

تأثیر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات متقارن محوری ورق

میکرو دایره‌ای دوآر

اردشیر کرمی محمدی^۱ و مهدی داوری^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه شاهرود

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۹/۳۰)

چکیده

میرایی ترموالاستیک مهم‌ترین عامل اتلاف انرژی سازه‌های مرتعش از جمله تشدیدکننده‌ها در مقیاس میکرو و نانو در دمای اتاق می‌باشد. در این مقاله، ابتدا معادلات کوپل شده و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات متقارن محوری جانبی ورق دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور مرکزی به دست آمده است. سپس حل با روش المان محدود به کمک نرم‌افزار ANSYS انجام و ضریب کیفیت برحسب ابعاد، دما و سرعت دورانی ورق به دست آمده است. دقت نتایج به دست آمده در حالت بدون دوران با نتایج به دست آمده در مراجع مقایسه شده است. سپس اثر چرخش با توجه به دما و ابعاد ورق، بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی شد. مشاهده شد که میرایی ترموالاستیک در ابعاد معینی بیشترین مقدار را خواهد داشت، که این ابعاد علاوه بر دما، به سرعت چرخش نیز بستگی دارد.

واژه‌های کلیدی: میرایی ترموالاستیک، ضریب کیفیت، سیستم‌های میکروالکترومکانیک، ورق دایره‌ای دوآر، ارتعاشات جانبی

Effect of Thermoelastic Damping on Axisymmetric Vibration of Rotating Circular Micro Plate

A. Karami Mohammadi and M. Davari

Department of Mechanical Engineering
University of Shahrood

(Received: 30/April/2013; Accepted: 21/December/2013)

ABSTRACT

Thermoelastic damping is recognized as a significant loss mechanism at room temperature in micro and nano-scale resonators. In this paper, the governing equations of coupled thermoelastic problems are established for axisymmetric out of plane vibration of rotating circular plate with constant angular velocity about its central axis. Then the Quality Factor obtained by finite element analysis using ANSYS software, as a function of rotation, environmental temperature and plate dimensions. The results for non rotating plate are verified based on the results obtained by the previous works. Then the effects of rotation, environmental temperature and plate dimensions on the thermoelastic damping are studied. The results show that, thermoelastic damping would be rise to a maximum value at specific sizes of plate, which is dependent on temperature and angular velocity.

Keywords: Thermoelastic Damping, Quality Factor, Micro Electro Mechanical System (MEMS), Rotating Circular Plate, out-of-Plane Vibration

۱- دانشیار: (نویسنده پاسخگو): akaramim@shahroodut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: mdavari@gmail.com

۱- مقدمه

به طور کلی اتلافات در سازه‌های مرتعش را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: میرایی داخلی و میرایی خارجی. میرایی خارجی به شرایط مرزی وابسته است و در اکثر موارد با اقدام مناسب می‌توان آن را حذف یا کمینه کرد. اما میرایی داخلی تنها به جنس و مشخصات هندسی سازه وابسته است، بنابراین کمینه کردن اثر مکانیزم‌های داخلی نسبت به مکانیزم‌های خارجی از اهمیت بیشتری برخوردار است. میرایی ترموالاستیک از مهم‌ترین اتلافات داخلی محسوب می‌شود و اهمیت آن زمانی آشکار شد که دانشمندان به ساخت سازه‌هایی در ابعاد میکرو و نانو روی آوردند.

هر نطفه از سازه الاستیک در حال ارتعاش، به طور متناوب در حال فشرده شدن و کشیده شدن است. پس در هر لحظه دو ناحیه فشرده و کشیده وجود دارد. در اثر فشردگی دما افزایش و در اثر کشیده شدن دما کاهش می‌یابد، و این امر باعث پدید آمدن یک شیب دمایی بین دو ناحیه فشرده و کشیده می‌شود. طی این فرایند، سازه میل به تعادل دمایی دارد. تحول گرمایی بازگشت ناپذیر بوده و نمی‌تواند در سازه ذخیره شود و موجب افزایش آنتروپی سیستم می‌شود. افزایش آنتروپی سیستم اتلاف انرژی را به دنبال دارد، که این اتلاف انرژی را میرایی ترمو الاستیک می‌نامند.

برای رسیدن به تعادل دمایی، نیاز به زمان τ_R ، موسوم به زمان مشخصه است. در بازه فرکانسی پایین $\omega^{-1} \ll \tau_R$ ارتعاشات تقریباً هم دما^۱ است و اتلاف انرژی ناچیز است و همچنین در بازه فرکانسی بالا $\omega^{-1} \gg \tau_R$ اتلافات کم و ارتعاشات آدیاباتیکی فرض می‌شود. وقتی $\tau_R \approx \omega^{-1}$ باشد، تنش و کرنش خارج از فاز بوده و ماکزیمم اصطکاک داخلی رخ می‌دهد. به این حالت به اصطلاح پیک دمای^۲ گفته می‌شود

نخست زnr [۱و۲] به اصطکاک داخلی مواد جامد پرداخت و میرایی ترموالاستیک را برای اولین بار مطرح کرد. او تیر همگن ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار داد و توانست فرم تقریبی و تحلیلی از ضریب کیفیت ارائه دهد. بری [۳] فلز برنج α را مورد آزمایش قرار داد و از تئوری زnr استفاده کرد و به این نتیجه رسید که در دمای اتاق میرایی تابعی از فرکانس می‌باشد. رورزرت [۴]، به اثر میرایی ترمو الاستیک در تیرهای تشدیدکننده سیلیکونی در مقیاس میکرو پی برد. او تیرهای مورد آزمایش را به دور از میرایی بیرونی و در خلا در بازه دمایی ۳۰۰ تا ۴۰۰ درجه کلون و در فرکانس‌های بین ۰/۰۸

تا ۱/۶ مگاهرتز مورد آزمایش قرار داد. نتایج آزمایشات تطابق خوبی با تئوری زnr داشتند. یاسومورا [۵]، همان کار رورزرت را انجام داد اما این بار او از نیترات سیلیکون و کریستال - سیلیکون برای میکرو رزوناتورها در دمای اتاق استفاده کرد و توانست به نتایج مشابهی با کار رورزرت برسد. لیفشیتز و روکس [۶]، به اصلاح کارهای زnr برای تیر نازک با سطح مقطع مستطیلی پرداختند. آنها با در نظر گرفتن پروسه میرایی ترموالاستیک به عنوان اصلی‌ترین مکانیزم اتلاف در سیستم‌های میکرو و نانو با استفاده از معادلات خطی ترموالاستیک توانستند عبارت دقیق تری را برای ضریب کیفیت به دست آورند. همچنین آنان در کار خود آزمایشاتی در مورد ضریب کیفیت آرسناید ژرمانیم و سیلیکون انجام دادند و مشاهده کردند که ضریب کیفیت بعد از پیک دمای با افزایش ابعاد سازه کاهش پیدا می‌کند. سربکار و همکارانش [۷]، به توسعه مدل زnr با در نظر گرفتن ریزدانه‌های پلی سیلیکون پرداختند. آنها به این نتیجه رسیدند که برای ساخت میکرو تیرهای تشدید کننده در محدوده فرکانسی گیگا هرتز سیلیکون تک کریستال نسبت به سیلیکون ریز دانه عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. دوول [۸]، به مقایسه مقادیر تئوری و مقادیر آزمایشگاهی ضریب کیفیت پرداخت و نشان داد که مدل زnr به خوبی می‌تواند اثر ابعاد تیر و مشخصات ماده بر روی ضریب کیفیت را شرح دهد. دوول و همکاران [۹]، به کار آزمایشگاهی بر روی میکرو ژيروسکوپها پرداختند. آنها پی بردند که نوع طراحی و ماده به کار گرفته شده تأثیر بسزایی در این میرایی دارد. آنها در انجام آزمایشات خود تأثیر دیگر میرایی‌ها را به حداقل رسانده بودند. هوستون [۱۰]، بر روی سازه‌هایی که دارای شکل مدهای غیر صفر بودند کار کرد. مدل میرایی ترموالاستیک او براساس مشاهداتی بود که در آن مدهای تشدید سازه‌های الاستیک در اکثر مواقع دارای مولفه خمشی بودند. آنان ضریب اشتراک انرژی خمشی را تعیین کردند و آن را در مدل زnr برای میرایی استوانه باریک در حالت خمش خالص به کار بردند و به این نتیجه دست یافتند که این میرایی برای میکرو سازه‌ها با ساختار سیلیکونی بسیار مهم است و این اهمیت نیز برای سازه‌ها تا مقیاس ۵۰ نانومتر نیز وجود دارد. استارزوسکی و خیسوا [۱۱]، میرایی ترموالاستیک را در میکرو و نانو تیر با در نظر گرفتن سرعت محدود برای انتقال حرارت به وسیله یک سری معادلات انتقال حرارت هیپربولیک بررسی کردند. وانگ و همکاران [۱۲]، به بررسی میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری زnr برای ارتعاشات درون صفحه‌ای رینگ نازک سیلیکونی پرداختند البته آنان به این دلیل رینگ را انتخاب کردند که این

جنس ژرمانیم آرسنیک در دمای ۵۰ درجه کلون میرایی ترموالاستیک کمینه می‌شود. و دلیل آن را این گونه توجیه کردند که در دمای ۵۰ درجه کلون گرادیان دمای به وجود آمده در اثر میرایی با توزیع گرمایی خنثی می‌شود و این بدان معنا بود که می‌توان با تغییر دما حساسیت حسگرهای تشدیدکننده را بهبود بخشید. راشد و الاتا [۱۸]، میرایی ترموالاستیک ارتعاشات محوری تیری متشکل از دو لایه متفاوت را بررسی کردند و متوجه شدند که هرچه لایه روی تیر نازک‌تر باشد میرایی کمتر است. سرا و بونالدی [۱۹]، با استفاده از روش اجزاء محدود فرمول بندی براساس یک شکل ضعیف مسئله مقدار مرزی برای ترموالاستیسیته کاملاً کوپل شده ارائه دادند. با انتگرال‌گیری روی تابع اتلافی که به دست آورده بودند در یک سیکل نوسانی می‌توان میرایی ترموالاستیک را به دست آورد. آنها با استفاده از اصل تغییرات بایوت در ترموالاستیسیته شکل فیزیکی تابع اتلاف را نشان دادند. همچنین معادلات کوپل شده المان محدود را با تغییرات کوچک هارمونیک مکانی و دمایی و با در نظر گرفتن تعادل ترمودینامیکی به دست آوردند. در این فرمول بندی دو المان در نظر گرفته شده است. المان اول، المان ۸ گره‌ای جدیدی بود که بر اساس تئوری ورق ریسر و میندلین که هم بر سازه‌های نسبتاً ضخیم و هم بر سازه‌های نازک کاربرد دارد بنا شده بود. المان دوم، المان ۲۰ گره‌ای از نوع ترموالاستیک ایزو پارامتریک سه بعدی است که برای مدل کردن سازه‌های حجیم مناسب است. آنها نیز به مقایسه رفتار این دو المان در یک تیر نازک پرداختند. مچکالف و همکاران [۲۰]، به این موضوع پی بردند که مهم‌ترین میرایی در یک تشدید کننده میکرو الکترو مکانیکی با ضخامت ۱/۵ میکرومتر میرایی ترموالاستیک است. آنها با قرار دادن دو تشدید کننده در دو فرکانس متفاوت ۴۶۰ و ۵۱۰ کیلو هرتز در خلا ضریب کیفیت را پایین آوردند و با تغییرات دما از ۱۲۰ تا ۴۰۰ درجه کلون به این نتیجه رسیدند که میرایی و ضریب کیفیت این دو تشدید کننده در دو آهنگ متفاوت افزایش می‌یابد که با تئوری زرن همخوانی دارد. رضازاده و همکاران [۲۱]، معادلات ترموالاستیک میکرو تیر خازنی یک تشدید کننده را با مدل هدایت گرمایی غیر فوری‌ای به دست آوردند. در این مطالعه آنان فرض کردند که هدایت گرمایی درد و راستای طولی و عرضی صورت می‌گیرد. ضریب کیفیت ترموالاستیک را در دو حالت از مدل هدایت حرارتی یک بعدی سهموی مقایسه کردند و دریافتند که دو حالت مذکور با یک بعدی سهموی انطباق خوبی دارد. همچنین آنها تأثیر اندازه و ابعاد را بر ضریب کیفیت بررسی کردند و ضخامت بحرانی

المان کاربرد فراوانی در حسگرهای میکروالکترومکانیکی مانند ژيروسکوپ دارد. آنها ضریب کیفیت را نیز به صورت عددی محاسبه کردند و با کارهای زرن و لیفشیتز مقایسه کردند. همچنین تأثیر ابعاد هندسی رینگ بر ضریب کیفیت را نیز بررسی نمودند. سودیپتو و همکاران [۱۳]، مدل کلاسیک میرایی ترموالاستیک را با در نظر گرفتن یک تحریک الکترواستاتیکی دلخواه بهبود بخشیدند. مرتبه‌های بالای فرکانس‌های تحریک که در نوسانات ناشی از طبیعت غیرخطی نیروی الکترو استاتیکی ظاهر می‌شوند نیز در مدل اصلاح شده در نظر گرفته شدند. آنها با روش انرژی یک تیر با تغییر شکل بزرگ با میرایی فیلم فشاری از سیال و میرایی ترموالاستیک را در نظر گرفته و ضرایب کیفیت را برای حالت‌های متفاوت محاسبه کردند. نایفه و یونس [۱۴]، یک مدل تحلیلی برای ضریب کیفیت یک میکرو صفحه مستطیلی با اعمال بار الکترو استاتیکی و بدون آنارائه کردند. آنها با جدا کردن معادله کوپل شده هدایت حرارتی از معادله ارتعاشی صفحه به حل مسئله پرداختند. همچنین آنها از روش اغتشاش^۱ برای به دست آوردن ضریب کیفیت در قالب یک عبارت تحلیلی کمک گرفتند و کارهای خود را با نتایج زرن و لیفشیتز مقایسه کردند. پراباکار و همکارانش [۱۵]، مدلی دو بعدی برای میرایی ترموالاستیک ارائه دادند و تئوری یک بعدی زرن و لیفشیتز را بهبود بخشیدند. برای حل معادله دو بعدی هدایت حرارتی از روش تابع گرین استفاده کردند و ضریب کیفیت را به صورت سری نامحدود محاسبه نمودند. آنها اثرات مختلفی همانند هندسه تیر فرکانس طبیعی شکل مدهای خمشی شرایط مرزی را بر روی ضریب کیفیت میکرو تیر تشدید کننده سیلیکونی تک کریستالی بررسی کردند. خطای به دست آمده با مدل یک بعدی بین ۲ تا ۸۰ درصد گزارش شد.

یای و متین [۱۶]، با استفاده از روش اجزای محدود فرمولبندی خاصی را برای میرایی ترموالاستیک میکرو تیرهای تشدید کننده ارائه دادند. آنها با استفاده از روش آشوب در حل معادله دینامیکی تیر و هدایت حرارتی به معادله مقدار ویژه خطی رسیدند. سپس این معادله را برای تیری با تکیه‌گاه ساده با روش اجزاء محدود حل کردند و نتایج به دست آمده را با نتایج تحلیلی زرن و لیفشیتز مقایسه کردند و به نتایج خوبی رسیدند. آنها نیز همانند دیگران به تأثیر عوامل مختلف بر روی ضریب کیفیت پرداختند. اوکاموتو و همکاران [۱۷] به کار آزمایشگاهی پرداختند و تأثیر دما بر میرایی ترموالاستیک را بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که برای میکرو تیر یک سر گیردار از

پهچیده و زمان بر است بنابراین ایده کاهش مدل را ارائه کردند که کارایی محاسبات را بالا می‌برد. در نهایت حل خود را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. یای [۲۸]، نیز با استفاده از روش اجزاء محدود به میرایی ترموالاستیک تشدید کننده‌های میکرومکانیکی پرداخته است. او از روش آشوب برای به‌دست آوردن معادله مقدار ویژه خطی استفاده کرده است. این آنالیز همچنین شامل روش فوریه برای کاهش ابعاد مسئله و بهبود کارایی محاسبات می‌باشد. این روش در ابتدا برای تیری با تکیه‌گاه ساده به‌کار رفته است و نتیجه آن با کار زهر مقایسه شده است سپس روش مذکور برای رینگ تشدید کننده سیلیکونی به طور سه بعدی توسعه داده شد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که در نمودار ضریب کیفیت بر حسب ضخامت شعاعی رینگ قله بیشینه وجود دارد. سان و همکاران [۲۹]، میرایی ترموالاستیک میکروتیر را که تحت گرمایش یک باریکه لیزر قرار داشت بررسی کرده و با یک روش عددی تحلیلی مبتنی بر تبدیل لاپلاس مسئله خود را حل کرده و برای صحت‌گذاری از نرم‌افزار فمب^۱ استفاده کردند و همچنین ممان و خیز گرمایی را به‌دست آوردند. آنها به بررسی موارد دیگری از جمله ابعاد و میزان تابش لیزر بر روی میرایی پرداختند و در پایان آن را با میرایی سیال مقایسه کردند. کیم و همکاران [۳۰]، ضریب کیفیت رینگ دواری با در نظر گرفتن ارتعاشات درون صفحه‌ای محاسبه کردند. آنها پروفیل دما را با فرضی که برای خمش رینگ در نظر گرفتند و با حل معادله هدایت گرمایی به‌دست آوردند. سپس با داشتن توزیع دما معادله حرکت مدل را به‌دست آوردند و بر اساس آن مقادیر ویژه را به‌دست آوردند سپس با تحلیل مقدار ویژه برای ارتعاشات آزاد، ضریب کیفیت را محاسبه کردند. یانگ ژو سیلیکون SOI را مورد آزمایش قرار دادند. آنها نیز از روش عددی که همان روش انرژی گرمایی بود استفاده کردند. سان و توماو [۳۲]، به استخراج معادلات ارتعاشی متقارن محوری ورق دایروی با کوپلینگ ترموالاستیک پرداختند و توانستند میرایی ترموالاستیک را در قالب یک عبارت بیان کنند. همچنین به بررسی اثر دمای محیط، شرایط مرزی و ابعاد ورق بر میرایی ترموالاستیک نیز پرداختند.

در این مقاله ابتدا معادلات کوپل شده و غیر خطی حاکم بر ارتعاشات متقارن محوری جانبی ورق دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور مرکزی به‌دست آمده است. سپس حل با روش المان محدود به کمک نرم‌افزار "انسیس" انجام و ضریب

به‌دست آمده را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. از طرفی تأثیر ولتاژ توقف را بر ضریب کیفیت مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که ولتاژ توقف ضریب کیفیت را کاهش می‌دهد. کومار و هاگو [۲۲]، به این نتیجه رسیدند که راه حلی برای کاهش میرایی ترموالاستیک وجود ندارد و تأثیر نیروی محوری پسماند میکروتیر را بر این میرایی مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که افزایش نیروی محوری هم باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود و هم ضریب کیفیت را افزایش می‌دهد بنابراین آنها برای کنترل این میرایی تغییر در نیروی محوری را پیشنهاد داده‌اند. پراباکار [۲۳]، به رابطه بین فرکانس و میرایی ترموالاستیک در میکروتیر اولر برنولی که از سه لایه متفاوت تشکیل شده بود در دو حالت سرامیک - سرامیک و سرامیک - فلز پرداختند و همچنین تأثیر نوع ماده و نسبت حجمی آنها را مورد بررسی قرار داده و به این نتیجه رسیدند که میکروتیرهایی که از سیلیسیم و کاربید سیلیسیم ساخته شده‌اند و با طلا نقره مس یا آلومینیوم آبکاری شده‌اند میرایی بیشتری نسبت به نوع بدون آبکاری آن میکروتیرها دارند. همچنین میکروتیرهایی که از سیلیسیم ساخته شده‌اند و با کاربید سیلیسیم پوشش داده شده‌اند در نمودار میرایی آنها قله بزرگتری دیده می‌شود که با افزایش نسبت حجمی کاربید سیلیسیم به سیلیسیم این قله‌ها افزایش می‌یابند. همچنین استریکال و سایریم برای تیر دولایه کار مشابه‌ای انجام دادند. چویی و همکاران [۲۴]، یک پوسته نیم کره را بررسی کردند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله شعاع و ضخامت شعاعی را بر روی ضریب کیفیت بررسی کردند. هائو و همکاران [۲۵]، به محاسبه میرایی ترموالاستیک تشدیدکننده‌های میکرو مکانیکی با استفاده از روش انرژی گرمایی پرداختند. آنها انرژی گرمایی را در هر سیکل نوسانی محاسبه کردند. روش انرژی گرمایی در مقایسه با روش فرکانس - مختلط، شامل اعداد مختلط نیست و می‌توان آن را در نرم‌افزار انسیس اجرا کرد. نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصله از چندین روش دیگر انطباق خوبی دارد. این روش را می‌توان برای هندسه‌های پیچیده نیز توسعه داد. مندزا و همکاران [۲۶]، میرایی ترموالاستیک تیر یک سر گیردار را با در نظر گرفتن ترم‌های خطی و غیر خطی آن شبیه‌سازی عددی کرده و با یکدیگر مقایسه کردند. نتایج با فرض جابه‌جایی‌های بزرگ، سخت شونده‌گی و کاهش زمان تأخیر برای دامنه نوسانات را نشان می‌دهد. چویی و همکاران [۲۷]، یک فرمولبندی اجزاء محدود برای یک مسئله کاملاً کلی ترموالاستیک ارائه دادند. از آنجا که حل مقادیر ویژه بسیار

که u و v و w به ترتیب جابه‌جایی شعاعی، مماسی، و قائم نقطه P_0 در صفحه میانی (صفحه خنثی) ورق می‌باشند و تابعی از زمان و مختصات r, θ هستند. انرژی جنبشی بر حسب مکان و سرعت چرخش نشان داده می‌شود. بردار مکان نقطه p عبارت است از:

$$r = (r + u_r)e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z \quad (2)$$

که، (e_r, e_θ, e_z) بردارهای یکه به ترتیب در جهات (r, θ, z) می‌باشند، و سرعت زاویه‌ای ورق:

$$\omega = \Omega e_z \quad (3)$$

و بردار سرعت نقطه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$V = V_p - zV_b \quad (4)$$

V_p بردار سرعت درون صفحه‌ای و V_b بردار سرعت ناشی از خمش است و

$$V_p = \left[\frac{\partial u}{\partial t} - v\Omega \right] e_r + \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (r + u)\Omega \right] e_\theta + \frac{\partial w}{\partial t} e_z \quad (5)$$

$$V_b = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} + \Omega \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] e_r - \left[\frac{\partial^2 w}{r \partial t \partial \theta} + \Omega \frac{\partial w}{\partial r} \right] e_\theta \quad (6)$$

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ورق با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_A V_p \cdot V_p dA \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T \sigma dA \quad (8)$$

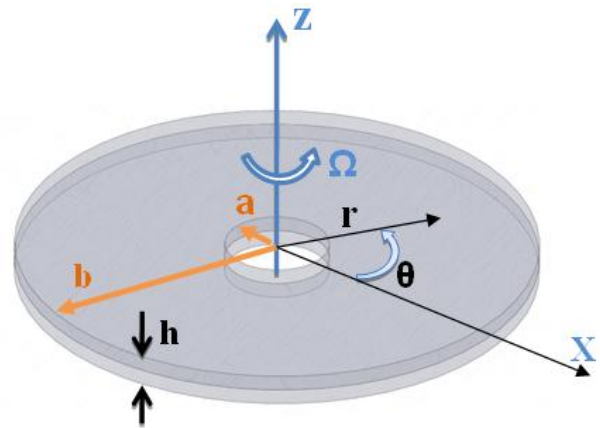
که، ε بردار کرنش و σ بردار تنش می‌باشند. با استفاده از تئوری کرنش ون کارمن بردار کرنش به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L + \varepsilon_p^N \\ \varepsilon_b^L \end{Bmatrix} \quad (9)$$

که، L و N نشان‌دهنده جملات خطی و غیرخطی اند و داریم:

$$\varepsilon_p^L = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}, \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\}^T \quad (10)$$

کیفیت بر حسب ابعاد، دما و سرعت دورانی ورق به دست آمده است. دقت نتایج به دست آمده در حالت بدون دوران با نتایج به دست آمده توسط سان [۳۲] مقایسه شده است. سپس اثر چرخش با توجه به دما و ابعاد ورق، بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی شده است.



شکل (۱): تصویری از میکرو ورق دایروی و سیستم مختصات.

۲- استخراج معادلات حرکت

در این قسمت به بررسی و استخراج معادلات حرکت ورق دایروی چرخان با کوپلینگ ترموالاستیک می‌پردازیم. برای ساده‌سازی معادلات از تئوری ورق کیرشسف استفاده شده است [۳۳].

۲-۱- معادله حرکت جانبی ورق دایروی دوار

همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است ورق دایروی دارای ضخامت یکسان h ، شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b می‌باشد. در اینجا از سیستم مختصات استوانه‌ای که مبدأ آن منطبق بر مرکز ورق می‌باشد استفاده شده است. صفحه خنثی منطبق بر صفحه (r, θ) و محور Z عمود بر این صفحه می‌باشد. در حالت تعادل ورق بدون تنش و کرنش، و دمای سرتاسر ورق نیز همان دمای محیط یعنی T_0 است. در حالت کلی میدان دما تابعی از زمان و مختصات (r, θ, z) می‌باشد. ورق با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور عمود بر ورق (محور Z) دوران می‌کند. موقیعت نقطه P با مختصه شعاعی r ، مختصه مماسی θ ، و مختصه جانبی Z تعریف می‌شود. بنابراین جابه‌جایی نقطه P در راستای شعاعی، مماسی و جانبی را می‌توان به صورت رابطه (۱) نوشت:

$$u_r = u - z \frac{\partial w}{\partial r}, u_\theta = v - z \frac{\partial w}{r \partial \theta}, u_z = w. \quad (1)$$

$$q_\theta = D_0 \left[v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right] \quad (19)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (20)$$

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right] \quad (21)$$

$$m_\theta = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right] \quad (22)$$

$$m_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] \quad (23)$$

برای در نظر گرفتن اثر دما می توان نوشت [۳۲]:

$$(\sigma_r)_T = -\frac{E}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad (24)$$

$$(\sigma_\theta)_T = -\frac{E}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad (25)$$

که در آن،

$$\vartheta = T - T_0 \quad (26)$$

بنابراین نیرو بر واحد طول برابر است با:

$$(q_r)_T = -\frac{Eh}{1-\nu} \alpha_T \vartheta, (q_\theta)_T = -\frac{Eh}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad (27)$$

و معادلات (۱۸) تا (۲۰) را می توان به صورت زیر اصلاح کرد:

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - (1+\nu) \alpha_T \vartheta \right] \quad (28)$$

$$q_\theta = D_0 \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha_T \vartheta \right] \quad (29)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (30)$$

محاسبه ممان ناشی از جمله دمایی:

$$(m_r)_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{E}{1-\nu} \alpha_T \vartheta z dz \quad (31)$$

$$(m_r)_T = -D [(1+\nu) \alpha_T M_T] \quad (32)$$

$$M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vartheta z dz \quad (33)$$

که، M_T ممنتوم گرمایی نام گذاری می شود، و همین طور:

$$(m_\theta)_T = -D [(1+\nu) \alpha_T M_T] \quad (34)$$

بنابراین معادلات (۲۱) تا (۲۳) را می توان به صورت زیر اصلاح کرد:

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + (1+\nu) \alpha_T M_T \right] \quad (35)$$

$$m_\theta = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + (1+\nu) \alpha_T M_T \right] \quad (36)$$

$$\varepsilon_p^N = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right\}^T \quad (11)$$

$$\varepsilon_b^L = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, -\left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right), -2 \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \right\}^T \quad (12)$$

می توان بردار تنش را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\sigma = D \varepsilon^L \quad (13)$$

که در آن، ماتریس D و بردارهای σ , ε^L عبارتند از:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_b \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^L = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L \\ \varepsilon_b^L \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_b \end{bmatrix} \quad (14)$$

لازم به ذکر است که، σ_p بردار نیروهای داخلی خطی شده و σ_b بردار مومنتوم داخلی است:

$$\sigma_p = \{q_r \quad q_\theta \quad q_{r\theta}\}^T, \quad \sigma_b = \{m_r \quad m_\theta \quad m_{r\theta}\}^T \quad (15)$$

و نیز D_p و D_b عبارتند از:

$$D_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$D_b = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن، D صلبیت کششی و D_0 صلبیت خمشی می باشد:

$$D_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17)$$

q_r و q_θ بردار نیروهای داخلی خطی شده بر واحد طول و m_r , m_θ و $m_{r\theta}$ بردارهای مومنتوم داخلی بر واحد طول می باشد [۳۴].

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right] \quad (18)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = 0 \quad (47)$$

$$\rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + D \nabla^4 w + D(1 + \nu) \alpha_T \nabla^2 M_T - \frac{\partial}{\partial r} \left(r q_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = 0 \quad (48)$$

نیروهای غیرپایستار، معادلات (۳۹) تا (۴۱) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{r\theta}}{r \partial \theta} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h \Omega^2 r \quad (46)$$

۲-۲- معادله هدایت گرمایی

معادله هدایت گرمایی برای صفحه دایره‌ای شامل عبارت کوپل شده ترموالاستیک [۳۲]:

$$k \nabla^2 \theta + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (49)$$

که در آن، $\beta = E \alpha_T / (1 - 2\nu)$ مدول دمایی، k هدایت گرمایی، c_v گرمای ویژه در حجم ثابت و α_T ضریب انبساط دمایی می‌باشند. چون گرادیان دمایی سطح مقطع در راستای ضخامت ورق به مراتب بیشتر از گرادیان دمایی در راستای شعاعی می‌باشد. بنابراین در اینجا از عبارت $\nabla^2 \theta$ در معادله انتقال گرما صرف نظر می‌شود [۳۲]:

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (50)$$

برای صفحه دایره‌ای متقارن محوری، جابه‌جایی‌ها و همچنین دما به θ وابسته نمی‌باشد، یعنی $\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 0$ بنابراین معادلات حاکم بر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h \Omega^2 r \quad (51)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = 0 \quad (52)$$

$$m_{r\theta} = - \frac{1 - \nu}{2} D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] \quad (37)$$

کار نیروهای غیر پایستار را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W_{nc} = \int_A (P_r u + P_\theta v + P_z w) dA \quad (38)$$

با استفاده از انرژی جنبشی رابطه (۷)، انرژی پتانسیل رابطه (۸) و کار نیروهای غیر پایستار رابطه (۳۸)، اصل هامیلتون، معادلات حرکت به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{r\theta}}{r \partial \theta} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h \Omega^2 r + p_r \quad (39)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = p_\theta \quad (40)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + D \nabla^4 w + D(1 + \nu) \alpha_T \nabla^2 M_T - \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(q_r \frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} + q_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = p_z \quad (41)$$

که در آن،

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \quad (42)$$

و شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0, r = a \quad (43)$$

$$q_r = 0, q_{r\theta} = 0, m_r = 0, \quad (44)$$

$$-D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} + \frac{\partial m_{r\theta}}{r \partial \theta} = 0, r = b \quad (45)$$

معادلات (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) به ترتیب معادلات حرکت در سه راستای شعاعی، مماسی و جانبی است. معادلات حرکت در راستای شعاعی و مماسی خطی است اما معادله ارتعاشات جانبی به صورت غیر خطی به دست آمده است. مشاهده می‌شود که سه معادله به دست آمده کاملاً به هم وابسته می‌باشند. به عبارت دیگر، جابه‌جایی در راستای جانبی متأثر از جابه‌جایی در راستای شعاعی و مماسی است. با صفر در نظر گرفتن کار

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - D_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right] - (1+v)\alpha_T \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \rho h \Omega^2 r \quad (۶۴)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{1-v}{2} D_0 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} - \frac{v}{r^2} \right] = 0 \quad (۶۵)$$

که با توجه به فرضیات قبل، از عبارت $\frac{\partial \vartheta}{\partial r}$ صرف نظر می شود و معادله (۶۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - D_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right] = \rho h \Omega^2 r \quad (۶۶)$$

با حل معادلات (۶۵) و (۶۶) و جایگذاری v ، u در معادلات (۵۵) و (۶۵) نتیجه می شود:

$$q_r = \frac{3+v}{8} \rho h \Omega^2 (b^2 - r^2) + \frac{\rho \Omega^2 a^2 (1-v^2) [b^2(3+v) - a^2(1+v)]}{8\{a^2(1-v) + b^2(1+v)\}} h \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (۶۷)$$

$$q_\theta = \frac{\rho h \Omega^2}{8} [(3+v)R^2 - (1+3v)r^2] - \frac{\rho \Omega^2 a^2 (1-v^2) [b^2(3+v) - a^2(1+v)]}{8\{a^2(1-v) + b^2(1+v)\}} h \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (۶۸)$$

برای حل معادله (۵۴)، فرض می کنیم [۳۲]:

$$w(r, t) = w_0(r) e^{i\omega t}, \quad \vartheta(r, z, t) = \vartheta_0(r, z) e^{i\omega t} \quad (۶۹)$$

با جایگذاری داریم:

$$-\rho h \omega^2 w_0 + D \nabla^4 w_0 + D(1+v)\alpha_T \nabla^2 M_{T0} - \frac{\partial}{r \partial r} \left(r q_r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) = 0 \quad (۷۰)$$

$$k \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial z^2} = i\omega \rho c_v \vartheta_0 - i\omega \beta T_0 z \nabla^2 w_0 \quad (۷۱)$$

با حل معادله بالا داریم:

$$\vartheta_0 - \frac{\beta T_0}{\rho c_v} z \nabla^2 w_0 = A \sin(mz) + B \cos(mz) \quad (۷۲)$$

که در آن،

$$m = \sqrt{-\frac{i\omega \rho c_v}{k}} = (1-i) \sqrt{\frac{\omega \rho c_v}{2k}} \quad (۷۳)$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h/2 \quad (۷۴)$$

$$\rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + D \nabla^4 w + D(1+v)\alpha_T \nabla^2 M_T - \frac{\partial}{r \partial r} \left(r q_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (۵۳)$$

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (۵۴)$$

که در آن،

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} - (1+v)\alpha_T \vartheta \right] \quad (۵۵)$$

$$q_\theta = D_0 \left[v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - (1+v)\alpha_T \vartheta \right] \quad (۵۶)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-v}{2} D_0 \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (۵۷)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r}, \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right)$$

و شرایط مرزی به صورت زیر می باشد:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad r = a \quad (۵۸)$$

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + (1+v)\alpha_T M_T \right] = 0,$$

$$r = b \quad (۵۹)$$

$$-D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} = 0, \quad r = b \quad (۶۰)$$

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{u}{r} - (1+v)\alpha_T \vartheta \right] = 0, \quad r = b \quad (۶۱)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-v}{2} D_0 \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] = 0, \quad r = b \quad (۶۲)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h/2 \quad (۶۳)$$

۲- میرایی ترمو الاستیک در ورق دایروی دوآر

با جایگذاری q_r ، q_θ و $q_{r\theta}$ به ترتیب از معادلات (۵۵)، (۵۶) و (۵۷) در معادلات (۵۱) و (۵۲) و (۵۳) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 W}{dR^4} + \frac{2(b-a)}{(b-a)R+a} \frac{d^3 W}{dR^3} \\ & - \left((b-a)^2 q_R + \frac{D_\omega (b-a)^2}{((b-a)R+a)^2} \right) \frac{1}{D_\omega} \frac{d^2 W}{dR^2} \\ & + \left(\frac{D_\omega (b-a)^3}{((b-a)R+a)^3} - \frac{(b-a)^3}{(b-a)R+a} q_R \right. \\ & \left. - (b-a)^2 \frac{dq_R}{dR} \right) \frac{1}{D_\omega} \frac{dW}{dR} - \frac{\rho h (b-a)^4 \omega^2}{D_\omega} W \\ & = 0 \end{aligned} \quad (۸۹)$$

و شرایط مرزی نیز به صورت زیر در می‌آید:

$$W = 0, \quad \frac{dW}{dR} = 0, \quad R = 0 \quad (۹۰)$$

$$\begin{aligned} -D \frac{d^2 W}{dR^2} = \frac{d^3 W}{dR^3} + \left(\frac{b-a}{(b-a)R+a} \right) \frac{d^2 W}{dR^2} - \\ \left(\frac{b-a}{(b-a)R+a} \right)^2 \frac{dW}{dR} = 0, \quad R = 1 \end{aligned} \quad (۹۱)$$

$$\begin{aligned} m_r = -D \left[\frac{d^2 W}{(b-a)^2 dR^2} + \frac{\nu}{(b-a)((b-a)R+a)} \frac{dW}{dR} + \right. \\ \left. \Delta_D (1 + f(\omega)) \nabla^2 W \right] = \left(\frac{\Delta_D (1 + f(\omega)) + 1}{(b-a)} \right) \frac{d^2 W}{dR^2} + \\ \left(\frac{\Delta_D (1 + f(\omega)) + \nu}{(b-a)R+a} \right) \frac{dW}{dR} = 0, \quad R = 1 \end{aligned} \quad (۹۲)$$

معادله (۸۹) معادله دیفرانسیل ارتعاشی با میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی دوار می‌باشد. مشاهده می‌شود که با اضافه شدن چرخش به سیستم، رفتار سیستم از حالت خطی به غیرخطی تغییر می‌یابد. به دست آوردن حل تحلیلی برای معادله غیرخطی فوق دشوار است. روش اجزاء محدود ابزار مناسبی برای حل این مسئله است و در اینجا با استفاده از نرم‌افزار "انسیس" [۳۵]، با محاسبه ماتریس‌های سختی، میرایی و جریان گرمایی سیستم و جای گذاری در معادله اساسی سیستم و محاسبه انرژی کرنشی سیستم، اثر میرایی ترموالاستیک در حالت‌های مختلف بررسی شده است. انرژی کل سیستم برابر است با:

$$U_t = \frac{1}{4} \int_{VOL} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}^* d(VOL) \quad (۹۳)$$

در آن، $\{\varepsilon\}^*$ کرنش کل است که شامل مقادیر حقیقی و موهومی می‌باشد. قسمت حقیقی معادله بالا بیانگر میانگین انرژی کرنشی ذخیره شده و قسمت موهومی بیانگر میانگین انرژی کرنشی از دست رفته به سبب میرایی ترموالاستیک می‌باشد. کیفیت میرایی ترموالاستیک با ضریب کیفیت Q به صورت زیر بیان می‌شود [۳۳]:

$$Q^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_e} Im(U_t)}{\sum_{j=1}^{N_e} Re(U_t)} \quad (۹۴)$$

که در آن، N_e تعداد المان‌ها است.

$$A = -\frac{\beta T_0}{\rho c_v} \frac{1}{m \cos(mh/2)} \nabla^2 w_0, \quad B = 0. \quad (۷۵)$$

بنابراین داریم:

$$\vartheta_0(r, z) = -\frac{\beta T_0}{\rho c_v} \nabla^2 w_0 \left(z - \frac{\sin(mz)}{m \cos(mh/2)} \right) \quad (۷۶)$$

همچنین داریم:

$$M_{T_0} = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vartheta_0 z dz \quad (۷۷)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} M_{T_0} = \Delta_M (1 + f(\omega)) \nabla^2 w_0 \quad (۷۸) \\ \Delta_M = \frac{\beta T_0}{\rho c_v}, \quad f(\omega) = \frac{24}{m^3 h^3} \left(\frac{mh}{2} - \tan\left(\frac{mh}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

معادله نهایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_\omega \nabla^4 w_0 - \rho h \omega^2 w_0 - \frac{d}{r dr} \left(r q_r \frac{dw_0}{dr} \right) = 0 \quad (۷۹)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} D_\omega = D [1 + \Delta_D (1 + f(\omega))], \quad \Delta_D = (1 + \\ \nu) \alpha_T \Delta_M = \frac{(1+\nu) \alpha_T \beta T_0}{\rho c_v} \quad (۸۱) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_r = \\ \frac{3+\nu}{8} \rho h \Omega^2 (b^2 - r^2) + \\ \frac{\rho h \Omega^2 a^2 (1-\nu^2) [b^2 (3+\nu) - a^2 (1+\nu)]}{8 \{a^2 (1-\nu) + b^2 (1+\nu)\}} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (۸۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_r}{dr} = \\ \frac{3+\nu}{4} \rho h \Omega^2 r - \frac{\rho h \Omega^2 a^2 b^2 (1-\nu^2) [b^2 (3+\nu) - a^2 (1+\nu)]}{4 \{a^2 (1-\nu) + b^2 (1+\nu)\}} \left(\frac{1}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (۸۳)$$

و همچنین شرایط مرزی نهایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$w_0 = 0, \quad \frac{dw_0}{dr} = 0, \quad r = a \quad (۸۴)$$

$$-D \frac{d^2 w_0}{dr^2} = 0, \quad r = b \quad (۸۵)$$

$$\begin{aligned} m_r = -D \left[\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_0}{dr} + \Delta_D (1 + f(\omega)) \nabla^2 w_0 \right] \\ = 0, \quad r = b \end{aligned} \quad (۸۶)$$

$$\begin{aligned} D_\omega \frac{d^4 w_0}{dr^4} + \frac{2D_\omega}{r} \frac{d^3 w_0}{dr^3} - \left(q_r + \frac{D_\omega}{r^2} \right) \frac{d^2 w_0}{dr^2} \\ + \left(\frac{D_\omega}{r^3} - \frac{q_r}{r} - \frac{dq_r}{dr} \right) \frac{dw_0}{dr} \\ - \rho h \omega^2 w_0 = 0 \end{aligned} \quad (۸۷)$$

برای بی بعدسازی متغیرها فرض می‌شود:

$$W = \frac{w_0}{h}, \quad 0 \leq R = \frac{r-a}{b-a} \leq 1 \quad (۸۸)$$

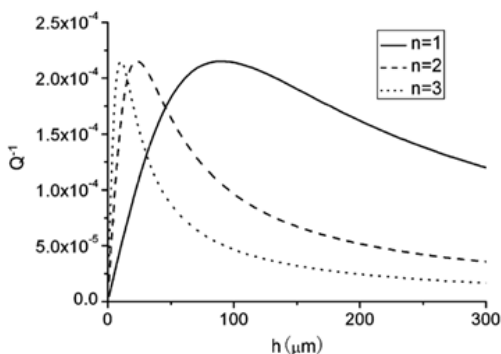
که با جایگذاری در معادلات (۸۷) نتیجه می‌شود:

2.33e-15	2.66e8	8.76e8	$PW/(\mu m * K)$	ضریب هدایت حرارتی
7.13e14	5.57e14	3.28e14	$PJ/(Kg * K)$	گرمای ویژه
2.59e-6	1.406e-6	-0.057e-6	$1/K$	ضریب نفوذ حرارتی

۴-۱- میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی توپر بدون چرخش

در این قسمت میرایی ورق دایروی توپر که در لبه خارجی کاملاً گیردار است بررسی می شود و سپس داده های به دست آمده، با داده های تحلیلی آقای زرن و سان مقایسه می شود. به همین منظور داده های ورودی دقیقاً مطابق داده های آقای سان در نظر گرفته می شود.

در شکل ۲ که توسط سان به دست آمده است مشاهده می شود با افزایش ضخامت ورق، میرایی ترموالاستیک



شکل (۲): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت $(a/h = 50)$ برای مدهای اول تا سوم [۳۲].

ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. بنابراین در ضخامت خاصی میرایی ترموالاستیک به حداکثر خود می رسد که این ضخامت به عنوان ضخامت بحرانی h_c شناخته می شود. این روند در مدهای بالاتر نیز مشاهده می شود، با این تفاوت که ضخامت بحرانی کاهش و نرخ تغییرات افزایش یافته است. اما میرایی در ضخامت های بحرانی یکسان است.

در شکل ۳ که توسط "انسیس" به دست آمده است معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای مدهای اول تا سوم نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می شود شکل ۳ تطابق خوبی با شکل ۲ دارد که خود تصدیق بر نتایج این مقاله می باشد. همچنین برای اطمینان بیشتر از نتایج حل "انسیس"، در ادامه مقایسه گراف های مربوط به معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت، در دماهای مختلف مشاهده می شود. در شکل ۴ که توسط سان به دست آمده تغییرات لگاریتمی معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت ورق در

برای دستیابی به این هدف از زبان پارامتری نرم افزار (APDL) کمک گرفته شده، که به خصوص در مورد ساخت ماکرو در حل مسائلی نظیر بهینه سازی طراحی، بهینه سازی مش بندی، بهینه سازی توپولوژی و کارکرد با پارامترها در حین حل یک مسئله کاربرد دارد. با به کارگیری این قابلیت می توان از طریق ساخت ماکرو، به نوعی محیط نیمه فعالی از یک محیط برنامه نویسی را تولید کرد.

در این برنامه ها برای مدل کردن ورق از المان های دوبعدی PLANE223 و المان سه بعدی SOLID226 استفاده شده است. المان PLANE223 شامل ۸ گره و ۴ درجه آزادی در هر گره، و المان SOLID226 شامل ۲۰ گره و ۵ درجه آزادی در هر گره می باشد. خصوصیات و قابلیت های این دو المان مشابه هم می باشد.

۴- نتایج

قابل ذکر است معادلات حرکت ورق چرخان با کوپلینگ ترموالاستیک، غیر خطی بوده و تاکنون حل تحلیلی برای آن ارائه نشده است، بنابراین جهت اعتبار سنجی، می توان روش حل ارائه شده در این مقاله را که با استفاده از نرم افزار "انسیس" به دست آمده، فقط در حالت بدون چرخش، با نتایج آقای سان (که آن هم در حالت بدون چرخش به دست آمده) مقایسه نمود. به همین منظور در ادامه در ابتدا برای تصدیق نتایج روش حل با نتایج آقای زرن و سان، رابطه بین Q^{-1} و ضخامت ورق برای مد اول در حالت بدون دوران برای ورق توپر استخراج شده است.

مشخصات سیلیکون در سه دمای ۱۲۰، ۲۰۰، ۲۹۳ درجه کلون در جدول ۱ درج شده است (در انتهای مقاله). واضح است که E, k, c, α_T وابسته به دما هستند. باید توجه داشت که تغییرات دمایی ناشی از ارتعاشات ترموالاستیک بسیار ناچیز بوده $(k \gg 1)$ بنابراین می توان خصوصیات ماده را حین این ارتعاشات ثابت فرض کرد. سپس به استخراج و بررسی روابط بین Q^{-1} و سرعت زاویه ای، ضخامت و پاسخ فرکانسی سیستم برای ورق چرخان خواهیم پرداخت.

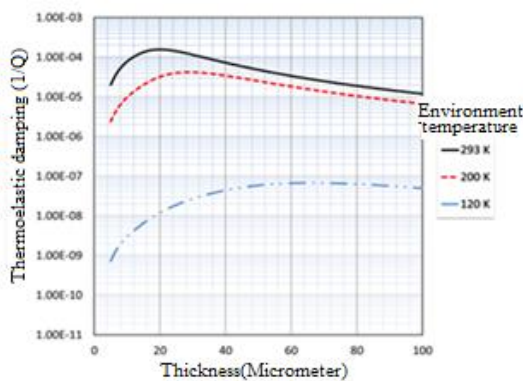
جدول (۱): مشخصات مکانیکی و گرمایی سیلیکون در دماهای مختلف [۳۲].

مشخصات مواد	واحد $(\mu MKSV)$	120 K	200 K	293 K
مدول یانگ	MPa	1.69e5	1.669e5	1.659e5
ضریب پواسون	-	0.22	0.22	0.22
چگالی	$Kg/(\mu m)^3$	2.33e-15	2.33e-15	2.33e-15

بنابراین در قسمت بعد، با استفاده از همین روش، نتایج حل ورق چرخان به دست می‌آید.

۴-۲- میرایی ترموالاستیک برای میکرو ورق دایروی دوار

در این قسمت اثر چرخش در میرایی ترموالاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در قسمت ۲ معادله ارتعاشی ورق دوار به دست آمد. ملاحظه شد که رفتار سیستم بر خلاف حالت بدون چرخش، غیرخطی بوده و حل تحلیلی برای آن نمی‌توان یافت. به همین منظور با توجه به ملاحظات کاربردی، یک ورق تاج دایره‌ای را که بر روی محوری نصب شده و شعاع خارجی آن آزاد می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود، که با سرعت دورانی ثابت Ω به دور محور عمود بر ورق می‌چرخد.



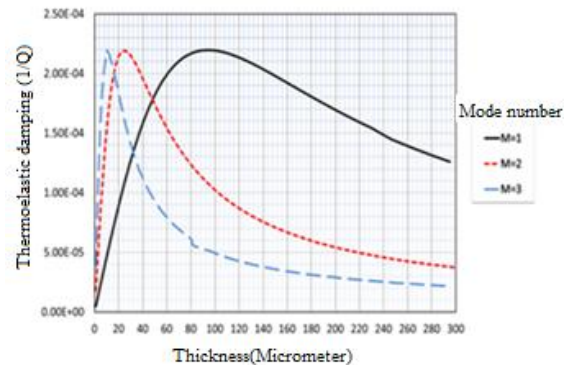
شکل (۵): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت در دماهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار و ساده ($a = 500\mu\text{m}$).

شعاع خارجی $b = 50\mu\text{m}$ به دست آمده است. دمای مرجع ۲۷ سانتیگراد در نظر گرفته شده و خصوصیات مکانیکی و حرارتی مطابق با جدول ۱ می‌باشد (در انتهای مقاله). تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به ضخامت در شکل ۶ نشان داده شده است. می‌توان مشاهده کرد که روند تغییرات میرایی منظم بوده و با افزایش ضخامت میرایی افزایش می‌یابد تا در ضخامت مشخصی که با فرکانس نوسانات رابط دارد، به مقدار بیشینه خود می‌رسد و سپس یک روند نزولی را طی می‌کند. در مدهای اول، دوم و سوم بیشینه میرایی یکسان می‌باشد و جالب توجه است که مقدار بیشینه برای مدهای اول تا سوم در محدوده ابعادی میکرو اتفاق می‌افتد.

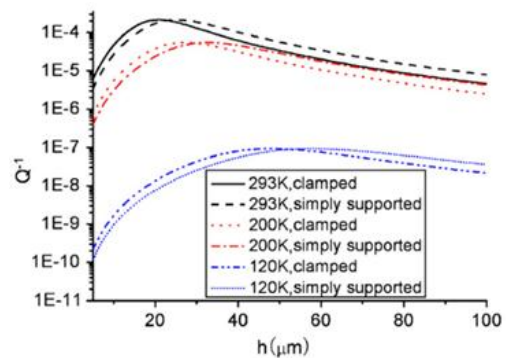
جدول (۲): ضخامت بحرانی برای $a/h = 50$ و مقایسه با نتایج آقای سان و زهر.

دما $T_0(K)$	۲۹۳	۲۰۰	۱۲۰
نتایج آقای زهر	۸۹.۹۹	۱۹۷.۷	۱۰۹۹
نتایج آقای سان	۹۰.۲۴	۱۹۸.۲	۱۱۰۲

دماهای مختلف برای دو شرط مرزی گیردار و ساده نمایش داده شده است. هدف از آوردن شکل ۴ مقایسه نتایج حل "انسیس" (شکل ۵) با نتایج سان می‌باشد.



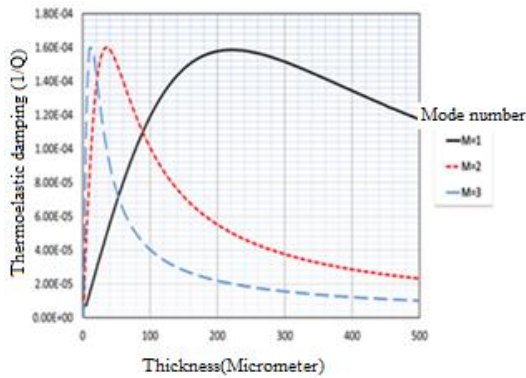
شکل (۳): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت ($a/h = 50$) برای مدهای اول تا سوم.



شکل (۴): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت در دماهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار و ساده ($a = 500\mu\text{m}$) [۳۲].

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود با افزایش دما، میرایی و تغییرات آن نسبت به ضخامت بیشتر می‌شود و در دماهای پایین این تغییرات به صفر تمایل می‌یابد و همچنین ضخامت بحرانی با کاهش دما افزایش می‌یابد.

با مقایسه گراف‌های شکل ۵ با گراف‌های شکل ۴ از مقاله سان برای شرایط مرزی گیردار، می‌توان تطابق خوبی بین گراف‌ها مشاهده کرد و خطایی کمتر از $1/1 \times 10^{-5}$ برای آن قائل شد. همچنین در جدول ۲ به مقایسه به دست آمده برای ضخامت بحرانی با نتایج تحلیلی آقای زهر [۱۰۲] و نتایج سان [۳۲] پرداخته شده است. نتایج به دست آمده در شکل‌های ۳ و ۵ با نتایج آقای سان [۳۲] (شکل‌های ۳ و ۲) بسیار نزدیک است و می‌توان نتیجه گرفت که این روش را می‌توان برای حل مسئله میرایی ترموالاستیک سازه‌ها با تقریب خوبی بکار برد.

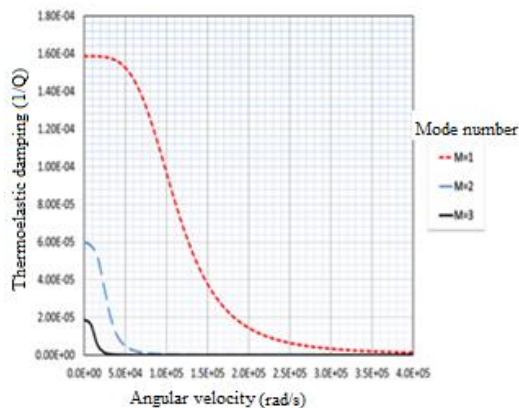


شکل (۷): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای سرعت‌های زاویه‌ای متفاوت (مد اول).

شکل ۹، تغییرات میرایی ترموالاستیک را نسبت به سرعت دورانی در دماهای مختلف نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که با کاهش دما اثر سرعت بر میرایی کاهش یافته به عبارت دیگر، در دماهای بالا با تغییر سرعت دورانی میرایی ترموالاستیک تغییرات بیشتری داشته و در دماهای پایین اثر سرعت قابل اغماض می‌باشد.

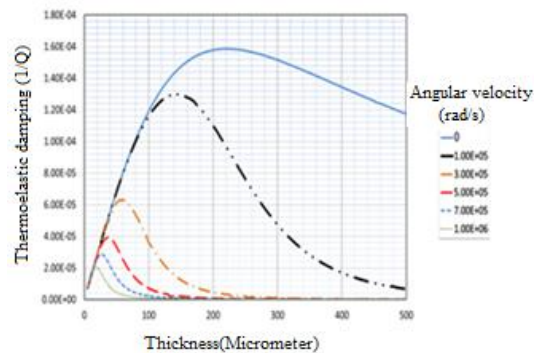
۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله دیفرانسیلی برای ارتعاشات متقارن محوری با میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی دوار به دست آمد سپس با استفاده از روش اجزاء محدود و به کمک نرم‌افزار "انسیس" ضریب کیفیت محاسبه شد. مشاهده شد که، میرایی ترموالاستیک در ابعاد معینی بیشترین مقدار را خواهد داشت، که این ابعاد علاوه بر دما، به سرعت چرخش نیز بستگی دارد.



شکل (۸): معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی برای مدهای اول، دوم و سوم.

روش عددی ANSYS	۱۱۰۹	۲۰۲.۸	۹۳.۵
خطا (%) (زتر- ANSYS)	۰/۹۱	۲/۵۷	۲/۹
خطا (%) (سان - ANSYS)	۰/۶۳	۲/۳۲	۳/۶

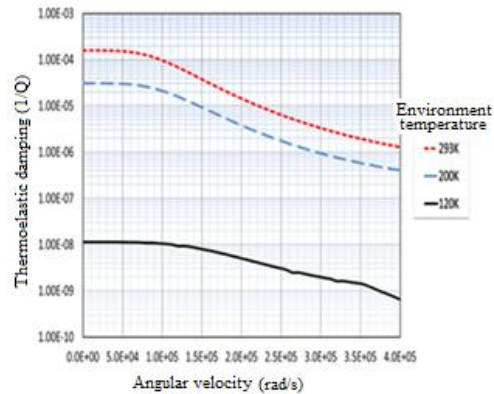


شکل (۶): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با

$$\text{نسبت ثابت } (a/h = 50)$$

نتایج برای ورق میکرو سیلیکونی دایروی با شعاع داخلی $a = 10\mu\text{m}$ و تغییرات میرایی نسبت به ضخامت برای مد اول با سرعت دورانی‌های مختلف در شکل ۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دورانی میرایی با روند منظمی کاهش می‌یابد به طوری که ضخامت بحرانی نیز به نسبت بیشینه میرایی کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود نرخ افزایش میرایی قبل از ضخامت بحرانی در سرعت دورانی‌های مختلف یکسان است. همچنین مشاهده می‌شود بین دو سرعت دورانی متفاوت در محدوده قابل توجه‌ای از ضخامت، میرایی با تغییر سرعت دورانی ثابت می‌ماند. شکل ۸ روند تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به سرعت دورانی را نشان می‌دهد، و به نوعی هم تصدیق برای شکل ۷ است و به گونه‌ای دیگر می‌توان مشاهده کرد که برای مد اول در سرعت‌های بین 0.5×10^5 تا 2×10^5 میرایی روند نزولی بیشتری دارد. به عبارت دیگر، برای مد اول در سرعت‌های دورانی پایین و همچنین در سرعت دورانی خیلی بالا تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به سرعت قابل اغماض است. البته توجه شود همان‌طور که در شکل مشخص می‌باشد با افزایش مد این بازه تغییر می‌کند. یعنی برای مد دوم در بازه 0 تا 0.7×10^5 و برای مد سوم 0 تا 0.3×10^5 روند نزول میرایی محسوس می‌باشد.

7. Srikar, V. T. and Senturia, S. D. "Thermoelastic Damping in Fine-Grained Poly Silicon Flexural Beam Resonators", IEEE Journal of Micro Electro Mechanical Systems, Vol. 11, No. 5, pp. 499-504, 2002.
8. Duwel, A., Weinstein, M., Gorman, J., Borenstein, J., and Ward, P. "Quality factors of MEMS gyros and the Role of Thermoelastic Damping", Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002.
9. Duwel, A., Weinstein, M., Gorman, J., Borenstein, J., and Ward, P. "Experimental Study of Thermoelastic Damping in MEMS Gyros" Sensor and Actuator A, Vol. 103, No. 1-2, pp. 70-75, 2003.
10. Houston, B.H., Photiadis, D.M., Vignola, J.F., Marcus, M.H., Liu, X., Czaplowski, D., Sekaric, L., Butler, J., Pehrsson, P., and Bucaro, J. A. "Loss Due to Transverse Thermoelastic Current Sinmicro Scale Resonators", Materials Science and Engineering A, Vol. 370, No. 6, pp. 407-411, 2004.
11. Khisaeva, Z.F., and Ostoja-Starzewski, M. "Thermoelastic Damping in Nano Mechanical Resonators with Finit Wave Speeds" Journal of Thermal Stress, Vol. 29, No. 3, pp. 201-216, 2006.
12. Wong, S.J., Fox, C.H.J., and McWilliam, S. "Thermoelastic Damping of the In-Plane Vibration of Thin Silicon Rings", Journal of Soundand Vibration, Vol. 293, No. 4, pp. 266-285, 2004.
13. Sudipto, K.D. and Aluru, N.R. "Theory of Thermoelastic Damping in Electro Statically Actuated Microstructures", Physical ReviewB, Vol.74, No. 14, pp. 144305, 2006.
14. Nayfeh, A.H. and Younis, M.I. "Modeling and Simulations of Thermoelastic Damping in Microplates", Journal of Micro Mechanics and Micro Engineering, Vol. 14, No. 12, pp. 1711-1717, 2004.
15. Prabhakar, S. and Vengallatore, S. "Theory of Thermoelastic Damping in Micro Mechanical Resonators with Two-Dimensional Heat Conduction", Journal of Micro Electro Mechanical Systems, Vol.17, No. 2, pp. 494-502, 2008.
16. Yi, Y.B. and Matin, M.A. "Eigenvalue Solution of Thermoelastic Damping in Beam Resonators Using a Finite Element Analisis". Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 129, No. 4, pp. 478-483, 2007.
17. Okamoto, H., Kojionomitsu, D., and Yamaguchi, H. "Thermo Elastic Damping in Gas Micromechanical Resonator", Physica Status Solidi(c), 2008.
18. Mohameed, R. and Elata, D. "Shield-Layers for Reducing Thermoelastic Damping in Resonating Silicon Bars", Microsystem Technology, Vol. 15, No. 2, pp. 323-331, 2009.
19. Serra, E. and Bonaldi, M. "a Finite Element Formulation for Thermoelastic Damping Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.78, No. 6, pp. 671-691, 2009.
20. Metcalf, T.H., Bradford, A., Pate, B., Photiadis, D.M., and Houston, B.H. "Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators", Applied Physics Letters, Vol. 95, No. 6, pp. 440-448 , 2009.



شکل (۹): معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی در دماهای مختلف برای مد اول.

جالب توجه است که مقدار میرایی در ضخامت بحرانی و نیز روند تغییرات میرایی برای مدهای مختلف یکسان است. به عبارت دیگر با تغییر فرکانس ارتعاش سیستم، ماکزیمم میرایی ثابت می‌ماند و فقط ضخامت بحرانی است که با افزایش شماره مد کاهش می‌یابد. این روند را می‌توان به‌عنوان یک قانون برای کلیه قطعات با هر هندسه‌ای در ابعاد مختلف بیان کرد. در اثر چرخش، میرایی رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد. جالب توجه است که با افزایش سرعت دوران ورق، میرایی و همچنین ضخامت بحرانی کاهش می‌یابد. پس سرعت یکی از عواملی است که می‌تواند میرایی ترموالاستیک را کاهش داده و یا حتی حذف کند. البته باید توجه داشت که دما می‌تواند اثر چرخش را حذف کند به‌طوری که با پایین آوردن دما اثر چرخش کم می‌شود.

۶-مراجع

1. Zener, C. "Internal Friction in Solids, I. Theory of Internal Friction in Reeds", Physical Review, Vol. 52, No. 4, pp. 230-235, 1937.
2. Zener, C. "Internal Friction in Solids, I. Theory of Internal Friction in Reeds", Physical Review, Vol. 53, No. 2, pp. 90-99, 1938.
3. Berry, B.S. "Precise Investigation of the Theory of Damping by Transverse Thermal Currents", Journal of Applied Physics Vol. 26, No. 12, pp. 1221-1224, 1955.
4. Roszhardt, R.V. "the Effect of Thermoelastic Internal Friction on the Q of Micromachined Silicon Resonators", IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, USA, pp.13-16, June 1990.
5. Yasumura, K.Y., Stowe, T. D., Kenny, T. W., and Rugar, D. "Thermo elastic energy dissipation in silicon nitride micro cantilever structures", Bulletin of the American Physical Society Vol. 44, No. 7, pp. 540, 1999.
6. Lifshitz, R. and Roukes, M. L. "Thermoelastic Damping in Micro-and Nano Mechanical Systems", Physical Review B, Vol. 61, pp. 5600-5609, 2000.

- World Academy of Science Engineering and Technology, Vol. 3, No. 8, pp. 177-182, 2009.
25. Hao, Z., Xu, Y. and Durgam, S.K. "a Thermal-Energy Method for Calculating Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, pp. 870-882, 2009.
 26. M'endeza, C., Paquayb, B.S., Klappab, I. and Raskina, J.P. "Effect of Geometrical Nonlinearity on MEMS Thermoelastic Damping", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 10, pp. 1579-1588, 2009.
 27. Choi, J., Cho, M. and Rhim, J. "Efficient Prediction of the Quality Factors of Micromechanical Resonators"⁴, *Journal of Sound and Vibration*, 2010.
 28. Yi, Y.B. "Geometric Effects on Thermoelastic Damping in MEMS Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, No. 8, pp. 588-599, 2008.
 29. Sun, Y., Fang, D., Saka, M., and Sohc, A.K. "Laser-Induced Vibrations of Micro-Beams Under Different Boundary Conditions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, No. 12, pp. 1993-2013, 2008.
 30. Kim, S. Na, Y., and Kim, J. "Thermoelastic Damping Effect on In-Extensional Vibration of Rotating Thin Ring", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 12, pp. 1227-1234, 2010.
 31. Xu, Y., Wang, R., Durgam, S.K., Hao, Z., and Vahala, L. "Numerical Models and Experimental Investigation of Energy Loss Mechanisms in SOI-
 21. Rezaazadeh, G., Vahdat, A.S., Pesteii, S.M., and Farzi, B. "Study of Thermoelastic Damping in Capacitive Micro-Beam Resonators Using Hyperbolic Heat Conduction Model". *Sensor & Transducers Journal*, Vol. 108, No. 9, pp. 54-72, 2009.
 22. Kumar, S. and Haque, M.A. "Reduction of Thermo-Elastic Damping with a Secondary Elastic Field", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 3, pp. 423-427, 2008.
 23. Prabhakar, S. and Vengallatore, S. "Thermoelastic Damping in Bilayered Micromechanical Beam Resonators", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 532, 2007.
 24. Choi, S.Y., Na, Y.H., and Kim, J.H. "Thermoelastic Damping of Inextensional Hemispherical Shell", *Based Tuning- Fork Gyroscopes*", *Sensor and Actuators A*, Vol. 152, No.1, pp. 63-74, 2009.
 32. Sun, Y., Tohmyoh, H. "Thermoelastic Damping of the Axisymmetric Vibration of Circular Plate Resonators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, No. 1-2, pp. 392-405, 2009.
 33. Hagedorn, P. and Dasgupa, A. "Vibration and Wave in Continuous Mechanical Systems", *Wiley & Son Ltd*, 2007.
 34. Heo, J.W. and Chung, J. "Vibration Analysis of a Flexible Rotating Disk with Angular Misalignment", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 274, No. 3-5, pp. 821-841, 2004.
 35. "Ansys Help" Release 12.0.1 UP20090415 Copyright 2009 SAS IP, Inc.