac{L^3}{3EI}\right)_n F_n^L \Phi_n^L \quad (1)$$

$$\Phi_{n-1}^R = Y_n^L - \left[L_n + \left(\frac{L^2}{6EI}\right)_n F_n^L \right] \Phi_n^L - \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n M_n^L + \left(\frac{L^3}{6EI}\right)_n V_n^L \quad (2)$$

$$M_{n-1}^R = - \left[L_n + \left(\frac{L^3}{6EI}\right)_n F_n^L \right] F_n^L \Phi_n^L + \left[1 + \left(\frac{L^2}{2EI}\right)_n F_n^L \right] M_n^L + \left(\frac{L^3}{6EI}\right)_n V_n^L \quad (3)$$

$$V_{n-1}^R = V_n^L \quad (4)$$

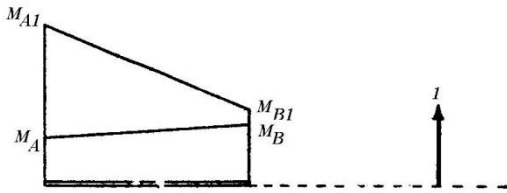
در معادلات فوق V نیروی برشی، M گشتاور خمشی، Φ شیب تیر و Y جابه‌جایی عرضی تیر می‌باشد. شکل ماتریسی معادلات (۱) تا (۴) که ماتریس انتقال تیر بدون جرم نام دارد به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R = \begin{bmatrix} 1 & -\left(L + \frac{3L^3}{6EI}\right) & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) F & 1 + \frac{FL^2}{2EI} & \left(L + \frac{FL^3}{6EI}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L \quad (5)$$

به همین ترتیب برای جرم متمرکز معادلات تعادل نوشته می‌شود که ماتریس انتقال جرم متمرکز نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R \quad (6)$$

اکنون با ترکیب دو معادله‌ی انتقال (۵) و (۶) ماتریس انتقال برای یک المان تیر دورانی به صورت زیر به دست می‌آید:



شکل (۵): گشتاور ایجاد شده به سبب بار واحد.

$$\delta_{AB} = \int_{AB} \frac{M M_1}{EI} dr = \begin{bmatrix} M_{A1} & M_{B1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \quad (14)$$

در نتیجه تغییر شکل ناشی از توزیع گشتاور مجموعه المان های $M_{A1}, M_{B1}, \dots, M_{N1}, \dots$ و $M_A, M_B, \dots, M_N, \dots$ خواهد شد:

$$\delta = \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ \vdots \\ M_{N1} \\ \vdots \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & 0 & \dots \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & \dots \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ \vdots \\ M_N \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (15)$$

برای تعیین تغییر شکل پره به تغییر شکل انتهای المان ها نیاز می باشد که در نتیجه منجر به تکرار محاسبات بالا برای هر المان می گردد. با توجه به توزیع گشتاور خمشی ناشی از اعمال بار واحد در هر المان، با انجام این محاسبات، ماتریس سطری $[M_{A1}, M_{B1}, \dots]$ به یک ماتریس مربعی M_1 تبدیل می شود. ستون های این ماتریس بیانگر توزیع گشتاور خمشی ناشی از هر کدام از بارهای واحد اعمال شده می باشند. ماتریس ضرایب در رابطه (۱۵) ماتریس انعطاف پذیری نامیده می شود و بعد از این با f مشخص می گردد و دستگاه معادلات کلی تغییر شکل پره به صورت رابطه (۱۶) بیان می شود:

$$Z_E = M_1^T f M \quad (16)$$

که، Z_E ماتریس مقادیر δ می باشد. با حذف M بین معادلات (۱۰) و (۱۶) معادله (۱۷) به دست می آید.

$$Z_E = \omega^2 a^* (Z_E + Z_R) + \Omega^2 b^* (Z_E + Z_R) \quad (17)$$

که در این معادله، ماتریس های a^* و b^* ماتریس های به دست آمده از جمع و ضرب ماتریس های قبلی هستند. با مرتب نمودن رابطه (۱۷)، معادله زیر به دست می آید:

$$(I - \Omega^2 b^*) Z_E = \omega^2 a^* (Z_E + Z_R) + \Omega^2 b^* Z_R \quad (18)$$

که، منجر به عبارت زیر برای Z_E خواهد شد:

$$Z_E = \omega^2 [I - \Omega^2 b^*]^{-1} a^* (Z_E + Z_R) + \Omega^2 [I - \Omega^2 b^*]^{-1} b^* Z_R \quad (19)$$

در این روش معادله ی تعادل نیروها و گشتاورهای وارد بر المان پره به صورت زیر به دست می آید:

$$G_{n+1} = G_n + \int_{r_{n+1}}^{r_n} \Omega^2 m r dr = G_n + \frac{1}{2} m \Omega^2 (r_n^2 - r_{n+1}^2) \quad (8)$$

$$S_{n+1} = S_n + \int_{r_{n+1}}^{r_n} \omega^2 Z m dr = S_n - \frac{1}{2} m \omega^2 I_n (Z_n^2 + Z_{n+1}^2) \quad (9)$$

$$M_{n+1} = M_n - G_n (Z_n - Z_{n+1}) - S_n I_n + \int_{r_{n+1}}^{r_n} (r - r_{n+1}) \omega^2 m Z dr - \int_{r_{n+1}}^{r_n} (Z_n - Z_{n+1}) \Omega^2 m r dr \quad (10)$$

با توجه به این معادلات می توان گشتاورهای خمشی M_0, M_1, \dots, M_n را در طول پره به صورت ماتریسی معادله (۱۱) نوشت بنابراین:

$$M = \omega^2 a Z + \Omega^2 b Z \quad (11)$$

که در این معادله، a و b ماتریس های مربعی هستند و توابع r, m, Z ماتریس های ستونی می باشند. حرکت پره بصورت دو جزء فرض می شود:

$$Z = Z_E + Z_R \quad (12)$$

که، Z_E تغییر شکل الاستیک (خمش) پره است و جابجایی صلب پره حول لولای حرکت خارج از صفحه است. چنانچه لولای حرکت خارج از صفحه وجود نداشته باشد $Z_R = 0$ است. به منظور به دست آوردن رابطه ای جهت بیان تغییر مکان پره بصورت تابعی از توزیع گشتاورهای اعمال شده، از روش بار واحد استفاده می شود. مطابق این روش اگر M_1 توزیع گشتاور خمشی ناشی از بار واحد در نقطه ای از پره باشد که تغییر مکان آن مورد نظر است و M بیانگر توزیع گشتاور واقعی باشد، تغییر مکان δ به صورت معادله ی (۱۳) به دست می آید.

$$\delta = \int_0^R \frac{M M_1}{EI} dr \quad (13)$$

اکنون، سهم المان در تغییر مکان بررسی می شود. چنانچه فرض گردد مطابق شکل ۵، M_A و M_B گشتاورهای انتهای المان ناشی از بار اعمالی باشند و M_{A1} و M_{B1} گشتاورهای ناشی از اعمال بار واحد باشند، آنگاه با فرض تغییرات خطی گشتاورهای خمشی در طول المان l ، سهم δ_{AB} در تغییر مکان را می توان به صورت معادله ی (۱۴) بیان نمود.

و یا:

$$Z_E = \omega^2 c (Z_E + Z_R) + \Omega^2 d Z_R \quad (20)$$

که، c و d ماتریس‌های مربعی هستند. چنانچه پره فاقد لولای حرکت خارج از صفحه باشد $Z_R = 0$ رابطه نهایی زیر برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی پره به دست می‌آید:

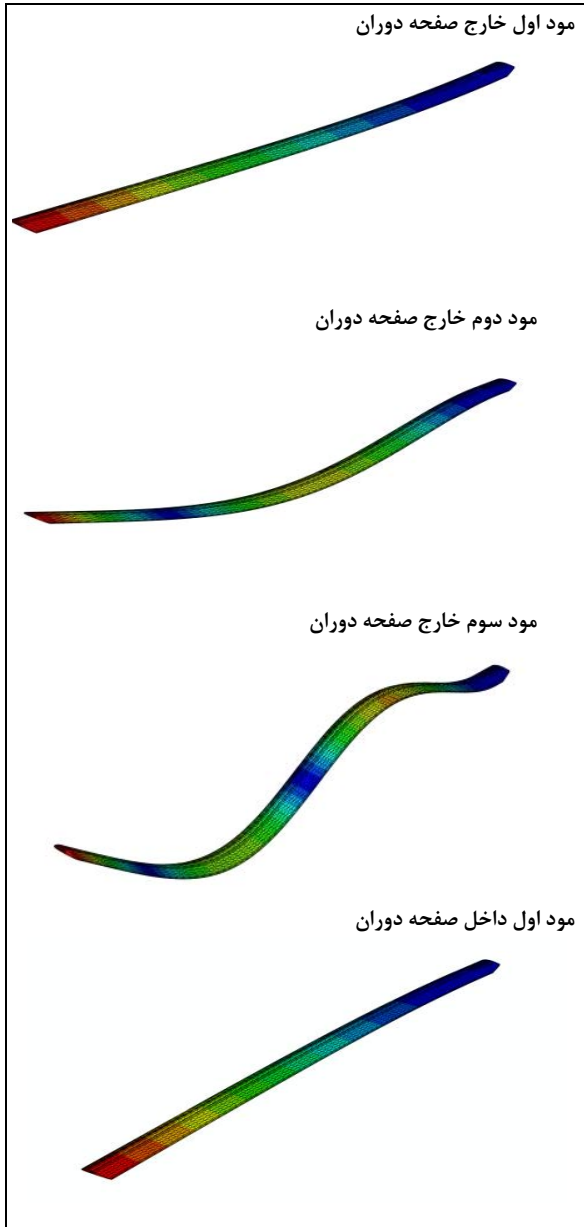
$$Z_E = \omega^2 c Z_E \Rightarrow (c - I / \omega^2) Z_E = 0 \quad (21)$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه معادله (۲۱) بیانگر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای پره‌ی روتور خواهد بود.

کد این برنامه به زبان فرترن^۱ نوشته شده است که در دو حالت بدون سرعت دورانی و سرعت دورانی ۲۰۰ دور بر دقیقه با نتایج تجربی و نرم‌افزاری مورد مقایسه قرار گرفته است.

۴- مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس

با توجه به قسمت قبل جهت ارزیابی نتایج، مدل‌سازی پره در نرم‌افزار آباکوس نیز انجام گرفته تا دقت روش المان محدود نرم‌افزار آباکوس نیز مورد ارزیابی قرار گیرد. در مدل‌سازی المان محدود سازه در نرم‌افزار آباکوس^۲ تمام اجزا و اندازه‌های مدل المان محدود، کاملاً مطابق با مدل واقعی است با توجه به این که پره به صورت مستقیم و به وسیله‌ی پیچ، کامل به هاب متصل می‌گردد اتصال در نظر گرفته شده برای این قسمت به صورت صلب فرض شد و همچنین بارگذاری اعمالی به پره برای این مسئله که حاصل از دو نیروی جاذبه و گریز از مرکز می‌باشد به طور کامل در مدل نرم‌افزاری دیده شده است. سرعت در نظر گرفته شده نیز در محدوده کاری روتور مورد نظر یعنی ۰ تا ۵۰۰ دور بر دقیقه می‌باشد که نتایج آن استخراج شده است. مش‌بندی‌ها نیز به صورت منظم بوده و از دو نوع المان استفاده گردیده است به این صورت که در بخش‌های فوم و اسپار از المان ۴ وجهی ۱۰ گره‌ای مرتبه ۲ و در پوسته خارجی پره از المان مرتبه ۱ مثلثی ۳ گره‌ای استفاده شده است و نوع تحلیل انجام شده به دلیل وجود ترم نیروی گریز از مرکز (تحلیل نرم افزاری) به صورت غیرخطی می‌باشد. در نهایت نتایج حاصله در دیاگرام کمپل^۳ ترسیم می‌شوند و همچنین مدل موجود در دو حالت استاتیکی و دینامیکی با سرعت ۲۰۰ دور بر دقیقه با نتایج تست‌های تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است و شکل مودهای آن در محدودی ۵۰ هرتز در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل (۶): شکل مودهای پره‌ی روتور.

لازم به ذکر است که، نتایج حاصل از این تحلیل، از نظر همگرایی نیز مورد بررسی قرار گرفته و با کوچکتر شدن المان‌ها، نتایج به دست آمده همگرا شده‌اند.

۵- تست تجربی

در حالت کلی شکل مودهای به وجود آمده در یک پره‌ی روتور به صورت حرکت خارج از صفحه یا داخل صفحه دوران می‌باشد. هدف از انجام این تحلیل، تعیین فرکانس‌های طبیعی سازه و به دست آوردن مودهای آن می‌باشد. برای اعتبارسنجی کارهای انجام شده دو نوع تست جهت بررسی فرکانس‌های ارتعاشی

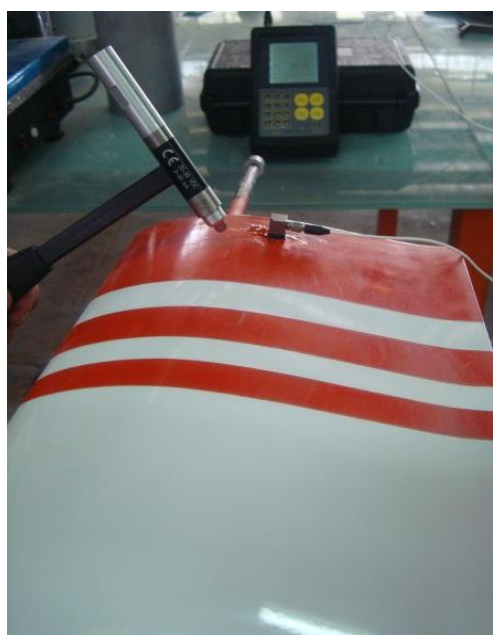
1-FORTRAN
2-ABAQUS
3-Campbell

جدول (۳): مقایسه فرکانس های طبیعی در حالت استاتیکی پره.

شرح فرکانس	مود اول خارج از صفحه	مود اول داخل صفحه	مود دوم خارج از صفحه	مود سوم خارج از صفحه
فرکانس تجربی	۱/۷۱۶	۷/۷۳۱	۱۰/۷۷۲	۳۰/۱۵۲
نرم افزار آباکوس	۱/۶۸۲	۷/۹۲۶	۱۰/۵۳۲	۲۹/۴۲۴
درصد خطا	۱/۹۳	۲/۵۳	۲/۲۲	۲/۴۱
کد مایکل اشتاد	۱/۶۵۵	۷/۹۷۵	۱۰/۳۶۹	۲۹/۰۳۳
درصد خطا	۳/۵۳	۳/۱۶	۳/۷۳	۳/۷۱
کد المان محدود	۱/۶۵۷	۷/۹۴۸	۱۰/۳۸۵	۲۹/۰۷۸
درصد خطا	۳/۴۳	۲/۸۱	۳/۵۹	۳/۵۶



شکل (۷): اتصال روتور به تکیه گاه صلب.

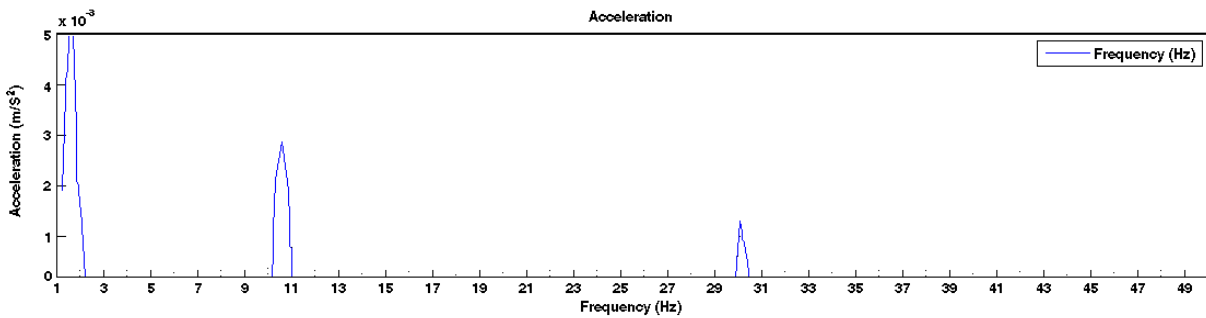


شکل (۸): تحریک روتور به وسیله چکش.

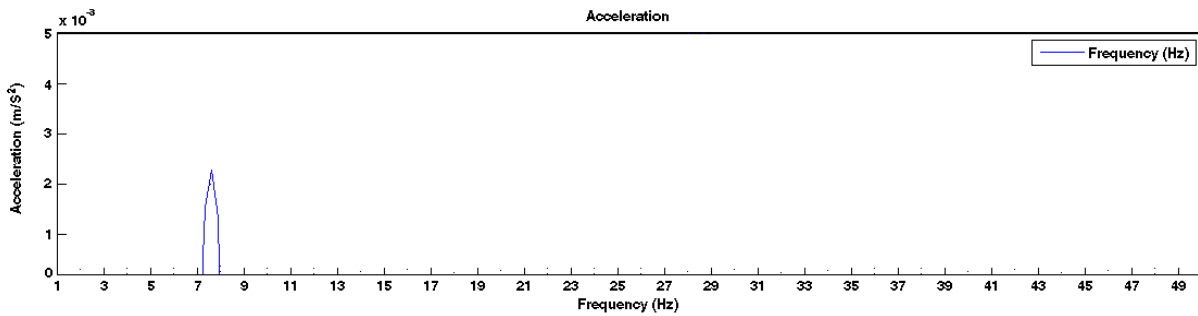
روتور انجام گرفته که در نتیجهی آن فرکانس های طبیعی روتور در حالت استاتیکی و دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است که نحوهی انجام این آزمایشات در ادامه توضیح داده می شود.

۵-۱- تست استاتیکی (پره ثابت)

در این تست مدل واقعی روتور تحت شرایط گیردار مورد آزمایش مودال قرار گرفته و فرکانس های طبیعی آن استخراج شده است. برای انجام این آزمایش پره روتور به همراه لاگ اصلی آن مطابق شکل ۷ مستقیماً به تکیه گاه صلب اتصال یافته است. در این شرایط مطابق شکل ۸ با اعمال تحریک ضربه ای توسط چکش، سازه ارتعاش کرده و دو سنسور شتاب سنج نصب شده، در قسمت نوک پره (که در طول و عرض پره نصب شده اند) مقادیر شتاب را در مدت زمان ارتعاش ثبت می نمایند. در نهایت اطلاعاتی که در طول آزمایش از سنسورهای به دست می آید به وسیله دستگاه تحلیلگر ثبت و مورد پردازش قرار می گیرد و در ضمن دستگاه تحلیلگر ارتعاشات مورد استفاده در این آزمایش از محصولات شرکت کوهتکت مدل C911 می باشد که دارای دو کانال ورودی برای سنسورهای شتاب سنج است. ارتباط این دستگاه به کمک نرم افزار ConSpect و از طریق رایانه شخصی امکان پذیر می باشد. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه توضیحات بیشتر در قالب این مقاله نمی گنجد جهت کسب اطلاعات بیشتر، در مورد چگونگی تست و آنالیز مودال پره بالگرد می توان به [۳۰، ۳۱] مراجع مراجعه نمود. شکل های ۹ و ۱۰ فرکانس های طبیعی حاصل از تست تجربی در دو موقعیت خارج و داخل صفحه دوران نشان داده شده است. در جدول ۳ نتایج حاصل از کد المان محدود و مایکل اشتاد به زبان فرتن و نرم افزار آباکوس با نتایج به دست آمده از این تست در حالت استاتیکی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می دهد که، نتایج المان محدود نرم افزار آباکوس دقت قابل قبولی را دارا می باشد و دلیل آن استفاده از جزئیات بیشتر و نوع المان های آن می باشد.



شکل (۹): فرکانس‌های طبیعی خارج از صفحه دوران در حالت استاتیکی.



شکل (۱۰): فرکانس طبیعی داخل صفحه دوران در حالت استاتیکی.



شکل (۱۱): نمای کلی سازه روتور و استند.

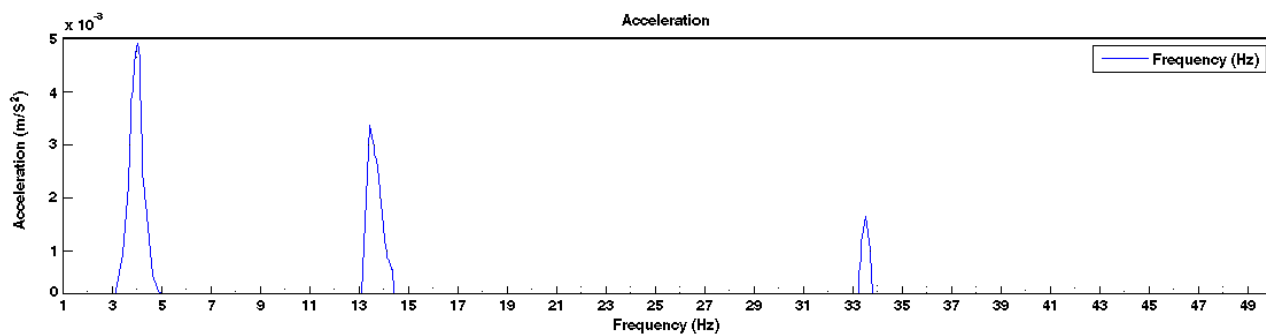
۲-۵- تست دینامیکی (پره دوار)

مدل واقعی که در قسمت قبل مشخصات آن ذکر شد به دلیل عدم امکان مهار سیستم و ملاحظات ایمنی، در سرعت دورانی ۲۰۰ دور بر دقیقه مورد تست قرار گرفت. جهت داشتن شرایطی قابل کنترل و یکسان در تست، مطابق شکل ۱۱ از یک استند و یک موتور الکتریکی که نیروی گرداننده‌ی روتورها را تأمین می‌نماید استفاده گردید. لازم به ذکر است که دور موتور به وسیله‌ی یک اینورتر^۱ کنترل شده و در تمام طول مدت نمونه‌برداری به صورت ثابت نگاه داشته می‌شود و همچنین تست یکبار بدون پره‌های روتور انجام گردیده که فرکانس‌های موتور و دیگر اجزا شناسایی گردد. با توجه به اینکه ارتعاشات در دو راستای شعاعی و محوری روتور می‌باشد. دو سنسور شتاب سنج در این دو راستا قرار داده شده است و ارتعاشات ناشی از گردش روتور مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. شکل‌های ۱۲ و ۱۳ فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از تست تجربی را نشان داده شده است. در این تست نیز نتایج حاصل از کد المان محدود و مایکل اشتاد به زبان فترن و نرم افزار آباکوس با نتایج به دست آمده از تست در حالت دینامیکی با سرعت ۲۰۰ دور بر دقیقه در جدول ۴ مورد مقایسه قرار گرفته است که با توجه به نتایج، نتایج حاصل از تست نتایج المان محدود آباکوس دارای دقت قابل قبولی می‌باشد.

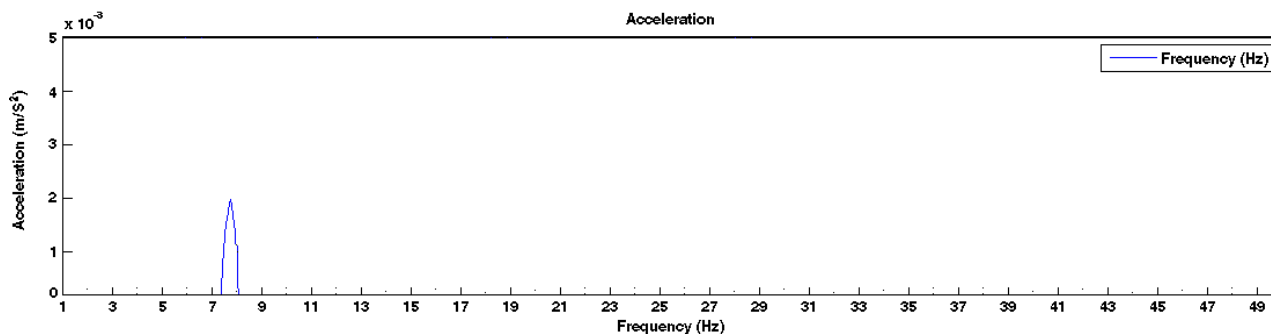
جدول (۴): مقایسه فرکانس‌های طبیعی در دور ۲۰۰ رادیان بر ثانیه (حالت دینامیکی).

شرح فرکانس	مود اول خارج از صفحه	مود اول داخل صفحه	مود دوم خارج از صفحه	مود سوم خارج از صفحه
فرکانس تجربی	۴/۰۶۸	۷/۸۶۰	۱۳/۳۷۲	۳۳/۵۵۸
نرم افزار آباکوس	۳/۹۵۸	۸/۱۷۳	۱۳/۳۳۹	۳۲/۶۰۱
درصد خطا	۲/۷	۳/۹۹	۰/۲	۲/۸۵
کد مایکل اشتاد	۴/۲۲۹	۸/۲۲۴	۱۳/۸۸۸	۳۲/۸۶۸
درصد خطا	۳/۹۷	۴/۶۳	۳/۸۶	۲/۰۵
کد المان محدود	۳/۹۷۵	۸/۳۳۴	۱۳/۶۰۷	۳۲/۳۰۴
درصد خطا	۲/۲۶	۶/۰۴	۱/۷۶	۳/۷۳

1 -Invertor



شکل (۱۲): فرکانس های طبیعی خارج از صفحه دوران در سرعت ۲۰۰ دور بر دقیقه.



شکل (۱۳): فرکانس طبیعی داخل صفحه دوران در سرعت ۲۰۰ دور بر دقیقه.

طبیعی پره در دور کاری آن، باید یا محدوده دور کاری پره اصلاح شود و یا اینکه پره از نظر ساختار بهینه گردد. محدوده کاری این روتور بین سرعت ۴۰۰ تا ۴۵۰ دور بر دقیقه می باشد که همان طور که مشاهده می شود در این محدوده کاری، تداخل بین فرکانس های تحریک و فرکانس های طبیعی به دست آمده از پره روتور مشاهده نگردید بنابراین در این محدوده کاری مشکل رزونانسی برای پره به وجود نمی آید.

۷- نتیجه گیری

با توجه به نتایج عددی و تجربی به دست آمده در جداول ۳ و ۴، مشخص شد که نتایج عددی المان محدود آباکوس، تطابق خوبی با تست تجربی دارد و خطایی کمتر از ۴ درصد را دارا می باشد. لذا به دلیل آن که روش های تجربی وقت گیر و پرهزینه می باشند، استفاده از تکنیک المان محدود نرم افزاری مناسب ترین روش جهت تحلیل مودال پره های روتور از جهت درصد خطا می باشد.

از طرفی فرمول های تحلیلی روش های جرم های متمرکز نیز، با توجه به دشواری و وقت گیر بودن مدل سازی در نرم افزارها، با وجود دقت جواب کمتر نسبت به روش نرم افزاری (اختلاف خطای ناچیز) روش های مقرون به صرفه و مناسبی می باشند.

با توجه به آنالیز مودال تجربی در سرعت ۲۰۰ (به دلیل محدودیت های ایمنی) و تطابق خوب نتایج تجربی و تحلیلی

۶- استخراج دیاگرام کمپل

جهت بررسی احتمال پدیده رزونانس در پره های روتور از دیاگرام کمپل استفاده می شود. در این دیاگرام مودهای مختلف فرکانس های طبیعی پره که از روش آزمایشگاهی یا شبیه سازی (روش های جرم های متمرکز) به دست آمده همراه فرکانس تشدید پره در مقابل هم رسم می شوند و احتمال بروز پدیده تشدید در مودهای مختلف در نزدیکی ضرایب صحیحی از ضرایب فرکانس دورانی پره ها مورد بررسی قرار می گیرد. دلیل این امر آن است که فرکانس های تحریک (هارمونیک های تحریک) به صورت ضرایب صحیح فرکانس دورانی پره می توانند ظاهر گردند و از طرفی تنها ارتعاشات ضرایب صحیح تعداد پره ها از این هارمونیک ها عبور می نمایند [۴، ۵] که با توجه به اینکه بالگرد مورد تحقیق دارای دو پره است تنها هارمونیک های زوج مهم می باشند.

مطابق شکل ۱۴ دیاگرام کمپل برای پره های روتور مورد آزمایش با استفاده از نتایج المان محدود رسم شده است. در این دیاگرام محور افقی نمایانگر سرعت پره (بر حسب دور بر دقیقه) و محور عمودی نمایانگر فرکانس آن (بر حسب هرتز) می باشد. فرکانس طبیعی پره و فرکانس تحریک در این دیاگرام رسم می شوند. این دیاگرام نقاطی که فرکانس طبیعی پره با فرکانس های تحریک آن تداخل پیدا می کنند را نشان می دهد. در صورت تداخل بین فرکانس تحریک و فرکانس های

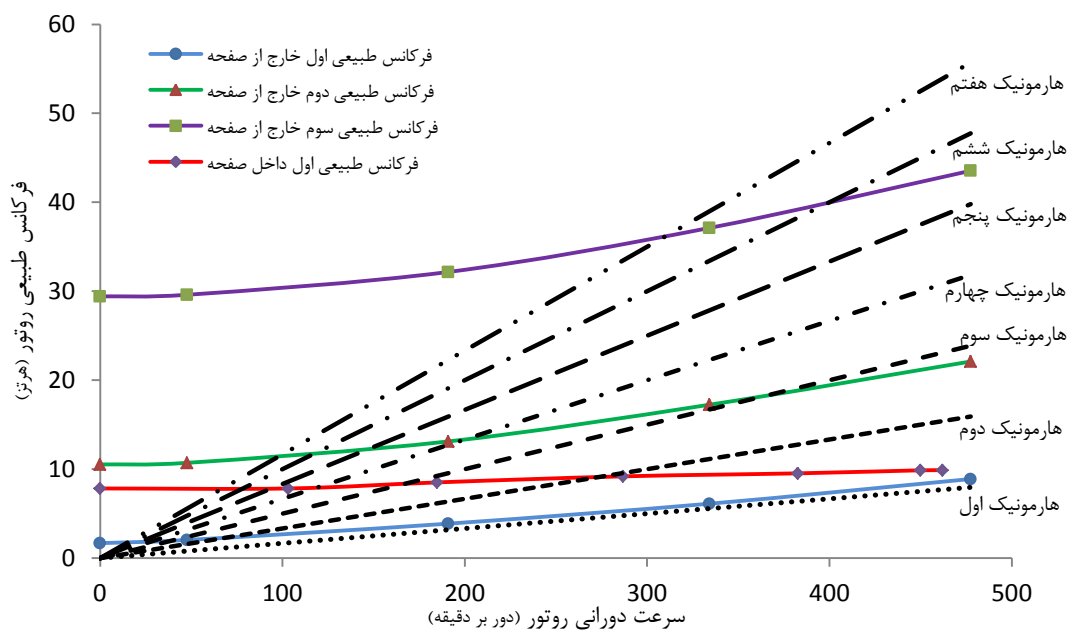
صورت بی بعد) نشان داده شده که نشان می‌دهد، شکل مودها دارای تغییراتی در انحنایها و محل گره‌ها می‌باشند و در شکل ۱۸ تغییرات شکل مود اول داخل صفحه دوران در اثر سرعت دورانی را نشان می‌دهد. این شکل مود تغییرات ناچیزی را از خود نشان می‌دهد و تقریباً شکل مودها بر هم منطبقند و تغییرات آن محسوس نیست.

در کل این روتور برای پرواز در محدوده کاری ۴۰۰ تا ۴۵۰ دور مناسب می‌باشد و این نکته لازم به ذکر است که خلبان در حین افزایش سرعت (جهت رسیدن به دور کاری) به محض تداخل فرکانس‌های طبیعی با هارمونیک‌های تحریک، باید به سرعت از این محدوده‌ها عبور نماید. در مورد مود اول داخل صفحه ذکر این نکته لازم است که به دلیل سفتی زیاد پره در این راستا، فرکانس طبیعی دارای تغییرات بسیار کمی می‌باشد.

فرکانس‌های طبیعی سازه در سایر سرعت‌ها با استفاده از روش تحلیلی المان محدود به دست آمد که، با استفاده از آن دیاگرام کمپل رسم گردید. مطابق با این دیاگرام، همان طور که انتظار می‌رفت اثر سفتی ناشی از بار گریز از مرکز با افزایش سرعت دورانی روتور بیشتر می‌شود. در دور کاری ۴۰۰ تا ۴۵۰ دور بر دقیقه، مود سوم خارج از صفحه امکان تشدید در صورت تحریک را دارا می‌باشد. اما این امکان، بدلیل دور کاری محدود روتور و همچنین امکان پایین دستیابی به این فرکانس به دلیل دارا بودن فرکانس بالا، از بین می‌رود و به همین دلیل در تحلیل مودال نیز توجه اصلی بر روی مود اول می‌باشد.

در مورد مود اول داخل و خارج از صفحه دوران باید این نکته را در نظر داشت، که برای سرعت‌های بالای ۵۰۰ دور بر دقیقه امکان تشدید، به دلیل پیوستن این دو مود به هم و تداخل با فرکانس تحریک اول وجود دارد و ممکن است باعث ایجاد ناپایداری گردد، لذا برای این دوره‌های کاری، این روتور مناسب نمی‌باشد.

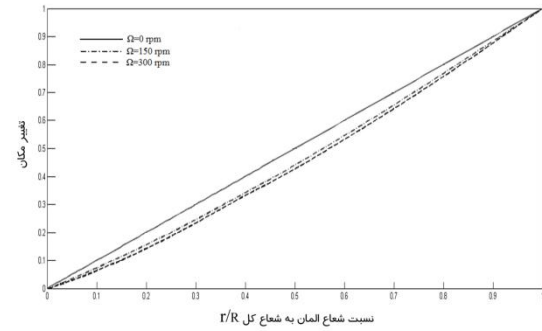
در شکل‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۷ تغییرات شکل مودهای اول تا سوم خارج از صفحه دوران در اثر تغییر سرعت دورانی پره (به-



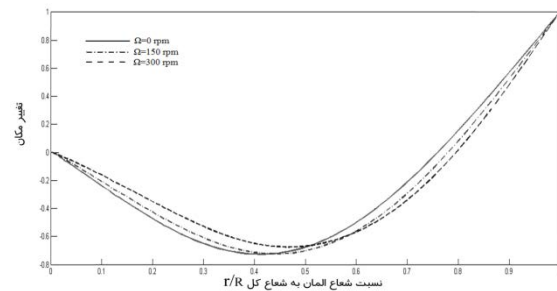
شکل (۱۴): دیاگرام کمپل روتور مورد آزمایش.

۸- مراجع

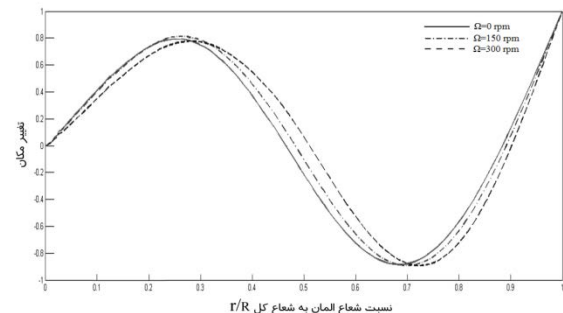
- Houbolt, J.C. and Brooks, G.W., "Differential Equations of Motions for Combined Flap Wise Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades", NACA Report 1346, 1958.
- Hunter, W.F., "The Integrating Matrix Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Propeller Blades", NASA TN D-6064, 1970.
- White W.F. and Malatino R.E., "A Numerical Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Rotating Nonuniform Cantilever Blades", NASA TM X-72,751, 1975.
- Murthy, V.R., "Dynamic Characteristics of Rotor Blades", Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, No. 4, pp. 483-500, 1976.
- Murthy, V.R., "Dynamic Characteristics of Rotor Blades: Integrating Matrix Method", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal (AIAA), Vol. 15, No. 4, pp. 595-597, 1977.
- Wright, A.D., Smith, E.R., Thresher, W.J., Wang, L.C., "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, No. 1, pp.197-202, 1982.
- Shannon, J.F. and Forshaw, J.R., "Propeller Blade Vibration: Nature and Severity of Vibration at Edgewise Resonance as Influenced by Coupling Effects due to Blade Twist Ministry of Supply", 1970.
- Reddy, J.N., "An Introduction to Finite Element Method", 2nd ed, Vol. 1, 2000.
- Naguleswaran, S., "Lateral Vibration of a Centrifugally Tensioned Euler-Bernoulli Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 176, No. 5, pp. 613-624, 1994.
- Surace, G., Anghel, V., Mares, C., "Coupled Bending-Bending-Torsion Vibration Analysis of Rotating Pretwisted Blades: an Integral formulation and Numerical Examples", Journal of Sound and Vibration, Vol. 206, No. 4, pp. 473-486, 1997.
- Bazoune, A., "Relationship Between Softening and Stiffening Effects in Terms of South Well Coefficients", Journal of Sound Vibration, Vol. 287, No. 4, pp. 1027-1030, 2005.
- Bazoune, A., Khulief, Y.A., Stephen, N.G., "Further Results for Modal Characteristics of Rotating Tapered Timoshenko Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, No. 1, pp. 157-174, 1999.
- Yoo, H.H., Shin, S.H. "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 5, pp. 807-828, 1998.
- Mil, M.L., "Helicopter Calculation and Design: Vibrations and Dynamic Stability", Vol. 2, Moscow, Mashinostroyeniye Press, 1968.
- Bramwell, A.R.S., "Helicopter Dynamics", 2001.
- Lin, S.M., "The Instability and Vibration of Rotating Beams with Arbitrary Pretwist and an Elastically Restrained Root", ASME Journal of



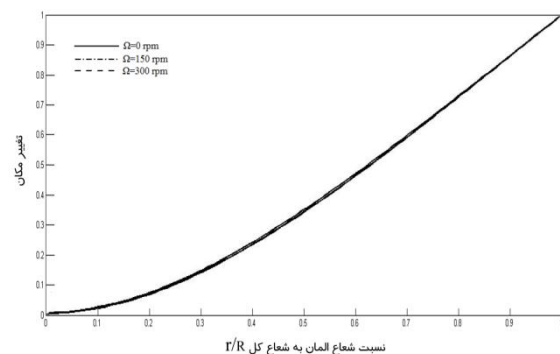
شکل (۱۵): شکل مود اول خارج از صفحه دوران در فرکانس ۱/۶۵ هرتز.



شکل (۱۶): شکل مود دوم خارج از صفحه دوران در فرکانس ۱۰/۳۸ هرتز.



شکل (۱۷): شکل مود سوم خارج از صفحه دوران در فرکانس ۲۹/۰۷ هرتز.



شکل (۱۸): شکل مود اول داخل صفحه دوران در فرکانس ۷/۹۴ هرتز.

- Applied Mechanics, Vol. 68, No. 6, pp. 844-853, 2001.
17. Lin, S.M., Tien, C.S, Lee, Y., "Free Vibrations of Rotating Nonuniform Beam with Arbitrary Pretwist, an Elastically Restrained Root and a Tip Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 273, No. 3, pp. 477-492, 2004.
 18. Lin, S.M., Lee, S.Y., Wang, W.R., "Dynamic Analysis of Rotating Damped Beams with an Elastically Restrained Root", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 46, No. 5, pp. 673-693, 2004.
 19. Newman, S., "The Foundations of Helicopter Flight", 1994.
 20. S.Rao, "Mechanical Vibrations", Fifth ed., Singapore: Pearson Education, Inc., 2010.
 21. Thomson, W.T., Mariedillon, D., "Theory of Vibration with Applications", Fifth ed, prentice-Hall, Inc., 2002.
 22. Kennedy and Panco, "Determination of Natural Frequency and Damping Level in Aircraft Structures", Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, USA, 1947.
 23. Hollmann, M., "Rotor Blade Resonance", 2007.
 24. Francis S.T., Morse, I.E., Hinkle, R.T., "Mechanical Vibrations Theory and Applications", Allyn and Bacon Inc., 1978.
 25. Rao, S.S., Gupta, R.S. "Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 103-124, 2001.
 26. Rawtani, S., Dokainish, M.A., "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, No. 2, pp. 233-248, 1971.
 27. Hoa, S.V., "Vibration of Rotating Beam with Tip Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 67, No. 3, pp. 369-381, 1979.
 28. Bielawa, R.L., "Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity", American Institute of Aeronautics and Astronautics, Education Series, Washington, D.C. AIAA Inc, 1992.
 29. Chandrupatla, R., Belegundu, D., "Introduction to Finite Elements in Engineering", third ed., 2002.
 30. Mousavi, S.A., Elhami, M.R., Taeb, H., "The Rotorcraft Blades Modal Testing and Analysis", Journal of Sound and Vibration, Vol. 6, No.1, pp. 22-32, 2015.
 31. Mousavi, S.A., Elhami, M.R., "Modal Analysis of a Rotor with Two Blades with Finite Element Method and Experimental Test", 4th International Conference on Acoustics and Vibration, 2014.