



## اثر معیارهای تسلیم هاسفورد، هیل درجه ۲ و غیر درجه ۲ بر منحنی‌های حد شکل دهی بر حسب مدل M-K

محمد حسین پورگلو<sup>۱\*</sup>، سیدمحمدحسین سیدکاشی<sup>۲</sup>، نرجس ولیان ایرج<sup>۳</sup>

۱- استادیار گروه ساخت و تولید، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

۲- استادیار گروه مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

۳- دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک ساخت و تولید، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

\* تهران، صندوق پستی: ۱۳۶-۱۶۷۸۵، m.hoseinpour@srttu.edu

### چکیده

### اطلاعات مقاله

یکی از پارامترهای مهم در پیش‌بینی شکل‌دهی ورق‌های فلزی، تأثیر معیارهای تسلیم بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی است. در این مقاله اثرات ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر معیارهای تسلیم ناهمسان‌گرد درجه ۲ هیل، مرتبه بالاتر هاسفورد و غیر درجه ۲ هیل، با توجه به موقعیت کرنش صفحه‌ای بررسی شده و همچنین اثر این معیارهای تسلیم و پارامترهای ضریب ناهمسان‌گردی نرمال، ضریب حساسیت به نرخ کرنش، توان کرنش‌سختی و درجه معیار تسلیم بر منحنی‌های حد شکل‌دهی بر حسب مدل M-K مورد مطالعه قرار گرفته است. اثرات متفاوت ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر روی کرنش‌های حدی سه معیار بالا تطابق خوبی با اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر روی سطوح مختلف تسلیم دارد. مقایسه‌ای بین اثر درجه معیار تسلیم و ضریب ناهمسان‌گردی نرمال برای معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل نیز صورت گرفته است. نتایج نشان داده است که انتخاب معیار تسلیم تأثیر بسیاری بر منحنی حد شکل‌دهی دارد.

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: ۰۱ آبان ۱۳۹۲  
پذیرش: ۲۹ آبان ۱۳۹۲  
ارائه در سایت: ۰۲ تیر ۱۳۹۳  
کلیدواژه‌ها:  
معیار تسلیم  
ناهمسان‌گردی  
منحنی‌های حد شکل‌دهی  
مدل M-K

## The effects of Hosford, Hill's quadratic and non-quadratic yield criteria on prediction of forming limit diagrams based on M-K Model

Mohammad Hosseinpour Gollo<sup>1</sup>, Seyed Mohammad Hossein Seyedkashi<sup>2</sup>, Narjes Valian Iraj<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher training University, Tehran, Iran

2- Mechanical Engineering Group, University of Birjand, Birjand, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher training University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 16785-136, Tehran, Iran, m.hoseinpour@srttu.edu

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 23 October 2013  
Accepted 20 November 2013  
Available Online 23 June 2014

Keywords:  
Yield Criterion  
Anisotropy  
Forming Limit Diagram  
M-K model

### ABSTRACT

One of the most important parameters in prediction of sheet metal forming process is the effect of yield criteria on prediction of the limit strains. In this paper, the effects of normal anisotropy coefficient on the Hill's quadratic, Hosford's higher-order, Hill's non-quadratic anisotropic yield criteria, is studied with attention to plane strain location. Also the effects of these yield criteria and normal anisotropy coefficient, strain rate sensitivity factor, strain hardening exponent and yield criterion exponent on the forming limit diagram have been discussed based on the M-K model. The different effects of normal anisotropy coefficient on the limit strains of all above-mentioned criteria have a good agreement with the effect of normal anisotropy coefficient on the yield different surfaces. The comparison has been made between yield criterion exponent and normal anisotropy coefficient effects on Hill's non-quadratic yield criterion. The results show that the proper selection of yield criterion has a significant influence on accuracy of the forming limit diagram.

### ۱- مقدمه

مطالعه شکل سطح تسلیم بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی در طول مسیرهای بارگذاری مختلف است. بررسی شکل‌دهی ورق‌های فلزی و حد تحمل یک فلز در برابر کرنش‌های مختلف معمولاً با استفاده از منحنی حد شکل‌دهی (FLD) انجام می‌گیرد. این منحنی، ترکیب کرنش‌های اصلی در صفحه بر اساس وقوع گلوئی را نشان داده و یک مرز بحرانی برای شروع گلوئی یا باریک‌شوندگی به دست می‌آورد.

کیلر و بکفن [۱] برای اولین بار منحنی حد شکل‌دهی را در عملیات

شکل‌دهی ورق‌های فلزی از مهم‌ترین روش‌های تولید در صنایع مختلف است. هزینه بالای ساخت قالب در عملیات شکل‌دهی، پیش‌بینی دقیقی از هندسه قالب، پارامترهای شکل‌دهی و رفتار مواد را می‌طلبد. شکل سطح تسلیم اثر زیادی بر الگوی تغییر شکل و در نتیجه تا حد زیادی بر پیش‌بینی پارامترهای شکل‌دهی، هندسه قالب و نیز شکل نهایی قطعه دارد. یکی از روش‌های تجزیه و تحلیل اثر معیار تسلیم بر روی مدل‌های شکل‌دهی عددی، بررسی و

### Please cite this article using:

M. Hosseinpour Gollo, S.M.H. Seyedkashi, N. Valian Iraj, The effects of Hosford, Hill's quadratic and non-quadratic yield criteria on prediction of forming limit diagrams based on M-K Model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 137-146, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

به هم نزدیک بوده، ولی برای معیارهای تسلیم هیل (۱۹۹۰) و گوتو نتیجه برعکس است.

فریدمن و پن [۱۱] اثر معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل، غیر درجه ۲ هیل و هاسفورد را بر سمت راست منحنی حد شکل‌دهی، براساس مدل M-K بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد، برای یک مقدار ضریب ناهمسان‌گردی مشخص، اثر ناهمسان‌گردی پلاستیک بر کرنش‌های حدی در کشش دو محوری، بستگی زیادی به معیار تسلیم دارد. داریانی و عضدی [۱۲] نشان دادند با تغییر درجه معیار تسلیم هیل (۱۹۷۹) تطابق خوبی بین نتایج تجربی و تئوری برای هر دو سمت منحنی حد شکل‌دهی به‌دست می‌آید.

باراتا-د-روچا و همکارانش [۱۳] یک کد برای پیش‌بینی شکل‌پذیری در شکل‌دهی ورق فلزی ارائه دادند. در این روش امکان استفاده از هر معیار تسلیم و هر قانون سخت‌شوندگی با تغییر چندین مسیر کرنش، بدون این‌که مشکل اساسی ایجاد شود، وجود دارد.

عاصم‌پور و همکارانش [۱۴] براساس مدل M-K، کرنش‌های حدی را تحت بارگذاری‌های تناسبی و غیر تناسبی تعیین کرده و اثر مسیر کرنش بر شکل و سطح منحنی حد شکل‌دهی را بررسی کردند. نورچشمه و گرین [۱۵] بیان کردند پیش‌بینی‌های منحنی حد شکل‌دهی با استفاده از مدل M-K تابعی از شکل سطح تسلیم نخستین بوده و تغییرات مسیر کرنش و مدل سخت‌شوندگی بر منحنی‌های حد شکل‌دهی تأثیر زیادی می‌گذارد.

یکی از مشکلات اصلی در تعیین منحنی‌های حد شکل‌دهی در روش M-K، نیاز به داشتن نقطه آزمایش برای یافتن فاکتور نقص نخستین است. غضنفری و عاصم‌پور [۱۶] با جایگزینی ناهمگنی هندسی با ناهمگنی مواد و با استفاده از نتایج تجربی برای مواد مختلف، یک قانون تجربی با در نظر گرفتن ضخامت ورق ارائه دادند که فاکتور ناهمگنی در آن حذف شده و امکان تعیین منحنی حد شکل‌دهی بدون انجام آزمایش وجود دارد.

در این مقاله اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر معیارهای تسلیم ناهمسان‌گرد درجه ۲ هیل [۶]، مرتبه بالاتر هاسفورد [۷] و غیر درجه ۲ هیل [۱۷] با توجه به موقعیت کرنش صفحه‌ای بررسی و مقایسه شده است. اثر پارامترهای ضریب ناهمسان‌گردی نرمال، ضریب حساسیت به نرخ کرنش، توان کرنش سختی و درجه معیار تسلیم بر منحنی‌های حد شکل‌دهی براساس مدل M-K برای فولاد کم کربن (AISI-۱۰۱۲) مطالعه شده است. تأثیر ضریب ناهمسان‌گردی و درجه معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل بر روی کرنش‌های حدی یک بار به صورت مستقل بررسی شده و بار دیگر با ثابت در نظر گرفتن نسبت  $\beta$ ، اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال و درجه معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل به صورت هم‌زمان بر کرنش‌های حدی بررسی و با حالت قبل مقایسه شده است.

## ۲- معیارهای تسلیم

معیارهای تسلیم ناهمسان‌گرد درجه ۲ هیل [۶]، مرتبه بالاتر هاسفورد [۷] و غیر درجه ۲ هیل [۱۷] برای تعیین قاعده‌ای برای پیش‌بینی اثر ناهمسان‌گردی بر منحنی حد شکل‌دهی مورد بررسی قرار گرفته است. در همه این معیارهای تسلیم، همسان‌گردی صفحه‌ای فرض شده و میزان ناهمسان‌گردی توسط نسبت کرنش  $R$  تعیین شده که به‌عنوان نسبت کرنش عرضی به کرنش ضخامت تحت شرایط کشش تک محوری تعریف می‌شود.

$$R = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_t} \quad (1)$$

این مقدار بسته به جهت آزمون در صفحه ورق تغییر کرده و مقدار متوسط

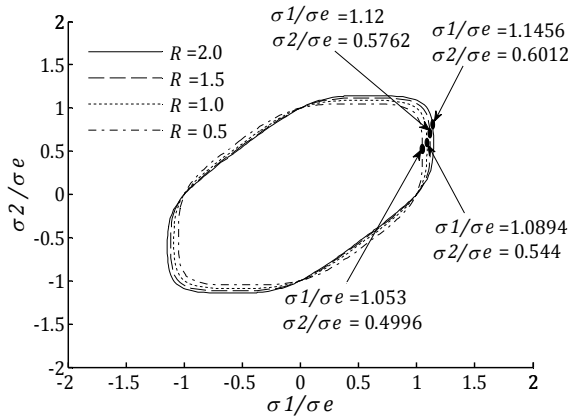
کشش ورق معرفی کردند. کرنش‌هایی که در این روش تجربی به‌دست می‌آید، در محل باریک‌شدگی وضعیت شکست و در مناطق دور از شکست، وضعیت ایمن را نشان می‌دهد. یکی از محدودیت‌های این منحنی این است که باید کرنش‌های کوچک (فرعی) بزرگ‌تر از صفر باشند. گودوین سمت راست منحنی حد شکل‌دهی را به ازای کرنش‌های کوچک‌تر از صفر ترسیم کرد [۲]. مارسینیاک و کوزینسکی [۳] براساس بررسی‌های تجربی در رابطه با موقعیت کرنش نمونه‌های تحت کشش دو محوری، مدل نقص در ورق نخستین (M-K) را پیشنهاد کردند. مدل M-K با فرض یک نقص در ورق به صورت کاهش ضخامت و توسعه آن براساس مدل گلوبی موضعی استوار است. این نقص توسط فاکتورهایی مانند تغییرات اندازه دانه، ترکیب و عناصر آلیاژی و تغییرات ضخامت ایجاد می‌شود. برای یک ناپایداری که در طول کشش دو محوری رخ می‌دهد، حالت تنش موضعی باید به کرنش صفحه‌ای نزدیک باشد. کرنش‌های حدی به‌دست آمده در مدل M-K تطابق خوبی با داده‌های تجربی دارد. برای بهتر شدن نتایج، چوی و همکارانش [۴]، و پیشبین و گیلیس [۵] روش عددی به نام JG را مطرح کردند. در این روش کرنش در سه مرحله اتفاق می‌افتد و به قانون جریان و شرایط مرزی موجود در سیستم تعادل که به مدل‌سازی رفتار مواد در طول فرآیند تغییر شکل منجر می‌شود، وابسته است.

کارهای نخستین براساس مدل M-K با استفاده از معیار تسلیم درجه ۲ هیل [۶] برای بررسی اثر پارامترهای سخت‌شوندگی، ناهمسان‌گردی پلاستیک و حساسیت به نرخ کرنش بر روی پیش‌بینی‌های کرنش حدی انجام شده است. با این حال نتایج تجربی مدل M-K با تابع تسلیم درجه ۲ هیل نشان می‌دهد که میزان قابلیت شکل‌دهی در کشش دو محوری بالاتر از واقعیت و برای کرنش صفحه‌ای پایین‌تر از واقعیت است.

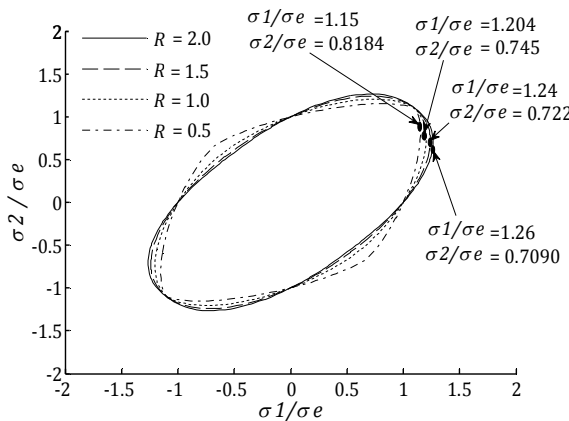
گراف و هاسفورد [۷] از مدل M-K برای معیار تسلیم لوگان- هاسفورد به منظور مشاهده حساسیت منحنی حد شکل‌دهی به پارامترهای مختلف معیار تسلیم از قبیل ضریب ناهمسان‌گردی نرمال، توان کرنش سختی، ضریب حساسیت به نرخ کرنش، درجه معیار تسلیم لوگان- هاسفورد و فاکتور نقص استفاده کردند. معیار تسلیم لوگان- هاسفورد نوع خاصی از معیار تسلیم هیل (۱۹۷۹) است. هیل، معیار تسلیم (۱۹۷۹) خود را با توجه به برخی از پارامترهای مورد نیاز آن در سال ۱۹۹۳ توسعه داد. بانابیک [۸] تأثیر شکل سطح تسلیم بر منحنی حد شکل‌دهی را برای معیار تسلیم هیل (۱۹۹۳) و بر اساس مدل M-K و ناپایداری سوئیفت، با استفاده از پارامتر  $\beta$  به‌عنوان نسبت تنش تسلیم تک محوری به تنش تسلیم دو محوری بررسی کرد و به این نتیجه رسید که افزایش پارامتر  $\beta$  کرنش‌های حدی را به ویژه در موقعیت تنش دو محوری افزایش می‌دهد.

زو و وینمان [۹] از معیار تسلیم هیل (۱۹۹۳) برای بررسی پارامترهای مواد بر پیش‌بینی منحنی حد شکل‌دهی استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد مکان هندسی معیار تسلیم اثر زیادی بر روی کرنش‌های حدی می‌گذارد.

برای بررسی اثر تابع تسلیم بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی، کرودا و تورگارد [۱۰] مدل M-K را در ارتباط با معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل، هیل (۱۹۹۰)، بارلات و لیان، و گوتو به کار برده و اثر این معیارهای تسلیم بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی را بررسی و مقایسه کردند. با محاسبه جهت‌گیری اولیه ناهمسان‌گردی که تأثیر زیادی بر پیش‌بینی منحنی حد شکل‌دهی می‌گذارد، به این نتیجه رسیدند که پیش‌بینی کرنش‌های حدی برای جهت‌گیری  $0^\circ$  و  $90^\circ$  در مورد معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل و بارلات و لیان



شکل ۳ معیار تسلیم هاسفورد با توان  $M=8$  برای مختلف  $R$  با توجه به تنش تسلیم نرمال در کشش تک‌محوری



شکل ۴ معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل برای مقادیر مختلف  $R$  با توجه به تنش تسلیم نرمال در کشش تک‌محوری

مطابق شکل موقعیت کرنش صفحه‌ای نسبت به کشش دو محوری معادل، که توسط دایره‌هایی توپر نشان داده شده است، برخلاف معیار تسلیم درجه ۲ هیل به مقادیر  $R$  کاملاً غیرحساس است. آخرین معیار تسلیم بررسی شده، معیار تسلیم غیردرجه ۲ هیل [۱۷] است.

$$f|\sigma_2 - \sigma_3|^M + g|\sigma_3 - \sigma_1|^M + h|\sigma_1 - \sigma_2|^M + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^M + b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^M + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^M = \bar{\sigma}^M \quad (5)$$

برای این معیار تسلیم، حالت همسان‌گرد صفحه‌ای ( $f=g$  و  $a=b$ ) چهار حالت داشته که در درستی سه حالت از چهار حالت تردید وجود دارد. به دلیل این‌که در این سه مورد شکل مکان هندسی تسلیم به‌ازای ترکیب‌های مختلف  $R$  و  $M$ ، مقعر به سمت خارج پیش‌بینی می‌شود. دراکر نشان می‌دهد تقعر به سمت خارج اصل تعامد را مخدوش می‌کند [۱۸]. بنابراین در این‌جا حالت چهارم از معیار تسلیم غیردرجه ۲ هیل بررسی شده است.

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^M + (1 + 2R)|\sigma_1 - \sigma_2|^M = 2(R + 1)\bar{\sigma}^M \quad (6)$$

این معیار تسلیم در تلاشی برای گسترش محدودیت‌های معیار تسلیم درجه ۲ هیل، به خصوص برای موادی با مقدار  $R$  کمتر از یک، توسعه پیدا کرده است. برخلاف دو معیار تسلیم گذشته، توان در معادله (۶) ثابت نیست، بلکه تابعی از  $R$  بوده و به صورت تجربی توسط نسبت  $\beta$  تعیین می‌شود.

$$\beta^M = \frac{1 + R}{2^{M-1}} \quad (7)$$

اگر در معادله (۶) توان ۲ انتخاب شود، این معیار به معیار تسلیم درجه ۲ هیل تبدیل می‌شود.

برای جداسازی اثر  $R$ ، طبق داده‌های وودتروپ و پیپرس نسبت  $\beta$  ثابت و معادل با  $1/11$  و صرف نظر از مقدار  $R$  در نظر گرفته شده است [۱۱]. این معیار

آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{R} = R = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (2)$$

اولین معیار، معیار تسلیم درجه ۲ هیل [۶] است که بدون توجه به اساس بلور شناختی مواد مطرح شده است.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + R(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (R + 1)\bar{\sigma}^2 \quad (3)$$

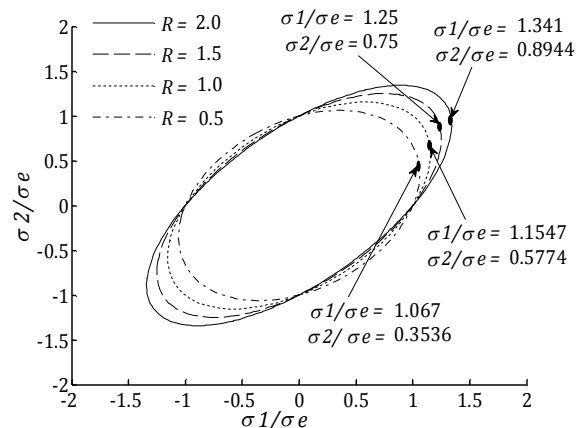
$\sigma_1$  و  $\sigma_2$  تنش‌های اصلی در صفحه و  $\bar{\sigma}$  تنش معادل بوده که معادل با تنش تسلیم در کشش تک محوری است. معیار تسلیم بالا در شکل ۱ برای مقادیر مختلف  $R$  به صورت یک بیضی ترسیم شده است. امتداد این بیضی در ربع اول با افزایش مقدار  $R$  افزایش یافته و حاکی از افزایش استحکام در کشش دو محوری، با افزایش مقدار  $R$  است.

حالت تنش برای کرنش صفحه‌ای در نقاطی قرار می‌گیرد که نرمال خارجی بر سطح تسلیم، موازی با محور  $\sigma_1/\sigma_e$  است. این نقاط از تلاقی سطح تسلیم با کرنش صفحه‌ای ( $\epsilon_T = 0$ ) به‌دست آمده که توسط دایره‌های توپر در شکل ۱ نشان داده شده است. مطابق شکل با افزایش مقدار  $R$  موقعیت کرنش‌های صفحه‌ای بالا می‌رود.

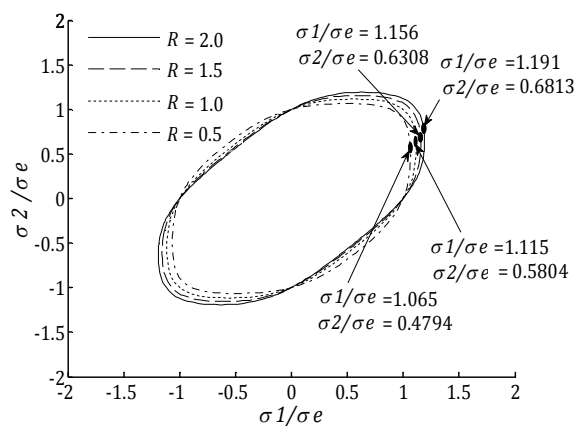
دومین معیار تسلیم، معیار مرتبه بالاتر هاسفورد [۷] است که براساس محاسبات کریستالوگرافی بالایی محدود شده است.

$$|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M + R|\sigma_1 - \sigma_2|^M = (R + 1)\bar{\sigma}^M \quad (4)$$

توان پیشنهاد شده  $M$ ، برای مواد BCC، ۶ و برای مواد FCC، ۸ است. این معیار تسلیم با هر دو توان پیشنهادی برای مقادیر مختلف  $R$  در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب رسم شده است.



شکل ۱ معیار تسلیم درجه ۲ هیل در حالت کرنش صفحه‌ای برای مقادیر مختلف  $R$  با توجه به تنش تسلیم نرمال در کشش تک‌محوری



شکل ۲ معیار تسلیم هاسفورد با توان  $M=6$  برای مقادیر مختلف  $R$  با توجه به تنش تسلیم نرمال در کشش تک‌محوری

در رابطه بالا  $R_m$  زبری ورق قبل از تغییر شکل،  $\varepsilon_{\square b}$  کرنش موثر در منطقه  $b$ ،  $d$  اندازه دانه و  $K$  ثابت مواد است.

معیارهای تسلیمی که در این مدل استفاده شده، معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل، غیر درجه ۲ هیل و مرتبه بالاتر هاسفوردهیل بوده که در بخش گذشته نیز به آن‌ها پرداخته شد. در این مدل تئوری، برای ورق رفتار کرنش‌سختی و حساسیت به نرخ کرنش در نظر گرفته شده است بنابراین تغییر شکل در نظر گرفته شده از قانون کرنش‌سختی پیروی می‌کند:

$$\bar{\sigma} = c \bar{\varepsilon}^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m \quad (11)$$

در رابطه بالا  $\bar{\sigma}$  تنش مؤثر،  $\varepsilon_{\square b}$  کرنش مؤثر،  $\varepsilon_{\square a}$  کرنش مؤثر،  $c$  ثابت مواد،  $n$  توان کرنش‌سختی و  $m$  ضریب حساسیت به نرخ کرنش است. نسبت تنش‌ها با  $\alpha$  و نسبت کرنش‌ها با  $\rho$  نشان داده شده است:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} \quad (12)$$

نسبت تنش‌ها ( $\alpha$ ) در بیرون شیار، در طول بارگذاری ثابت فرض شده است. نیروی  $F_1$  یعنی نیرو در راستای محور ۱ باید در بیرون شیار و درون آن با هم برابر باشد، در نتیجه معادله تعادل نیرو در مناطق  $a$  و  $b$  چنین خواهد بود:

$$F_{1a} = F_{1b} \quad (13)$$

همچنین فرض شده کرنش‌های موازی با شیار ( $\varepsilon_2$ ) در هر دو منطقه یکسان باشند.

$$d\varepsilon_{2a} = d\varepsilon_{2b} \quad \text{و} \quad \dot{\varepsilon}_{2a} = \dot{\varepsilon}_{2b} \quad (14)$$

پارامتر کمکی  $\varphi$  به‌عنوان نسبت تنش اصلی بزرگ‌تر به تنش مؤثر تعریف می‌شود:

$$\varphi = \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \quad (15)$$

اگر پارامتر  $\beta$  به‌عنوان نسبت کرنش مؤثر به کرنش اصلی تعریف شود، با استفاده از اصل کار پلاستیک، رابطه (۱۶) به‌دست می‌آید:

$$\beta = \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\varepsilon_1} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}_1} = \varphi(1 + \alpha\rho) \quad (16)$$

در این صورت با جای‌گذاری روابط بالا در رابطه (۱۳)، رابطه تراز نیرو را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\varphi_a \left( \beta a / \rho a \right)^m (\bar{\varepsilon}_a + d\bar{\varepsilon}_a)^n = f \varphi_b (\bar{\varepsilon}_b + d\bar{\varepsilon}_b)^n \left( \beta b / \rho b \right)^m \quad (17)$$

پارامترهای  $\alpha$ ،  $\rho$  و  $\varphi$  در این رابطه بسته به معیار تسلیم انتخابی، تعیین شده که روابط کامل آن در پیوست آورده شده است. محاسبه ضریب  $f$  در هر مرحله، نیاز به کرنش‌های جزئی در راستای ضخامت دارد که با فرض غیرقابل تراکم بودن (رابطه (۱۸)) قابل محاسبه است. روابط مربوط به جزء کرنش‌ها برای معیارهای تسلیم مختلف نیز در پیوست آمده است.

$$d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 \quad (18)$$

برای محاسبه کرنش‌های حدی ابتدا یک مسیر بارگذاری در منطقه سالم ورق ( $\rho_a$ ) در نظر گرفته می‌شود. با اعمال یک جزء کرنش برای نمونه  $(0.01 \times \varepsilon_{\square a})$  (= در منطقه  $a$  و جای‌گذاری روابط در معادله تراز نیرو (رابطه (۱۷)) و انجام محاسبات به کمک نرم‌افزار متلب<sup>۱</sup> و به روش عددی  $d\varepsilon_{\square b}$  به‌دست می‌آید. سپس جزء کرنش در مسیر در نظر گرفته شده افزایش و مراحل یاد شده تکرار می‌شود تا آن‌جا که نسبت جزء کرنش ایجاد شده در منطقه گلوبی به جزء کرنش اعمالی در منطقه سالم ورق ( $d\varepsilon_{\square b} / d\varepsilon_{\square a}$ ) بسیار بزرگ و از یک عدد بحرانی مثلاً ۱۰ عبور کند. این مرز بحرانی نشان‌دهنده آغاز پارگی است. در این حالت کرنش‌های حدی ورق در مسیر در نظر گرفته شده، به‌دست می‌آیند. روند محاسبه کرنش‌های حدی در مسیرهای مختلف ( $\rho = -0.5$ ) تا ( $\rho = 1$ ) تکرار می‌شود. کرنش‌های مؤثر در مناطق یکنواخت و دارای نقص، در هر مرحله از جمع مقادیر جزء کرنش‌های مؤثر مراحل قبل به‌دست می‌آیند. فلوجارت تحلیل ارائه شده جهت تعیین کرنش‌های حدی در شکل ۶ آورده شده است.

تسلیم برای چندین مقدار  $R$  در شکل ۴ رسم شده است. توان  $M$  در معیار تسلیم بالا طبق رابطه (۷) به‌ازای  $R$ های مختلف ۰.۵، ۱.۰، ۱.۵ و ۲.۰ به ترتیب ۱.۳۹، ۱.۷۶، ۲.۰۴ و ۲.۲۷ است.

با افزایش  $R$  در معیار تسلیم غیردرجه ۲ هیل در شکل ۴ سطح تسلیم در موقعیت کشش‌های دو محوری بزرگ‌تر شده، ولی در موقعیت کشش‌های تک‌محوری مقادیر مشابهی را پیش‌بینی می‌کند. همچنین با افزایش مقادیر  $R$  موقعیت کرنش صفحه‌ای، پایین می‌رود، درحالی که موقعیت کرنش صفحه‌ای برای معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل و مرتبه بالاتر هاسفوردهیل در شکل‌های ۱ تا ۳ بالا می‌رود. مکان کرنش صفحه‌ای و مقدار  $\beta$ ، موقعیت نسبی حالت تنش تسلیم در کشش دو محوری معادل به کشش تک‌محوری در هر یک از معیارهای تسلیم را نشان می‌دهد. این ویژگی سطح تسلیم بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی با مدل M-K تاثیر زیادی می‌گذارد. هدف از این مقاله، بررسی اثر معیارهای تسلیم بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی در عملیات کشش ورق برای یک مقدار  $R$  داده شده و همچنین اثر مقدار  $R$  و برخی از پارامترهای مؤثر مواد از جمله ضریب حساسیت به نرخ کرنش و توان کرنش‌سختی، بر پیش‌بینی کرنش‌های حدی برای یک معیار تسلیم داده شده، است.

### ۳- مدل M-K

در این مدل، ماده صلب و پلاستیک فرض شده و دارای همسان‌گردی صفحه‌ای است [۱۹]. ناهمگنی و نقص در ورق به صورت کاهش ضخامت ورق و به شکل یک شیار عمود در جهت کرنش اصلی، در نظر گرفته شده است (شکل ۵).

فاکتور نقص  $f$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

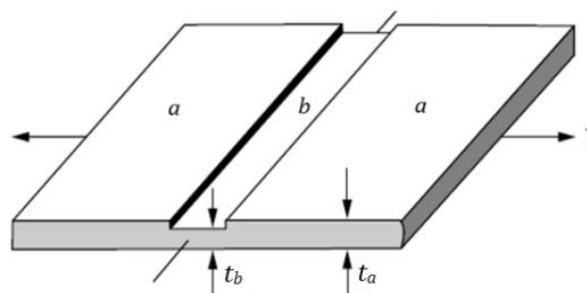
$$f = \frac{t_b}{t_a} \quad (8)$$

در این‌جا  $t_b$  و  $t_a$  به ترتیب ضخامت در مناطق یکنواخت و دارای نقص است. نسبت ضخامت در داخل و خارج نقص قبل از اعمال تنش نیز ضریب ناهمگنی نخستین  $f$  است.

ضریب ناهمگنی نخستین در مقدار کرنش‌های حدی تأثیر زیادی می‌گذارد، بنابراین برای افزایش دقت نتایج تئوری می‌توان ضریب ناهمگنی نخستین را به صافی سطح ورق نسبت داد [۱۸]. براساس بررسی‌های انجام شده توسط استاکوویکر، زبری سطح در حین شکل‌دهی ثابت نبوده و میزان تغییرات آن به زبری نخستین، اندازه دانه و مقدار کرنش بستگی دارد [۲۰]. درحین تغییر شکل ورق فاکتور نقص براساس رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$f_0 = \frac{t_{0a} - 2(R_{m0} + kd_0^{0.5}\bar{\varepsilon}_b)}{t_{0a}} \quad (9)$$

$$f = \frac{t_{0a} - 2(R_{m0} + kd_0^{0.5}\bar{\varepsilon}_b)}{t_{0a}} e^{\varepsilon_{3b} - \varepsilon_{3a}} \quad (10)$$



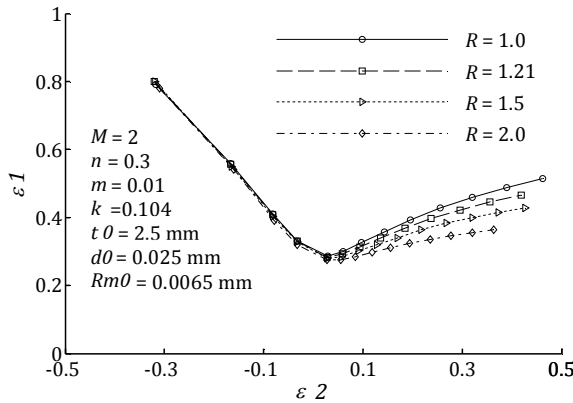
شکل ۵ شماتیکی از مدل M-K [۱۹]

۴- نتایج و بحث

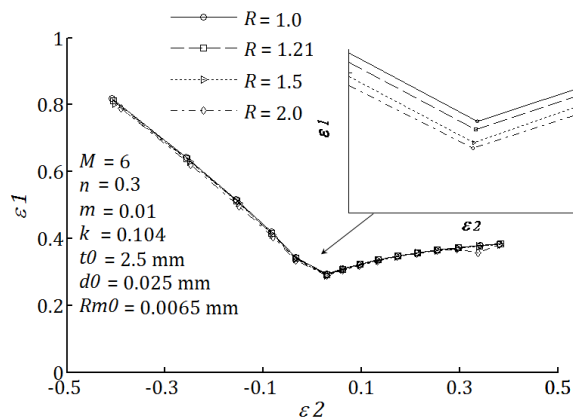
در این مقاله اثر پارامترهای ضریب ناهمسان‌گردی  $R$ ، توان کرنش سختی  $n$  و ضریب حساسیت به نرخ کرنش  $m$  بر روی منحنی‌های حد شکل‌دهی و بر اساس مدل M-K برای فولاد کم کربن (AISI-۱۰۱۲) بررسی شده است. خواص این آلیاژ در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱ خواص ورق فولاد کم کربن (AISI-۱۰۱۲) [۲۰]

$R$	$m$	$n$	$K$	$R_m$ (mm)	$d$ (mm)	$t$ (mm)
۱/۲۱	۰/۰۱	۰/۳	۰/۱۰۴	۰/۰۶۵	۰/۰۲۵	۲/۵



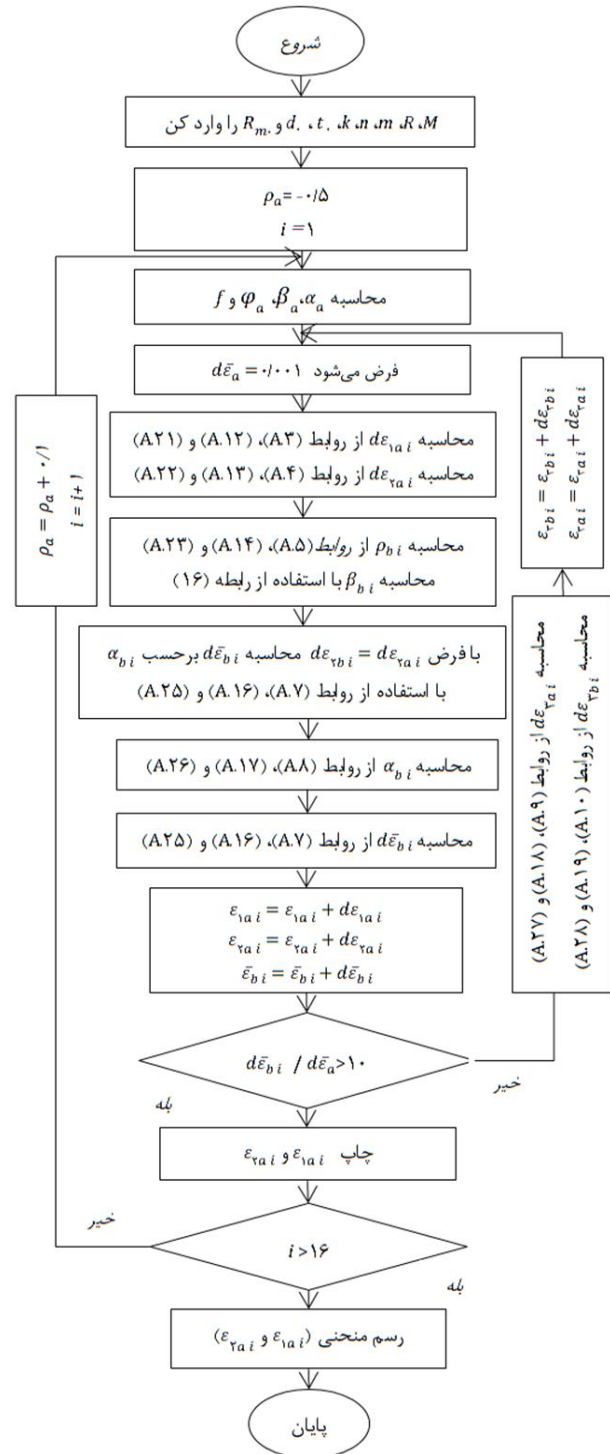
شکل ۷ اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر منحنی حد شکل‌دهی با استفاده از معیار تسلیم درجه ۲ هیل و مدل M-K بر روی ورق فولاد کم کربن



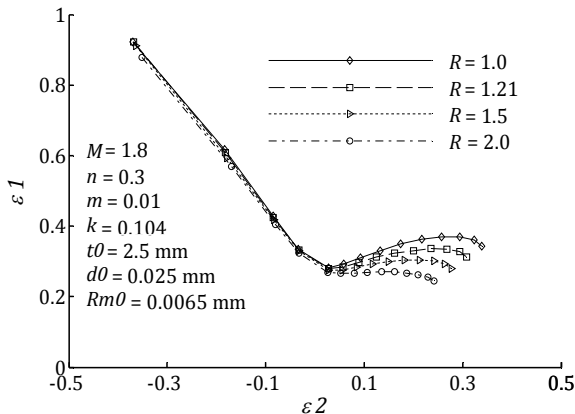
شکل ۸ اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم هاسفورد ( $M=6$ ) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

در ادامه تأثیر ضریب ناهمسان‌گردی  $R$  بر منحنی‌های حد شکل‌دهی ورق بررسی شده است. اثر این ضریب با اثر آن بر سطح تسلیم که در بخش قبل بررسی شد، قابل توجه بوده و مطابقت خوبی داشته است. در شکل ۷ اثر این ضریب براساس معیار تسلیم درجه ۲ هیل نشان داده شده است. ضریب ناهمسان‌گردی نرمال براساس این معیار تسلیم، اثری متفاوت بر دو سمت منحنی حد شکل‌دهی دارد. در حالی که افزایش ضریب ناهمسان‌گردی سبب کاهش کرنش‌های حدی در سمت راست منحنی می‌شود، این ضریب اثر چندانی بر سمت چپ منحنی ندارد. با افزایش  $R$  سطح تسلیم معیار تسلیم درجه ۲، در موقعیت کشش دو محوری به مقدار زیادی بزرگ‌تر می‌شود. با توجه به این اثر می‌توان کاهش قابل ملاحظه شکل‌دهی در سمت راست منحنی حد شکل‌دهی را در اثر افزایش  $R$  و براساس این معیار تسلیم توجیه کرد ولی در موقعیت کشش تک محوری اثر  $R$  بر سطح تسلیم چندانی نبوده که این بیانگر تأثیر کم  $R$  بر کرنش‌های حدی سمت چپ منحنی حد شکل‌دهی است. هرچند ضریب  $R$  تأثیر زیادی بر سمت چپ منحنی حد شکل‌دهی ندارد، ولی افزایش آن سبب کاهش بسیار کم کرنش در سمت چپ منحنی می‌شود.

در شکل‌های ۸ و ۹، منحنی حد شکل‌دهی براساس هر دو توان پیشنهادی معیار تسلیم هاسفورد ترسیم شده است. در این معیار تسلیم اثر ضریب ناهمسان‌گردی  $R$  بر منحنی‌های حد شکل‌دهی بسیار ناچیز است. در شکل ۱۰ برای بررسی اثر توان در معیار تسلیم هاسفورد بر کرنش‌های حدی، منحنی حد شکل‌دهی برای هر دو توان پیشنهادی هاسفورد و به ازای یک مقدار مشخص  $R$  ترسیم شده است.



شکل ۹ فلوجارت جهت تعیین کرنش‌های حدی براساس مدل M-K



شکل ۱۲ اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر منحنی حد شکل‌دهی با استفاده از معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

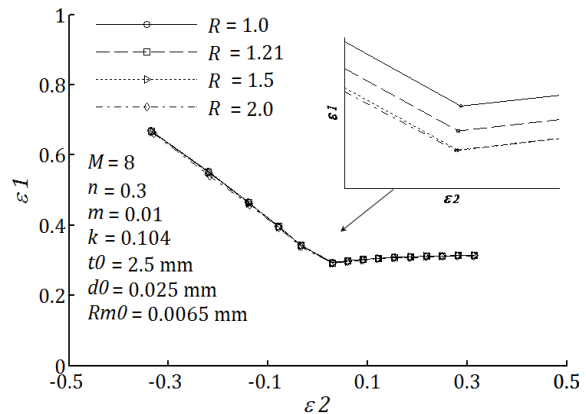
در شکل ۱۲ اثر ضریب  $R$  با یک مقدار ثابت  $M$  نشان داده شده که برای هر دو سمت منحنی مطابق با اثر ناهمسان‌گردی در منحنی حد شکل‌دهی بر اساس معیار تسلیم درجه ۲ هیل است (شکل ۷).

مقایسه اثر  $R$  بر روی منحنی‌های حد شکل‌دهی برای معیارهای تسلیم بررسی شده (شکل‌های ۷، ۸، ۹ و ۱۲) نشان می‌دهد ضریب ناهمسان‌گردی اثر زیادی بر کرنش‌های حدی برای معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل و غیر درجه ۲ هیل می‌گذارد، در حالی که برای معیار تسلیم مرتبه بالاتر هاسفورد تأثیر چندانی بر کرنش‌های حدی ندارد. این اثر متفاوت ضریب ناهمسان‌گردی بر روی کرنش‌های حدی برای معیارهای مختلف تسلیم را می‌توان با اثر  $R$  بر سطوح تسلیم توجیه کرد. تغییرات ضریب ناهمسان‌گردی بر سطح تسلیم درجه ۲ هیل و غیر درجه ۲ هیل تأثیر زیادی گذاشته و سبب افزایش سطح تسلیم می‌شود، ولی تغییرات  $R$  تأثیر چندانی بر سطح تسلیم معیار هاسفورد نمی‌گذارد (شکل‌های ۱۱ الی ۴).

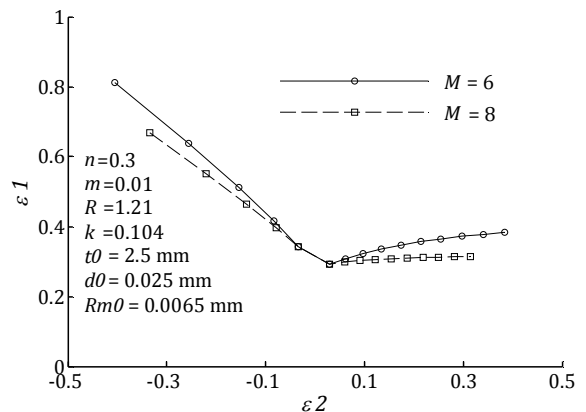
در شکل ۱۳ ضریب ناهمسان‌گردی ثابت فرض شده و اثر  $M$  بر منحنی حد شکل‌دهی بررسی شده است. با افزایش  $M$  در سمت راست منحنی، کرنش‌های حدی افزایش و در سمت چپ کاهش می‌یابد. اثر درجه معیار تسلیم بر روی منحنی‌های حد شکل‌دهی با توجه به اثر آن بر سطح تسلیم که در شکل ۱۴ نشان داده شده، قابل توجیه است. با افزایش درجه معیار تسلیم در حالت کشش دو محوری با فرض ثابت بودن نسبت تنش‌ها، تنش مؤثر افزایش می‌یابد. بنابراین در اثر بالا رفتن درجه معیار تسلیم، جسم با اعمال تنش‌های کمتری به حد تسلیم رسیده، یعنی مقاومت جسم در برابر تغییر شکل کاهش یافته و کرنش‌های بیشتری را تا مرز گلوپی شدن تحمل می‌کند. در سمت چپ منحنی که بخشی از آن مربوط به کشش تک‌محوری ( $\alpha=0$ ) است، تنش مؤثر به درجه معیار تسلیم بستگی نداشته و در نتیجه کرنش‌های حدی با تغییر درجه معیار تسلیم تغییر نمی‌کنند، ولی در بخشی که نسبت تنش‌ها مخالف صفر است، براساس رابطه (۱۹) نسبت تنش‌ها ( $\alpha$ ) علاوه بر نسبت کرنش‌ها ( $\rho$ ) به ضریب ناهمسان‌گردی ( $R$ ) و درجه معیار تسلیم ( $M$ ) بستگی داشته و با افزایش درجه معیار تسلیم کاهش می‌یابد.

$$\alpha = \frac{\left[ \frac{(1+2R)(1+\rho)}{(1-\rho)} \right]^{\frac{1}{M-1}} - 1}{\left[ \frac{(1+2R)(1+\rho)}{(1-\rho)} \right]^{\frac{1}{M-1}} + 1} \quad (19)$$

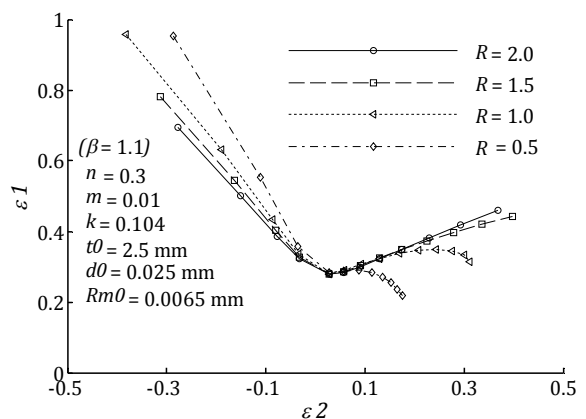
از آن‌جا که تغییر در نسبت تنش، تنش مؤثر و در نتیجه مقاومت در برابر تغییر شکل جسم را تغییر می‌دهد، افزایش درجه معیار تسلیم سبب کاهش نسبت تنش و کاهش مقاومت در برابر تغییر شکل شده و کرنش‌های حدی در سمت چپ منحنی را کاهش می‌دهد.



شکل ۱۳ اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم هاسفورد ( $M=8$ ) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن



شکل ۱۴ اثر توان در معیار تسلیم مرتبه بالاتر هاسفورد بر منحنی حد شکل‌دهی براساس مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

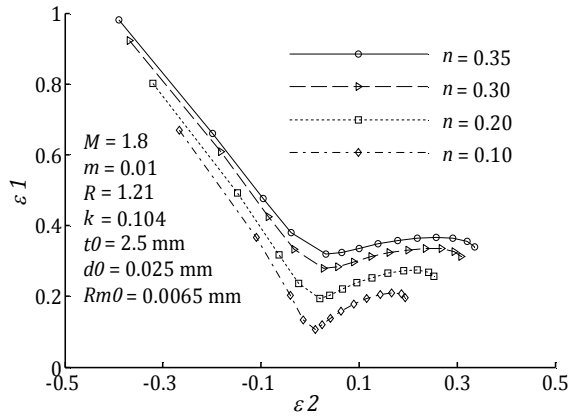


شکل ۱۵ اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر منحنی حد شکل‌دهی با استفاده از معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل ( $\beta=1/1$ ) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

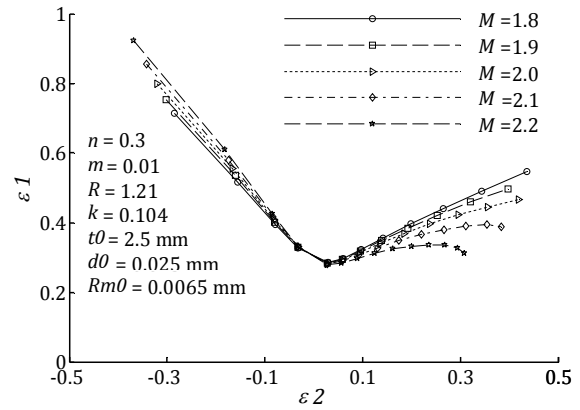
نتایج نشان می‌دهد، موقعیت کرنش‌های حدی برای معیار تسلیم هاسفورد با درجه ۶، بالاتر از درجه ۸ است.

در شکل ۱۱، اثر ضریب ناهمسان‌گردی بر منحنی‌های حد شکل‌دهی برای معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل براساس داده‌های وود تروپ-پیروس [۱۱] و نسبت  $\beta=1/1$  ترسیم شده است.

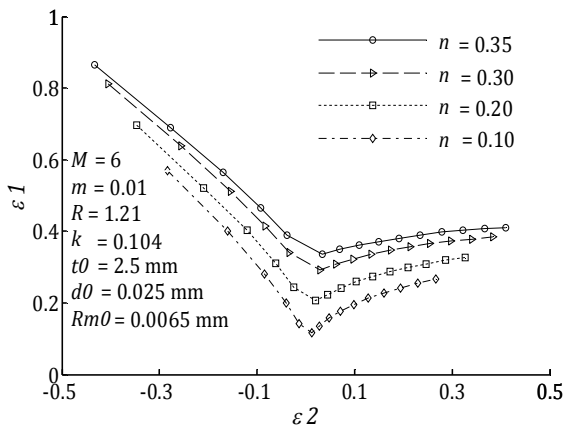
مطابق شکل ۱۱ برای معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل، کرنش‌های حدی با افزایش مقدار  $R$ ، در سمت راست منحنی بر خلاف معیار تسلیم درجه ۲ هیل، افزایش می‌یابد. این اثر متضاد  $R$ ، از فرض ثابت بودن  $\beta$  که اثر دو پارامتر  $M$  و  $R$  را به صورت هم‌زمان نشان داده است، ناشی می‌شود.



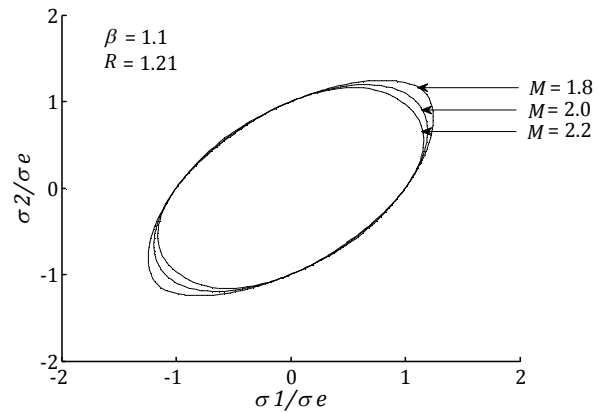
شکل ۱۶ اثر توان کرنش سختی بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم غیردرجه ۲ هیل و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن.



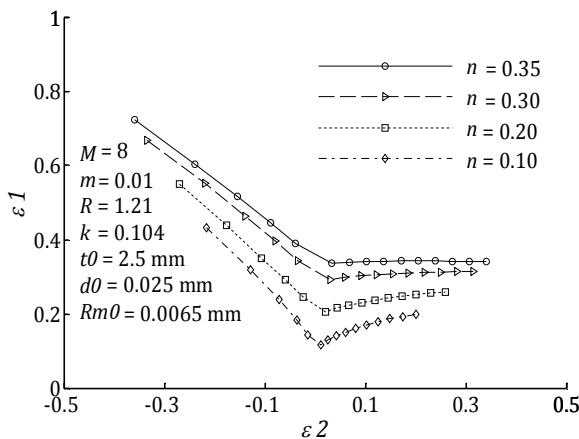
شکل ۱۳ اثر درجه معیار تسلیم هیل بر منحنی حد شکل‌دهی با مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن



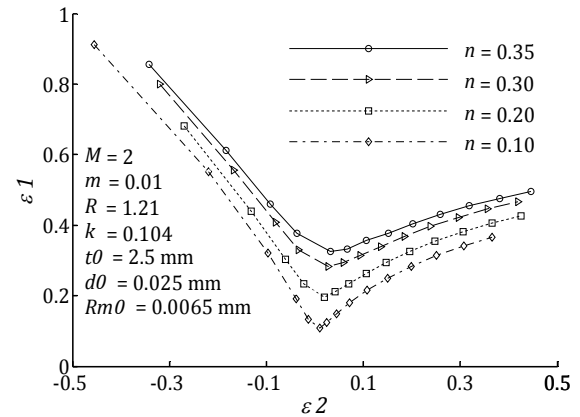
شکل ۱۷ اثر توان کرنش سختی بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم هاسفورد (M=۶) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن



شکل ۱۴ اثر درجه معیار تسلیم هیل بر سطح تسلیم معیار غیر درجه ۲ هیل



شکل ۱۸ اثر توان کرنش سختی بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم هاسفورد (M=۸) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

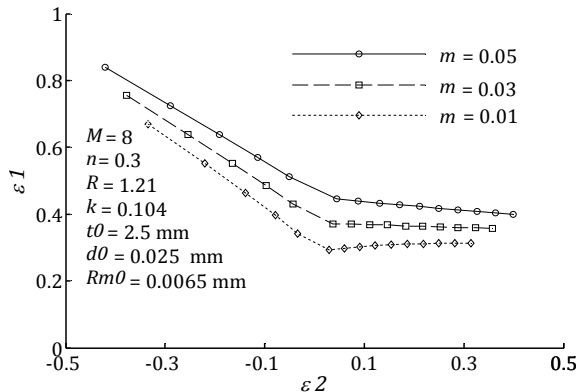


شکل ۱۵ اثر توان کرنش سختی بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم درجه ۲ هیل و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

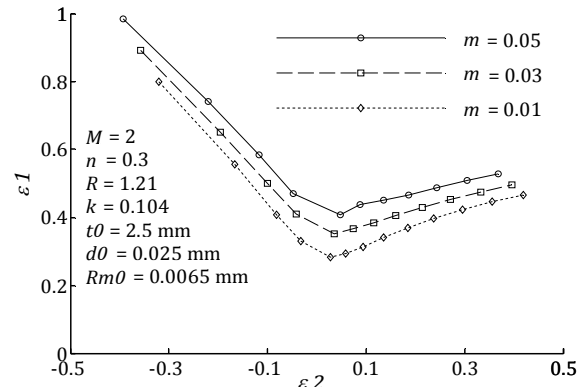
نتایج بدست آمده نشان می‌دهد، افزایش توان کرنش سختی، برای همه معیارهای تسلیم بررسی شده سبب افزایش کرنش‌های حدى شده و شکل‌دهی ورق را بهبود می‌بخشد. از این رو ورق‌های با  $n$  بزرگ‌تر برای فرآیندهای شکل‌دهی مناسب‌تر است.

ضریب حساسیت به نرخ کرنش نیز اثری مشابه با توان کرنش سختی بر کرنش‌های حدى می‌گذارد. در شکل‌های ۱۹ تا ۲۲ این اثر بر معیارهای تسلیم مختلف نشان داده شده است. این پارامتر برای همه معیارهای تسلیم بررسی شده سبب افزایش کرنش‌های حدى می‌شود.

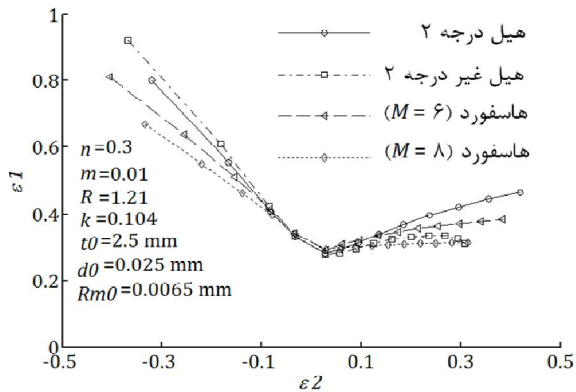
کرنش‌های حدى سمت راست منحنی حد شکل‌پذیری مربوط به شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ نیز با هم مقایسه شده‌اند. در شکل ۱۱ با افزایش  $M$  و  $R$  کرنش‌های حدى در سمت راست منحنی افزایش می‌یابد. در شکل ۱۳ با افزایش  $M$  به‌ازای یک مقدار ثابت  $R$ ، کرنش‌های حدى افزایش یافته و این در حالی است که در شکل ۱۲ با افزایش  $R$  به‌ازای مقدار مشخص  $M$ ، کرنش‌های حدى کاهش می‌یابند. می‌توان نتیجه گرفت اثر تغییرات  $M$  بر  $R$  غالب بوده است. اثر توان کرنش سختی  $n$  بر منحنی حد شکل‌دهی در شکل ۱۵ برای معیار تسلیم درجه ۲ هیل، شکل ۱۶ برای معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل و شکل‌های ۱۷ و ۱۸ برای توان‌های پیشنهادی معیار تسلیم هاسفورد بررسی شده است.



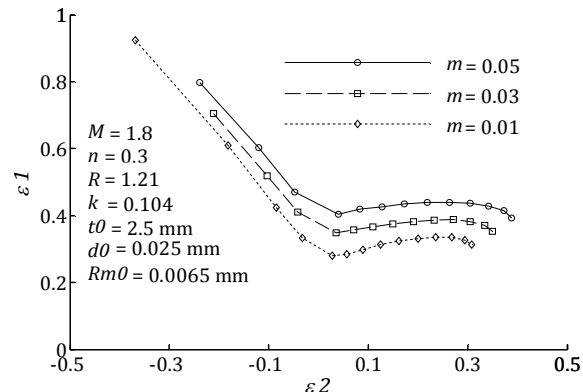
شکل ۲۲ اثر ضریب حساسیت به نرخ کرنش بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم هاسفورد ( $M=8$ ) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن.



شکل ۱۹ اثر ضریب حساسیت به نرخ کرنش بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم درجه ۲ هیل و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن



شکل ۲۳ اثر معیارهای تسلیم مختلف بر منحنی حد شکل‌دهی براساس مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن.



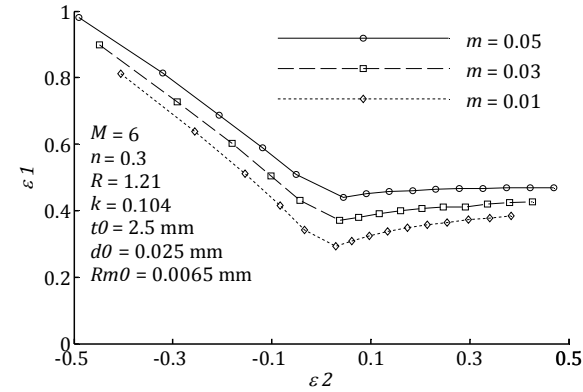
شکل ۲۰ اثر ضریب حساسیت به نرخ کرنش بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

نتایج نشان می‌دهد، تغییرات ضریب ناهمسان‌گردی بر سطح تسلیم درجه ۲ و غیردرجه ۲ هیل تأثیر زیادی گذاشته و سبب افزایش سطح تسلیم می‌شود، ولی تغییرات  $R$  تأثیر چندانی بر سطح تسلیم معیار هاسفورد نمی‌گذارد. همچنین با افزایش مقادیر  $R$  موقعیت کرنش صفحه‌ای، برای معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل پایین می‌رود، درحالی که موقعیت کرنش صفحه‌ای برای معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل و مرتبه بالاتر هاسفورد بالا می‌رود.

اثر هر سه معیار تسلیم بالا و پارامترهای ضریب ناهمسان‌گردی نرمال، ضریب حساسیت به نرخ کرنش، توان کرنش‌سختی و درجه معیار تسلیم بر منحنی‌های حد شکل‌دهی بررسی شده و نتایج به شرح زیر آورده شده است:

۱- ضریب ناهمسان‌گردی نرمال اثر زیادی بر کرنش‌های حدی برای معیارهای تسلیم درجه ۲ هیل و غیر درجه ۲ هیل می‌گذارد، در حالی که تأثیر چندانی بر کرنش‌های حدی برای معیار تسلیم مرتبه بالاتر هاسفورد ندارد. این اثر متفاوت ضریب ناهمسان‌گردی بر کرنش‌های حدی برای معیارهای مختلف تسلیم با اثر  $R$  بر سطوح تسلیم قابل توجیه است.

۲- مقایسه کرنش‌های حدی براساس چهار معیار تسلیم ارائه شده نشان داده شده که کرنش‌های حدی برای معیار تسلیم درجه ۲ هیل بیش از کرنش‌های حدی براساس سایر معیارهای تسلیم است. همچنین با بالا رفتن توان  $M$  در معیار تسلیم هاسفورد کرنش‌های حدی کاهش می‌یابند. شایان یاد است که معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل، سطوح کرنشی حدی مشابهی با معیار تسلیم هاسفورد با درجات متفاوت را به نمایش می‌گذارد. بررسی اثر معیارهای تسلیم بالا بر کرنش‌های حدی نشان می‌دهد انتخاب معیار تسلیم پارامتر مهمی در تعیین کرنش‌های حدی منحنی حد شکل‌دهی است. چنانچه مشاهده شد، ضریب ناهمسان‌گردی نسبت به سایر پارامترهای بررسی شده،



شکل ۲۱ اثر ضریب حساسیت به نرخ کرنش بر منحنی حد شکل‌دهی براساس معیار تسلیم هاسفورد ( $M=6$ ) و مدل M-K بر ورق فولاد کم کربن

در شکل ۲۳ اثر معیارهای تسلیم بر کرنش‌های حدی بررسی شده است. مطابق شکل کرنش‌های حدی حاصل از تجزیه و تحلیل معیار تسلیم درجه ۲ هیل بیش از کرنش‌های حدی براساس سایر معیارهای تسلیم است. همچنین با بالا رفتن توان  $M$  در معیار تسلیم هاسفورد، کرنش‌های حدی کاهش می‌یابند. معیار تسلیم غیردرجه ۲ هیل سطوح کرنشی مشابهی با معیار تسلیم هاسفورد را به نمایش می‌گذارد.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله اثر ضریب ناهمسان‌گردی نرمال بر معیارهای تسلیم ناهمسان‌گرد درجه ۲ هیل (۱۹۴۸)، مرتبه بالاتر هاسفورد (۱۹۷۹) و غیر درجه ۲ هیل (۱۹۷۹)، با توجه به موقعیت کرنش صفحه‌ای بررسی شده است.



$$d\varepsilon_{1a} = \frac{\varphi_a d\bar{\varepsilon}_a (1 + R(1 - \alpha_a))}{(1 + R)} \quad (A.3)$$

$$d\varepsilon_{2a} = \frac{\varphi_a d\bar{\varepsilon}_a (\alpha_a - R(1 - \alpha_a))}{(1 + R)} \quad (A.4)$$

با استفاده از روابط (A.3) و (A.4) و در نظر گرفتن نسبت تنش‌ها، نسبت کرنش‌ها ( $\rho$ ) برابر است با:

$$\rho = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\alpha - R(1 - \alpha)}{1 + R(1 - \alpha)} \quad (A.5)$$

با استفاده از روابط (A.4) و (A.5) جزء کرنش حدی  $d\varepsilon_{2b}$  برای منطقه b برابر است با:

$$d\varepsilon_{2a} = \frac{d\bar{\varepsilon}_b (\alpha_b - R(1 - \alpha_b))}{(1 + R)} \left\{ \frac{1 + R}{1 + \alpha_b^2 + R(1 - \alpha_b)^2} \right\}^{1/2} \quad (A.6)$$

با استفاده از رابطه بالا کرنش مؤثر در منطقه b از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d\bar{\varepsilon}_b = \frac{d\varepsilon_{2a} (1 + R)}{(\alpha_b - R(1 - \alpha_b))} \left\{ \frac{1 + \alpha_b^2 + R(1 - \alpha_b)^2}{1 + R} \right\}^{1/2} \quad (A.7)$$

با جای‌گذاری رابطه بالا در رابطه (A.7)، رابطه تراز نیرو، برای معیار تسلیم درجه ۲ هیل به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\bar{\varepsilon}_a + d\bar{\varepsilon}_a)^n \left( \frac{\beta_a}{\rho_a} \right)^m \varphi_a = f(\bar{\varepsilon}_b) + \frac{d\varepsilon_{2a} (1 + R)}{\alpha_b - R(1 - \alpha_b)} \left\{ \frac{1 + \alpha_b^2 + R(1 - \alpha_b)^2}{1 + R} \right\}^{1/2} n \left( \frac{\beta_b}{\rho_b} \right)^m \varphi_b \quad (A.8)$$

کرنش‌های ضخامتی نیز به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$d\varepsilon_{3a} = -\varphi_a \frac{d\bar{\varepsilon}_a (1 + \alpha_a)}{1 + R} \quad (A.9)$$

$$d\varepsilon_{3b} = -\varphi_b \frac{d\bar{\varepsilon}_b (1 + \alpha_b)}{1 + R} \quad (A.10)$$

پارامتر  $\varphi$  برای معیار تسلیم مرتبه بالاتر هاسفورد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi = \left\{ \frac{(1 + R)}{1 + \alpha^M + R(1 - \alpha)^M} \right\}^{1/M} \quad (A.11)$$

با استفاده از رابطه (A.2)، کرنش‌های جزئی عبارتند از:

$$d\varepsilon_{1a} = \frac{\varphi_a^{M-1} d\bar{\varepsilon}_a (1 + R(1 - \alpha_a)^{M-1})}{(1 + R)} \quad (A.12)$$

$$d\varepsilon_{2a} = \frac{\varphi_a^{M-1} d\bar{\varepsilon}_a (\alpha_a^{M-1} - R(1 - \alpha_a)^{M-1})}{(1 + R)} \quad (A.13)$$

$\rho$  نیز با استفاده از روابط (A.12) و (A.13) برابر است با:

$$\rho = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\alpha^{M-1} - R(1 - \alpha)^{M-1}}{1 + R(1 - \alpha)^{M-1}} \quad (A.14)$$

جزء کرنش حدی  $d\varepsilon_{2b}$  با استفاده از روابط (A.13) و (A.14) برابر است با:

$$d\varepsilon_{2a} = \frac{\varphi_b^{M-1} d\bar{\varepsilon}_b (\alpha_b^{M-1} - R(1 - \alpha_b)^{M-1})}{(1 + R)} \quad (A.15)$$

که در این صورت:

$$d\bar{\varepsilon}_b = \frac{d\varepsilon_{2a} (1 + R)}{\varphi_b^{M-1} (\alpha_b^{M-1} - R(1 - \alpha_b)^{M-1})} \quad (A.16)$$

با جانشینی معادله بالا در معادله تعادل و با استفاده از رابطه (A.7)، معادله تراز نیرو به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\bar{\varepsilon}_a + d\bar{\varepsilon}_a)^n \left( \frac{\beta_a}{\rho_a} \right)^m \varphi_a = f(\bar{\varepsilon}_b) + \frac{d\varepsilon_{2a} (1 + R)}{\varphi_b^{M-1} (\alpha_b^{M-1} - R(1 - \alpha_b)^{M-1})} n \left( \frac{\beta_b}{\rho_b} \right)^m \varphi_b \quad (A.17)$$

کرنش‌های ضخامتی در منطقه a و b عبارتند از:

$$d\varepsilon_{3a} = -\varphi_a^{M-1} \frac{d\bar{\varepsilon}_a (1 + \alpha_a^{M-1})}{(1 + R)} \quad (A.18)$$

$$d\varepsilon_{3b} = -\varphi_b^{M-1} \frac{d\bar{\varepsilon}_b (1 + \alpha_b^{M-1})}{(1 + R)} \quad (A.19)$$

برای معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل پارامتر  $\varphi$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi = \left\{ \frac{2(R + 1)}{[1 + \alpha]^M + (1 + 2R)[1 - \alpha]^M} \right\}^{1/M} \quad (A.20)$$

کرنش‌های ضخامتی با استفاده از رابطه (A.2) از روابط زیر به دست می‌آیند:

تأثیر مستقیم و زیادی بر سطوح مختلف تسلیم می‌گذارد، بنابراین در نظر گرفتن آن در فرآیندهای شکل‌دهی فلزات امری مهم است. در مورد معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل از آنجا که توان این معیار متغیر است، مقایسه‌ای بین اثر ضریب ناهمسان‌گردی و درجه این معیار صورت گرفت که نتایج نشان می‌دهد اثر درجه معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل از ضریب ناهمسان‌گردی بیشتر بوده، بنابراین می‌توان با در نظر گرفتن مقدار بهینه درجه این معیار، با اطمینان بیشتری در مورد قابلیت شکل‌پذیری فلزات اظهار نظر کرد.

۳- مقایسه کرنش‌های حدی براساس چهار معیار تسلیم ارائه شده نشان داده است که کرنش‌های حدی برای معیار تسلیم درجه ۲ هیل بیش از کرنش‌های حدی براساس سایر معیارهای تسلیم است. همچنین با بالا رفتن توان  $M$  در معیار تسلیم هاسفورد کرنش‌های حدی کاهش می‌یابند. شایان ذکر است که معیار تسلیم غیر درجه ۲ هیل، سطوح کرنشی حدی مشابهی با معیار تسلیم هاسفورد با درجات متفاوت را به نمایش می‌گذارد.

۴- افزایش توان کرنش‌سختی، سبب افزایش کرنش‌های حدی برای همه معیارهای تسلیم شده است.

۵- ضریب حساسیت به نرخ کرنش نیز اثری مشابه با توان کرنش‌سختی بر کرنش‌های حدی برای این معیارهای تسلیم می‌گذارد.

## ۶- فهرست علائم

$d_0$	اندازه دانه
$n$	توان کرنش‌سختی
$k$	ثابت مواد
$M$	درجه معیار تسلیم
$R_{m0}$	زبری اولیه ورق
$t_{0a}$	ضخامت اولیه ورق در منطقه یکنواخت
$t_b, t_a$	ضخامت ورق به ترتیب در مناطق یکنواخت و ناقص
$c$	ضریب استحکام
$m$	ضریب حساسیت به نرخ کرنش
$R$	ضریب ناهمسان‌گردی نرمال
$f$	فاکتور نقص

## علائم یونانی

$\bar{\varepsilon}$ و $\sigma$	تنش و کرنش مؤثر
$\sigma_1$ و $\sigma_2$	تنش‌های صفحه‌ای به ترتیب در جهت‌های $x_1$ و $x_2$
$d\varepsilon_1$ و $d\varepsilon_2$	جزء کرنش‌های حدی به ترتیب در جهت‌های $x_1$ و $x_2$
$\varepsilon_1$ و $\varepsilon_2$	کرنش‌های صفحه‌ای به ترتیب در جهت‌های $x_1$ و $x_2$
$\varepsilon_{3a}$ و $\varepsilon_{3b}$	کرنش‌های ضخامتی به ترتیب در مناطق یکنواخت و ناقص
$\alpha$	نسبت تنش‌های اصلی
$\varphi$	نسبت تنش اصلی بزرگ‌تر به تنش مؤثر
$\beta$	نسبت کرنش مؤثر به کرنش اصلی
$\rho$	نسبت کرنش اصلی به کرنش فرعی

## ۷- پیوست

مقدار  $\varphi$  برای معیار تسلیم درجه ۲ هیل براساس رابطه (۱۵) برابر است با:

$$\varphi = \left\{ \frac{(1 + R)}{1 + \alpha^2 + R(1 - \alpha)^2} \right\}^{1/2} \quad (A.1)$$

کرنش‌های ضخامتی با استفاده از قانون جریان (رابطه (A.2))، از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (A.2)$$

- [4] W. Choi, P.P. Gillis, S.E. Jones, Calculation of the forming limit diagram, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 20, No. 10, pp. 1975-1987, 1989.
- [5] P. Pishbin, P.P. Gillis, Forming limit diagrams calculated using Hill's non-quadratic yield criterion, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 23A, No. 10, pp. 2817-2831, 1992.
- [6] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press Oxford, 1983.
- [7] A. Graf, W. Hosford, Calculations of forming limit diagrams, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 21, No. 1, pp. 87-94, 1990.
- [8] D. Banabic, E. Dannenmann, Prediction of the influence of yield locus on the limit strains in sheet metals, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 109, No. 1-2, pp. 9-12, 2001.
- [9] S. Xu, K.J. Weinmann, Prediction of forming limit curves of sheet metal using Hill's (1993) user-friendly yield criterion of anisotropic materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 9, pp. 913-925, 1998.
- [10] M. Kuroda, V. Tvergaard, Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 37, pp. 5037-5059, 2000.
- [11] P. A. Friedman, J. Pan, Effect of plastic anisotropic and yield criteria on prediction of forming limit curves, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 42, No. 1, pp. 29-48, 2000.
- [12] B. M. Dariani, H. D. Azodi, Finding the optimum Hill index in the determination of the forming limit diagram, *Journal of Engineering Manufacture*, Vol. 217, No. 12, pp. 1677-1683, 2003.
- [13] A. Barata da Rocha, A. D. Santos, P. Teixeira, M.C. Butuc, Analysis of plastic flow localization under strain paths changes and its coupling with finite element simulation in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 209, No. 11, pp. 5097-5109, 2009.
- [14] A. Assempour, R. Hashemi, A. Safikhani, The Influence of Strain Path on the Shape and Level of the Forming Limit Diagram, in Proceeding of 2th International Congress the Manufacturing Engineering of Iran, Iran University of Science and Technology, Iran, 2007. (In Persian)
- [15] M. Nurcheshmeh, D. E. Green, Prediction of sheet forming limits with Marciniak and Kuczynski analysis using combined isotropic-nonlinear kinematic hardening, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 2, pp. 145-153, 2011.
- [16] A. Ghazanfari, A. Assempour, Calibration of forming limit diagrams using a modified Marciniak-Kuczynski model and an empirical law, *Materials and Design*, Vol. 34, pp. 185-191, 2012.
- [17] E. Chu, Generalization of Hill's 1979 anisotropic yield criteria, *Journals of Materials Processing Technology*, Vol. 50, No. 1-4, pp. 207-215, 1995.
- [18] H. Deilami Azodi, *The theoretical and experimental analysis of sheet metal forming using non-quadratic Hill's yeild criteria*, Master Thesis, Amirkabir University, Tehran, 2003. (In Persian)
- [19] W. F. Hosford, R. M. Caddell, *Metal forming: Mechanics and metallurgy*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [20] M. Nurcheshmeh, Numerical prediction of sheet metal forming limits, PhD Thesis, Windsor, Ontario, Canada, 2011.

$$d\varepsilon_{1a} = \frac{d\bar{\varepsilon}_a}{2(1+R)} \varphi_a^{M-1} \{1 + \alpha_a |^{M-1} + (1+2R)|1 - \alpha_a |^{M-1}\} \quad (A.21)$$

$$d\varepsilon_{2a} = \frac{d\bar{\varepsilon}_a}{2(1+R)} \varphi_a^{M-1} \{1 + \alpha_a |^{M-1} - (1+2R)|1 - \alpha_a |^{M-1}\} \quad (A.22)$$

$\rho$  نیز با استفاده از روابط بالا برابر است با:

$$\rho = \frac{|1 + \alpha |^{M-1} - (1+2R)|1 - \alpha |^{M-1}}{|1 + \alpha |^{M-1} + (1+2R)|1 - \alpha |^{M-1}} \quad (A.23)$$

طبق شرایط سازگاری (رابطه ۴)،  $d\varepsilon_{2b}$  برای منطقه b برابر است با:

$$d\varepsilon_{2a} = \frac{d\bar{\varepsilon}_b}{2(1+R)} \{1 + \alpha_b |^{M-1} - (1+2R)|1 - \alpha_b |^{M-1}\} \\ \times \left\{ \frac{2(R+1)}{|1 + \alpha_b |^M + (1+2R)|1 - \alpha_b |^M} \right\}^{(M-1)/M} \quad (A.24)$$

بنابراین  $d\varepsilon_{2b}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d\bar{\varepsilon}_b = \frac{2d\varepsilon_{2a}(1+R)}{|1 + \alpha_b |^{M-1} - (1+2R)|1 - \alpha_b |^{M-1}} \\ \times \left\{ \frac{|1 + \alpha_b |^M + (1+2R)|1 - \alpha_b |^M}{2(1+R)} \right\}^{M-1} \quad (A.25)$$

معادله بالا در معادله به‌دست آمده از تراز نیرو قرار داده می‌شود:

$$(\bar{\varepsilon}_a + d\bar{\varepsilon}_a)^n \varphi_a = f \left\{ \bar{\varepsilon}_b + \frac{2d\varepsilon_{2a}(1+R)}{|1 + \alpha_b |^{M-1} - (1+2R)|1 - \alpha_b |^{M-1}} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{|1 + \alpha_b |^M + (1+2R)|1 - \alpha_b |^M}{2(1+R)} \right\}^{\frac{M-1}{M}} \right\}^n \\ \times \left\{ \frac{2(R+1)}{|1 + \alpha_b |^M + (1+2R)|1 - \alpha_b |^M} \right\}^{\frac{1}{M}} \quad (A.26)$$

گرنش‌های ضخامتی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$d\varepsilon_{3a} = -d\varepsilon_a \frac{\varphi_a^{M-1} |1 + \alpha_a |^{M-1}}{1+R} \quad (A.27)$$

$$d\varepsilon_{3b} = -d\varepsilon_b \frac{\varphi_b^{M-1} |1 + \alpha_b |^{M-1}}{1+R} \quad (A.28)$$

## ۸- مراجع

- [1] S. P. Keeler, W.A. Backofen, Plastic instability and fracture in sheets stretched over rigid punches, *Transactions of American Society of Metals*, Vol. 56, pp. 25-48, 1963.
- [2] J. A. Waleed, O. B. Anas, Theoretical Determination of Forming Limit Diagram for Steel, Brass and Aluminum alloy sheets, *AL Rafdain Engineering Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 40-55, 2007.
- [3] Z. Marciniak, K. Kuczynski, Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 9, No. 9, pp. 609-620, 1967.