



## تحلیل رفتار پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته FGM تحت شوک حرارتی

جمال رنجبر<sup>۱</sup>، اکبر علی بیگلو<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، تربیت مدرس، تهران  
۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران  
\* [abeigloo@modares.ac.ir](mailto:abeigloo@modares.ac.ir)، ۱۴۱۱۵۱۴۳

### چکیده

در این پژوهش، رفتار ترموالاستیک پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته ساخته شده از ماده تابعی (FGM)، تحت شوک حرارتی ارائه شده است. خواص ترمومکانیکی لایه FGM، مستقل از دما و تابعی پیوسته و توانی در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی حاکم بر هر لایه از استوانه، با استفاده از تبدیل لاپلاس و به‌کارگیری سری‌های توانی صورت گرفته است. با استفاده از شرایط پیوستگی بین لایه‌های در مرز مشترک لایه‌ها و همچنین شرایط مرزی در سطوح داخلی و خارجی، پارامترهای مجهول تعیین گردیده است. نتایج به‌دست آمده، با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس سریع (FLIT) به حوزه زمانی تبدیل شده اند. اثر ضریب توان FGM در تنش‌های شعاعی و محیطی نقاط مختلف پوسته تحت شوک دمایی مورد بررسی قرار گرفته است. روش تحلیلی ارائه شده، زمینه مناسبی برای بررسی گذرای تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه تحت بارهای دمایی و مکانیکی مختلف فراهم می‌کند. برای صحت‌گذاری روش حاضر، نتایج عددی با نتایج موجود در مقالات مرتبط مقایسه گردیده است. نتایج به‌دست آمده، تطابق قابل قبولی با نتایج پژوهش‌های پیشین دارد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: ۱۲ آذر ۱۳۹۲  
پذیرش: ۰۴ دی ۱۳۹۲  
ارائه در سایت: ۱۴ تیر ۱۳۹۳  
کلید واژگان:  
حل تحلیلی  
شوک حرارتی  
FGM  
پوسته استوانه‌ای ساندویچی

## Analysis of sandwich cylindrical shell with FGM core subjected to thermal shock

Jamal Ranjbar<sup>1</sup>, Akbar Alibeigloo<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.  
2- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.  
\* P.O.B. 14115143 Tehran, Iran, [abeigloo@modares.ac.ir](mailto:abeigloo@modares.ac.ir)

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 03 December 2013  
Accepted 25 December 2013  
Available Online 05 July 2014

**Keywords:**  
Analytical Solution  
Thermal Shock  
FGM  
Sandwich Cylindrical Shell

### ABSTRACT

In this paper, the thermoelastic behavior of cylindrical sandwich shell with functionally graded (FGM) core under thermal shock is presented. Thermo mechanical properties of FGM layer are assumed to be independent of temperature and also, very continuously and smoothly functions in the radial direction as a nonlinear power function. The analytical solutions of governing partial differential equations for each layer of cylinder are solved by using Laplace transform and power series method. Mechanical boundary conditions and continuity equations for interfaces are used to obtain unknown parameters that get in recurrence equations for each layer of cylinder. The results in Laplace domain transferred to time domain by employing the fast inverse Laplace transform method (FLIT). The effects of FGM's power on the dynamic characteristics of the FG thick sandwich cylindrical shell are studied in various points across the thickness of cylinder. The analytical presented method provides an appropriate field for analysis of transient radial and hoop stresses in a cylinder on various thermo mechanical load. Accuracy of gained equations is evaluated by similar articles. The results have a good agreement with published data in pervious researches.

### ۱- مقدمه

که دارای خواص ترمومکانیکی تابعی پیوسته از مکان می‌باشند. در سال‌های اخیر تحقیقات مختلفی در مورد بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه و نیز پوسته‌های FGM ارائه شده است. کولیانو و همکارانش [۱] به بررسی استاتیک مسئله ترموالاستیک استوانه چند لایه تحت بارگذاری حرارتی و عدم حضور بارگذاری‌های مکانیکی پرداختند. وانگ و گونگ [۲] با استفاده توابع هنکل به بررسی دینامیکی استوانه چند لایه تحت اثر فشار داخلی پرداختند. وانگ [۳] با استفاده از تابع تبدیل هنکل اثر انتشار امواج تنشی را در یک استوانه دولایه مورد بررسی قرار

یکی از مهم‌ترین سازه‌های مورد استفاده در صنایع مختلف، پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم می‌باشد که در کاربردهای مختلفی از جمله ساخت مخازن تحت فشار مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی رفتار ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای که تحت تغییرات شدید دمایی قرار می‌گیرند، در طراحی سازه‌های پیشرفته مهندسی از اهمیت بالایی برخوردار است. امروزه استفاده از سازه‌های FGM در سازه‌های مهندسی، به دلیل توانایی بالای این مواد در کنترل تنش روبه افزایش است. مواد FG از جمله مواد جدیدی هستند

Please cite this article using:

J. Ranjbar, A. Alibeigloo, Analysis of sandwich cylindrical shell with FGM core subjected to thermal shock, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 175-182, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

به بررسی کماتش صفحات دایره‌ای ساخته شده از مواد FG که در معرض بارهای حرارتی یکنواخت قرار گرفته است، پرداختند. آن‌ها در بررسی خود از تئوری برشی مرتبه اول استفاده کردند. حل عددی تنش‌های مکانیکی و حرارتی در استوانه جدار نازک تحت انفجار گاز داخلی به‌وسیله شبیه‌سازی میرزایی [۲۲] صورت گرفت. رحیمی و همکارانش [۲۳] حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد FG را ارائه نمودند. نظر به اینکه در سطح مشترک چند لایه‌ها بین تنش‌های صفحه‌ای پیوستگی وجود ندارد لذا با استفاده از سازه ساندویچی این پیوستگی در بین لایه‌ها تحقق می‌یابد. شایان ذکر است که از سازه‌های ساندویچی در صنایع هوافضا و مخازن تحت فشار در محیط‌های با گرادیان دمایی بالا استفاده می‌شود. علی‌بیگللو [۲۴] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، تحلیل ترموالاستیک پل استوانه‌ای ساندویچی با هسته FGM را ارائه نموده است. با توجه به مرور کارهای تحقیقاتی گذشته معلوم می‌شود که تحلیل پوسته استوانه‌ای ساندویچی تحت شوک حرارتی تاکنون گزارش نشده است. در این پژوهش، تحلیل میدان تنش ترموالاستیک در یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی طویل با هسته FGM تحت شوک حرارتی متقارن محوری ارائه می‌شود. معادلات حاکم به حوزه لاپلاس تبدیل شده و حل تحلیلی معادلات با استفاده از روش سری‌ها صورت گرفته است. برای بررسی ترموالاستیک تابع زمان، پاسخ‌های میدان تنش به‌دست آمده، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس به حوزه زمانی تبدیل می‌شوند. یکی تفاوت‌های اساسی این پژوهش با پژوهش‌های یاد شده، توانایی آن در بررسی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تحت بارگذاری‌های ترمومکانیکی دلخواه است.

## ۲- فرمول‌بندی مسئله

مدلی از یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته FGM در شکل ۱ نشان داده شده است. شعاع داخلی و خارجی پوسته و نیز شعاع‌های داخلی و خارجی هسته به ترتیب عبارت‌اند از  $r_1, r_2, r_3$  و  $r_4$ . با فرض حالت متقارن محوری و کرنش صفحه‌ای، روابط کرنش-جابجایی عبارت است از:

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r,t) = \frac{\partial u^{(i)}(r,t)}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r,t) = \frac{u^{(i)}(r,t)}{r} \quad (1)$$

که در این رابطه  $u(r,t)$ ،  $\varepsilon_{rr}(r,t)$  و  $\varepsilon_{\theta\theta}(r,t)$  به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی، کرنش‌های شعاعی و محیطی هستند. اندیس‌های  $r$  و  $\theta$  به ترتیب بیانگر جهت‌های شعاعی و محیطی بوده و بالانویس  $(i)$  نشان‌دهنده شماره لایه می‌باشد. همچنین پارامترهای  $r$  و  $t$  نشان‌دهنده زمان و شعاع هستند. تنش‌های ترموالاستیک عبارت‌اند از:

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r,t) = \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \left[ (1-\nu^{(i)})\varepsilon_{rr}^{(i)}(r,t) + \nu^{(i)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r,t) \right] - \frac{E^{(i)}\alpha^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} T(r,t) \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r,t) = \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \left[ (1-\nu^{(i)})\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r,t) + \nu^{(i)}\varepsilon_{rr}^{(i)}(r,t) \right] - \frac{E^{(i)}\alpha^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} T(r,t) \quad (3)$$

داد. وی همچنین با استفاده از تابع تبدیل هنکل رفتار یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم را تحت شوک دمایی مورد بررسی قرار داد [۴]. او در این بررسی نیروهای بین لایه‌ها به‌عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته است. تارن [۵] حل دقیق اثر باگذاری‌های حرارتی و دمایی را بر روی استوانه FGM مورد بررسی قرار داد. او در پژوهش خود، مدول یانگ را به‌صورت تابع توانی از شعاع در نظر گرفت. وریچنکو و همکارانش [۶] رفتار تنش مخزن استوانه‌ای چند لایه تحت فشار را مورد بررسی قرار دادند. تئوری مورد استفاده و روش حل به‌کار رفته در این بررسی، تئوری الاستیسیته و استفاده از روش المان محدود بوده است. بررسی عددی انتشار امواج تنش در یک پوسته استوانه‌ای پوشیده از یک لایه پیزوالکتریک، به‌وسیله وانگ [۷] صورت گرفت. اوواتو و تانیگاوا [۸] اثر انتقال حرارت گذرای شعاعی را بر رفتار تنشی یک قطاع کامپوزیتی چند لایه بر روی تکیه‌گاه‌های ساده را مورد بررسی قرار دادند. جین و وو [۹] مسئله ترموالاستیک چند لایه را برای پوسته مخروطی شکل متقارن محوری چند لایه مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس هیبرید و نیز روش تفاضلات محدود به‌بررسی شبه استاتیک ترموالاستیک کوپل مسئله خود پرداختند. تارن و وانگ [۱۰] اثر انتقال حرارت هدایت را بر لایه پوسته استوانه‌ای FGM بررسی کردند. بررسی شبه استاتیک مسئله ترموالاستیک گذرا در یک استوانه جدار ضخیم همگن، به‌وسیله نبوی و شاهانی [۱۱] صورت گرفت. آن‌ها بارهای حرارتی تابع زمان را به‌عنوان شرایط مرزی مسئله خود در نظر گرفتند و آن را با استفاده از تابع تبدیل هنکل حل نمودند. جباری و همکارانش [۱۲] به‌بررسی تحلیلی تنش‌های حرارتی در یک استوانه FGM کوتاه و ضخیم پرداختند. آن‌ها خواص ترمومکانیکی را به‌صورت توانی از راستای شعاعی در نظر گرفتند و با استفاده از توابع بسل به‌بررسی مسئله خود پرداختند. شاو و همکارانش [۱۳] به حل گذرای ترموالاستیک دوبعدی در یک استوانه FGM پرداختند. آن‌ها حل تحلیلی مسئله را با استفاده از تئوری سری‌ها ارائه نمودند. پاسخ دینامیکی یک پوسته استوانه‌ای با لایه‌های پیزوالکتریک به‌وسیله وانگ و همکارانش [۱۴] بررسی شد. آن‌ها مدل خود را در حالت کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری مورد بررسی قرار دادند. بیات و همکارانش [۱۵] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به حل تحلیلی ترموالاستیک دیسک دوار FGM با ضخامت متغیر پرداختند. شرعیات و همکارانش [۱۶] به‌بررسی تنش‌های حرارتی غیرخطی و گذرا در یک پوسته استوانه‌ای FGM پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش کالوکیشن، انتشار امواج الاستیک را در مدل خود بررسی کردند. پاسخ زمانی لوله‌های کامپوزیتی چند لایه با خواص ترمومکانیکی مستقل از دما که تحت بارگذاری ترمومکانیکی سیکنی قرار دارند، به‌وسیله انصاری و همکارانش [۱۷] بررسی شد. آن‌ها روش عددی تفاضل محدود را برای مسئله خود به‌کار بردند. علی‌بیگللو [۱۸] به‌بررسی مسئله ترموالاستیک تغییر شکل‌های استاتیکی در پوسته‌های استوانه‌ای پوشیده شده از لایه‌های پیزوالکتریک پرداخت. او برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات حاکم بر مسئله به‌ترتیب از فضای حالت و روش نایور بهره برد.

سلطانی و همکارانش [۱۹] به‌بررسی گذرای ترموالاستیک کوپل در یک پوسته مخروطی متقارن محوری پرداختند. آن‌ها پوسته مخروطی شکل تحت شوک‌های حرارتی و مکانیکی را با استفاده از روش عددی گالرکین مورد بررسی قرار دادند. هین و همکارانش [۲۰] به بررسی شوک حرارتی در پوسته استوانه‌ای FGM و نیز پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه پرداختند. آن‌ها در این بررسی با استفاده از روش تفاضل محدود به حل معادله انتقال حرارت هدایت در پوسته استوانه‌ای پرداختند. جبارزاده و همکارانش [۲۱]

شرایط اولیه معادله‌های (۷) و (۸) به صورت رابطه (۹) فرض شده است:

$$u^{(i)}(r, t) = 0, \frac{\partial u^{(i)}(r, t)}{\partial t} = 0, \quad t = 0 \quad (9)$$

شرایط مرزی مکانیکی در لایه‌های داخلی و خارجی را می‌توان به صورت رابطه (۱۰) نوشت:

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r_1, t) = P_{in}(t), \quad \sigma_{rr}^{(3)}(r_4, t) = P_{out}(t) \quad (10)$$

و با استفاده از رابطه (۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{E^{(1)}}{(1+\nu^{(1)})(1-2\nu^{(1)})} \left[ (1-\nu^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu^{(1)} \frac{u^{(1)}(r_1, t)}{r_1} \right] - \frac{\alpha^{(1)} E^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} T(r_1, t) = P_{in}(t)$$

$$\frac{E^{(3)}}{(1+\nu^{(3)})(1-2\nu^{(3)})} \left[ (1-\nu^{(3)}) \frac{\partial u^{(3)}(r_4, t)}{\partial r} + \nu^{(3)} \frac{u^{(3)}(r_4, t)}{r_4} \right] - \frac{\alpha^{(3)} E^{(3)}}{1-2\nu^{(3)}} T(r_4, t) = P_{out}(t) \quad (11)$$

در رابطه (۱۰)،  $P_{in}(t)$  و  $P_{out}(t)$  به ترتیب بیانگر فشارهای هیدرواستاتیک وارد بر لایه‌های داخلی و خارجی هستند.

شرایط پیوستگی بین لایه را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) بیان نمود:

$$u^{(i)}(r_{i+1}, t) = u^{(i+1)}(r_{i+1}, t), \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r_{i+1}, t) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{i+1}, t), \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

در این پژوهش تغییرات ناگهانی دمای پوسته به صورت رابطه (۱۳) در نظر گرفته شده است:

$$T(r, t) = T_0 H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

برای ساده سازی، می‌توان معادلات را به فرم بی‌بعد تبدیل نمود. پارامترهای بی‌بعد کننده معادلات به صورت رابطه (۱۴) تعریف شده اند:

$$\bar{r} = \frac{r_2 + r_3}{2}, \quad \bar{\xi} = \frac{r}{\bar{r}}, \quad \bar{\xi}_1 = \frac{r_1}{\bar{r}}, \quad \bar{\xi}_2 = \frac{r_2}{\bar{r}}, \quad \bar{\xi}_3 = \frac{r_3}{\bar{r}}, \quad \bar{\xi}_4 = \frac{r_4}{\bar{r}}$$

$$\bar{E}(\bar{\xi}) = \frac{E(r)}{E_0}, \quad \bar{\rho}(\bar{\xi}) = \frac{\rho(r)}{\rho_0}$$

$$\bar{\alpha}(\bar{\xi}) = \frac{\alpha(r)}{\alpha_0}, \quad c_v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$t^* = \left( \frac{c_v}{\bar{r}} \right) t, \quad \bar{T}(\bar{\xi}, t^*) = \frac{T(r, t)}{T_0}$$

$$\bar{u}(\bar{\xi}, t^*) = \frac{u(r, t)}{\alpha_0 \bar{r} T_0}$$

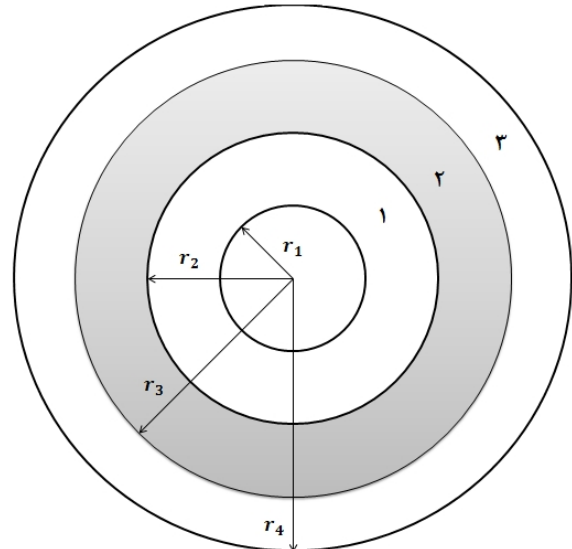
$$\bar{\sigma}_r(\bar{\xi}, t^*) = \frac{\sigma_r(r, t)}{\alpha_0 E_0 T_0}$$

$$\bar{\sigma}_\theta(\bar{\xi}, t^*) = \frac{\sigma_\theta(r, t)}{\alpha_0 E_0 T_0} \quad (14)$$

در رابطه بالا،  $\alpha_0, E_0, T_0$  و  $\rho_0$  به ترتیب دمای مرجع، مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و چگالی مرجع هستند و  $c_v$  نشان‌دهنده سرعت انتشار امواج تنشی می‌باشد.

با استفاده از روابط (۱۴) فرم بی‌بعد رابطه (۱۳) به صورت رابطه (۱۵) نوشته می‌شود:

$$\bar{T}(\bar{\xi}, t^*) = H(t^*) = \begin{cases} 0 & t^* < 0 \\ 1 & t^* \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$



شکل ۱ پوسته استوانه‌ای ساندویچی

که در این رابطه  $\sigma_{rr}^{(i)}(r, t)$ ،  $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r, t)$ ،  $E^{(i)}$  و  $\alpha^{(i)}$  به ترتیب بیانگر تنش شعاعی، تنش محیطی، مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون لایه  $(i)$  ام می‌باشند. با توجه به اینکه جنس لایه دوم FGM در نظر گرفته شده است، خواص ترمومکانیکی آن تابعی پیوسته از شعاع فرض شده است.

با استفاده از رابطه (۱)، می‌توان تنش‌های نوشته شده در روابط (۲) و (۳) را بر حسب مولفه جابه‌جایی به صورت رابطه‌های (۴) و (۵) نوشت:

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r, t) = \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \left[ (1-\nu^{(i)}) \frac{\partial u^{(i)}(r, t)}{\partial r} + \nu^{(i)} \frac{u^{(i)}(r, t)}{r} \right] - \frac{E^{(i)} \alpha^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} T(r, t) \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r, t) = \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \left[ (1-\nu^{(i)}) \frac{u^{(i)}(r, t)}{r} + \nu^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}(r, t)}{\partial r} \right] - \frac{E^{(i)} \alpha^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} T(r, t) \quad (5)$$

معادله حرکت هر یک از لایه‌ها عبارت است از:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}(r, t)}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)}(r, t) - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r, t)}{r} = \rho^{(i)} \frac{\partial^2 u^{(i)}(r, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

که  $\rho^{(i)}$  چگالی لایه  $(i)$  ام می‌باشد.

با استفاده از معادله‌های (۱)-(۶)، معادله حرکت هر یک از لایه‌ها را می‌توان به صورت رابطه (۷) بدست آورد:

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(i)}(r, t)}{\partial r} - \frac{u^{(i)}(r, t)}{r^2} - \frac{1+\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \alpha^{(i)} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = \frac{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})}{1-\nu^{(i)}} \frac{\rho^{(i)}}{E^{(i)}} \frac{\partial^2 u^{(i)}(r, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 3 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(r, t)}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{E^{(2)}(r)}{E^{(2)}(r)} \right) \frac{\partial u^{(2)}(r, t)}{\partial r} + \left( \frac{\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \frac{E^{(2)}(r)}{E^{(2)}(r)} - \frac{1}{r} \right) \frac{u^{(2)}(r, t)}{r} - \frac{1+\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \alpha^{(2)}(r) \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} - \frac{1+\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \left[ \frac{\alpha^{(2)}(r) E^{(2)}(r)}{E^{(2)}(r)} \right] T(r, t) = \frac{(1+\nu^{(2)})(1-2\nu^{(2)})}{1-\nu^{(2)}} \frac{\rho^{(2)}(r)}{E^{(2)}(r)} \frac{\partial^2 u^{(2)}(r, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

در رابطه (۸)، منظور از علامت ' مشتق نسبت به  $r$  می‌باشد.

$$\frac{\partial^2 \bar{U}^{(i)}(\xi, s)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{U}^{(i)}(\xi, s)}{\partial \xi} - \bar{U}^{(i)}(\xi, s) \left[ \frac{1}{\xi^2} + \frac{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)}) \bar{\rho}^{(i)}}{(1-\nu^{(i)}) \bar{E}^{(i)}} s^2 \right] = 0$$

$$, i=1,3 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{U}^{(2)}(\xi, s)}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1}{\xi} + \frac{\bar{E}^{(2)}(\xi)}{\bar{E}^{(2)}(\xi)} \right) \frac{\partial \bar{U}^{(2)}(\xi, s)}{\partial \xi} \\ & + \bar{U}^{(2)}(\xi, s) \left[ \frac{\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \frac{1}{\xi} \frac{\bar{E}^{(2)}(\xi)}{\bar{E}^{(2)}(\xi)} - \frac{1}{\xi^2} \right. \\ & \left. - \frac{(1+\nu^{(2)})(1-2\nu^{(2)}) \bar{\rho}^{(2)}(\xi)}{(1-\nu^{(2)}) \bar{E}^{(2)}(\xi)} s^2 \right] \\ & = \frac{1+\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \left[ \frac{\bar{\alpha}^{(2)}(\xi) \bar{E}^{(2)}(\xi)}{\bar{E}^{(2)}(\xi)} \right] \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (24)$$

همچنین معادله (۱۸) به صورت روابط (۲۵) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left[ (1-\nu^{(1)}) \frac{\partial \bar{U}^{(1)}(\xi_1, s)}{\partial \xi} + \nu^{(1)} \frac{\bar{U}^{(1)}(\xi_1, s)}{\xi_1} \right] \\ & - (1+\nu^{(1)}) \bar{\alpha}^{(1)} \frac{1}{s} = \frac{(1+\nu^{(1)})(1-2\nu^{(1)})}{(1-\nu^{(1)}) \bar{E}^{(1)}} g_{in}(s) \\ & \left[ (1-\nu^{(3)}) \frac{\partial \bar{U}^{(3)}(\xi_4, s)}{\partial \xi} + \nu^{(3)} \frac{\bar{U}^{(3)}(\xi_4, s)}{\xi_4} \right] \\ & - (1+\nu^{(3)}) \bar{\alpha}^{(3)} \frac{1}{s} = \frac{(1+\nu^{(3)})(1-2\nu^{(3)})}{(1-\nu^{(3)}) \bar{E}^{(3)}} g_{out}(s) \end{aligned} \quad (25)$$

و نیز معادلات (۲۱) و (۲۲) با به کار بردن تبدیل لاپلاس بیان شده به ترتیب به معادلات (۲۶) و (۲۷) تبدیل می‌شوند:

$$\bar{U}^{(i)}(\xi_{i+1}, s) = \bar{U}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, s) \quad , \quad i=1,2 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{E}^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \left[ (1-\nu^{(i)}) \frac{\partial \bar{U}^{(i)}(\xi_{i+1}, s)}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \nu^{(i)} \frac{\bar{U}^{(i)}(\xi_{i+1}, s)}{\xi_{i+1}} \right] - \frac{\bar{\alpha}^{(i)} \bar{E}^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} \frac{1}{s} \\ & = \frac{\bar{E}^{(i+1)}}{(1+\nu^{(i+1)})(1-2\nu^{(i+1)})} \left[ (1-\nu^{(i+1)}) \frac{\partial \bar{U}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, s)}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \nu^{(i+1)} \frac{\bar{U}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, s)}{\xi_{i+1}} \right] - \frac{\bar{\alpha}^{(i+1)} \bar{E}^{(i+1)}}{1-2\nu^{(i+1)}} \frac{1}{s} \quad , \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (27)$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(i)}(\xi, s) &= \mathcal{L}(\bar{u}^{(i)}(\xi, t^*)) \\ \frac{1}{s} &= \mathcal{L}(H(t^*)) \\ g_{in}(s) &= \mathcal{L}(\bar{P}_{in}(t^*)) \\ g_{out}(s) &= \mathcal{L}(\bar{P}_{out}(t^*)) \end{aligned} \quad (28)$$

در روابط بالا  $\mathcal{L}$  بیانگر عملگر تبدیل لاپلاس می‌باشد. با توجه به حل معادلات دیفرانسیل معمولی به روش سری‌های توانی، اگر در معادلات (۲۳) و (۲۴)، ضرایب  $\bar{E}^{(i)}(\xi)/\bar{E}^{(i)}(\xi)$ ،  $\bar{\rho}^{(i)}/\bar{E}^{(i)}$  و  $[\bar{\alpha}^{(i)}(\xi)\bar{E}^{(i)}(\xi)]/\bar{E}^{(i)}(\xi)$  در  $\xi=1$  تحلیلی باشند، می‌توان حل این معادلات را به صورت جملات  $\xi^{-1}$

با استفاده از معادله‌های (۱۳)-(۱۵)، فرم بی‌بعد معادله‌های (۷) و (۸) به ترتیب عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{u}^{(i)}(\xi, t^*)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{u}^{(i)}(\xi, t^*)}{\partial \xi} - \frac{\bar{u}^{(i)}(\xi, t^*)}{\xi^2} \\ & = \frac{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)}) \bar{\rho}^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(i)}(\xi, t^*)}{\partial t^{*2}} \quad , \quad i=1,3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{u}^{(2)}(\xi, t^*)}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1}{\xi} + \frac{\bar{E}^{(2)}(\xi)}{\bar{E}^{(2)}(\xi)} \right) \frac{\partial \bar{u}^{(2)}(\xi, t^*)}{\partial \xi} \\ & + \left( \frac{\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \frac{\bar{E}^{(2)}(\xi)}{\bar{E}^{(2)}(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\bar{u}^{(2)}(\xi, t^*)}{\xi} - H(t^*) \frac{1+\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \frac{[\bar{\alpha}^{(2)}(\xi)\bar{E}^{(2)}(\xi)]}{\bar{E}^{(2)}(\xi)} \\ & = \frac{(1+\nu^{(2)})(1-2\nu^{(2)}) \bar{\rho}^{(2)}(\xi)}{1-\nu^{(2)}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(2)}(\xi, t^*)}{\partial t^{*2}} \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، منظور از علامت ' مشتق نسبت به  $\xi$  می‌باشد.

همچنین با استفاده روابط (۱۴) و (۱۵)، فرم بی‌بعد شده شرایط مرزی را می‌توان به صورت رابطه (۱۸) به دست آورد:

$$\begin{aligned} & (1-\nu^{(1)}) \frac{\partial \bar{u}^{(1)}(\xi_1, t)}{\partial \xi} + \nu^{(1)} \frac{\bar{u}^{(1)}(\xi_1, t)}{\xi_1} \\ & - (1+\nu^{(1)}) \bar{\alpha}^{(1)} H(t^*) \frac{(1+\nu^{(1)})(1-2\nu^{(1)})}{(1-\nu^{(1)}) \bar{E}^{(1)}} \bar{P}_{in}(t^*) \\ & (1-\nu^{(3)}) \frac{\partial \bar{u}^{(3)}(\xi_4, t)}{\partial \xi} + \nu^{(3)} \frac{\bar{u}^{(3)}(\xi_4, t)}{\xi_4} \\ & - (1+\nu^{(3)}) \bar{\alpha}^{(3)} H(t^*) = \frac{(1+\nu^{(3)})(1-2\nu^{(3)})}{(1-\nu^{(3)}) \bar{E}^{(3)}} \bar{P}_{out}(t^*) \end{aligned} \quad (18)$$

که در این رابطه:

$$\bar{P}_{in}(t^*) = \frac{P_{in}(t)}{\alpha_0 E_0 T_0} \quad , \quad \bar{P}_{out}(t^*) = \frac{P_{out}(t)}{\alpha_0 E_0 T_0} \quad (19)$$

فرم بی‌بعد شده معادلات پیوستگی نیز به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & \bar{u}^{(i)}(\xi_{i+1}, t^*) = \bar{u}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, t^*) \quad , \quad i=1,2 \\ & \bar{\sigma}_{rr}^{(i)}(\xi_{i+1}, t^*) = \bar{\sigma}_{rr}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, t^*) \quad , \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (20)$$

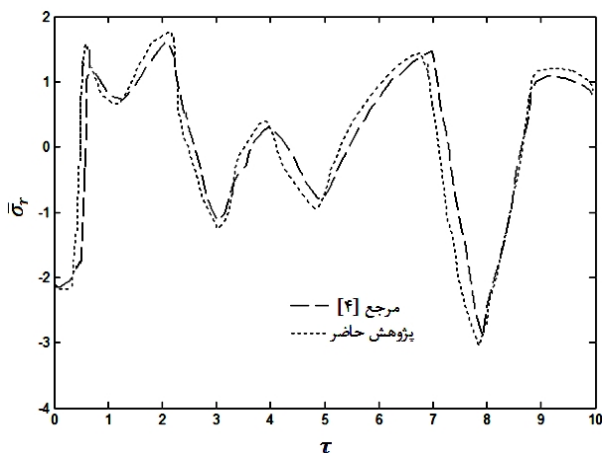
با استفاده از روابط (۴)، (۵) و (۱۱)، رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت بی‌بعد رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) نوشت:

$$\bar{u}^{(i)}(\xi_{i+1}, t^*) = \bar{u}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, t^*) \quad , \quad i=1,2 \quad (21)$$

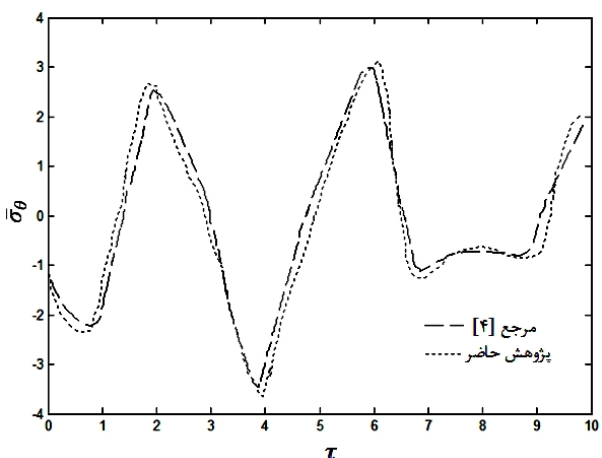
$$\begin{aligned} & \frac{\bar{E}^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \left[ (1-\nu^{(i)}) \frac{\partial \bar{u}^{(i)}(\xi_{i+1}, t^*)}{\partial \xi} + \nu^{(i)} \frac{\bar{u}^{(i)}(\xi_{i+1}, t^*)}{\xi_{i+1}} \right] - \frac{\bar{\alpha}^{(i)} \bar{E}^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} H(t^*) \\ & = \frac{\bar{E}^{(i+1)}}{(1+\nu^{(i+1)})(1-2\nu^{(i+1)})} \left[ (1-\nu^{(i+1)}) \frac{\partial \bar{u}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, t^*)}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \nu^{(i+1)} \frac{\bar{u}^{(i+1)}(\xi_{i+1}, t^*)}{\xi_{i+1}} \right] - \frac{\bar{\alpha}^{(i+1)} \bar{E}^{(i+1)}}{1-2\nu^{(i+1)}} H(t^*) \quad , \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (22)$$

### ۳- روش حل

با استفاده از تبدیل لاپلاس برای حوزه زمانی  $t^*$ ، معادلات (۱۶) و (۱۷) با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر به معادلات (۲۳) و (۲۴) تبدیل می‌شوند:



شکل ۲ تغییرات زمانی تنش شعاعی در نقطه  $r = 1.5r_{in}$



شکل ۳ تغییرات زمانی تنش محیطی در نقطه  $r = 1.5r_{in}$

در پژوهش حاضر، برای تعیین میدان تنش‌ها در حوزه زمان از مرجع [۲۵] استفاده شده است که در آن ترکیبی از تبدیل‌های فوریه سینوسی و کوسینوسی به کار رفته است.

#### ۴- نتایج عددی و بحث در آن

برای صحت‌گذاری روش حاضر، نتایج عددی به‌دست آمده مربوط به استوانه همگن تحت شوک حرارتی با نتایج به‌دست آمده در مرجع [۴] مقایسه شده است. برای مقایسه نتایج، ثابت‌های مادی به‌صورت شرایط روابط (۳۶) تعریف شده‌اند:

$$E = 200 \text{GPa}, c_v = 5000 \text{m/s}, v = 0.25, r_{out} = 6r_{in}, \tau = \frac{r_{out} + r_{in}}{2(r_{out} - r_{in})} t^* \quad (36)$$

در رابطه اخیر،  $r_{in}$  و  $r_{out}$ ، به‌ترتیب بیانگر شعاع‌های صفحات داخلی و خارجی می‌باشند. شکل‌های ۲ و ۳، مقایسه بین نتایج حاصل از روش ارائه شده در این پژوهش را با نتایج مرجع [۴] نشان می‌دهد.

شکل‌های ۲ و ۳، تطابق خوبی را بین نتایج پژوهش حاضر (با در نظر گرفتن جمله اول از سری توانی بیان شده) و نتایج مرجع [۷] نشان می‌دهد. در این پژوهش، تحلیل ترموالاستیک پوسته استوانه‌ای متقارن محوری و با طول نامحدود مطابق شکل ۱ مورد بررسی قرار گرفته است. لایه شماره ۱ از جنس سرامیک و لایه شماره ۳ از جنس فلز فرض شده است. لایه شماره ۲، ترکیبی از سرامیک-فلز در نظر گرفته شده و خواص ترمومکانیکی آن به‌صورت تابع توانی در راستای شعاع در نظر گرفته شده است که به‌صورت پیوسته از خاصیت سرامیک در لایه داخلی به خاصیت فلز در لایه خارجی، طبق معادله (۳۷) متغیر است:

در سری تیلور بیان نمود. با شرط تحلیلی بودن ضرایب بیان شده می‌توان آن‌ها را به‌صورت سری تیلور روابط (۲۹) بسط داد:

$$A^{(2)}(\xi) = \frac{\bar{E}^{(2)}(\xi)}{E^{(2)}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(\xi-1)^n$$

$$B^{(2)}(\xi) = \frac{\bar{\rho}^{(2)}(\xi)}{E^{(2)}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)}(\xi-1)^n$$

$$C^{(2)}(\xi) = \frac{(\bar{E}^{(2)}(\xi) * \bar{\alpha}^{(2)}(\xi))'}{E^{(2)}(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)}(\xi-1)^n \quad (29)$$

که در این روابط:

$$a_n^{(2)} = \frac{A^{(2)(n)}(\xi)}{n!}$$

$$b_n^{(2)(i)} = \frac{B^{(2)(n)}(\xi)}{n!}$$

$$c_n^{(2)} = \frac{C^{(2)(n)}(\xi)}{n!} \quad (30)$$

با توجه به اینکه معادلات (۲۳) و (۲۴) در  $\xi = 1$  تحلیلی می‌باشند، پاسخ این معادلات را می‌توان با استفاده از بسط سری تیلور در  $\xi = 1$ ، به‌صورت رابطه (۳۱) نوشت:

$$\bar{U}^{(i)}(\xi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(i)}(s) (\xi-1)^n, \quad i = 1, 2, 3 \quad (31)$$

با جایگذاری معادلات (۲۹) و (۳۱) در معادلات (۲۳) و (۲۴) و استفاده از خواص سری‌ها، روابط بازگشتی (۳۲) و (۳۳) به‌ترتیب برای معادلات (۲۳) و (۲۴) به‌دست می‌آیند:

$$-(n+1)(n+2)\phi_{n+2}^{(i)} = (n+1)(2n-1)\phi_{n+1}^{(i)} + (n^2-1)\phi_n^{(i)}, \quad i = 1, 3 \quad (32)$$

$$-(n+1)(n+2)\phi_{n+2}^{(2)} = (n+1)(2n-1)\phi_{n+1}^{(2)} + (n^2-1)\phi_n^{(2)}$$

$$+ \sum_{j=0}^n [(j-1)\phi_{j-1}^{(2)} + 2j\phi_j^{(2)} + (j+1)\phi_{j+1}^{(2)}] \frac{A^{(2)(n-j)}(\xi)}{(n-j)!}$$

$$+ \left( \frac{v^{(2)}}{1-v^{(2)}} \right) \sum_{j=0}^n (\phi_{j-1}^{(2)} + \phi_j^{(2)}) \frac{A^{(2)(n-j)}(\xi)}{(n-j)!} \quad (33)$$

$$+ \left( \frac{1+v^{(2)}}{1-v^{(2)}} \right) \left( \frac{1-2v^{(2)}}{1-v^{(2)}} \right) s^2 \times \sum_{j=0}^n (\phi_{j-2}^{(2)} + 2\phi_{j-1}^{(2)} + \phi_j^{(2)}) \frac{B^{(2)(n-j)}(\xi)}{(n-j)!}$$

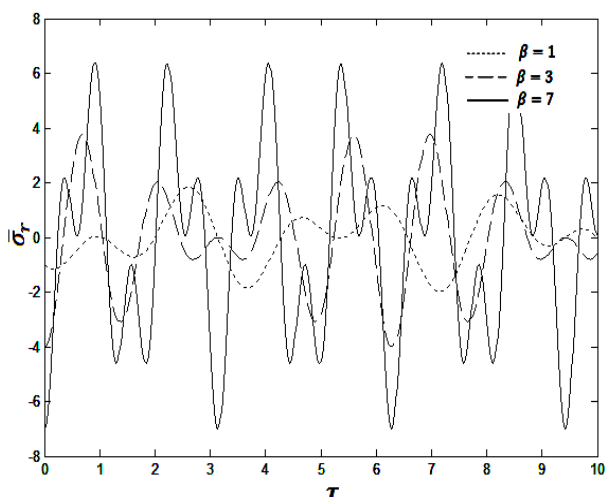
$$- \left( \frac{1+v^{(2)}}{1-v^{(2)}} \right) \frac{1}{s} \left( \frac{C^{(2)(n-2)}(\xi)}{(n-2)!} + 2 \frac{C^{(2)(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} + \frac{C^{(2)(2n)}(\xi)}{(2n)!} \right)$$

معادلات (۳۲) و (۳۳) را می‌توان به فرم ساده شده معادله (۳۴) نوشت:

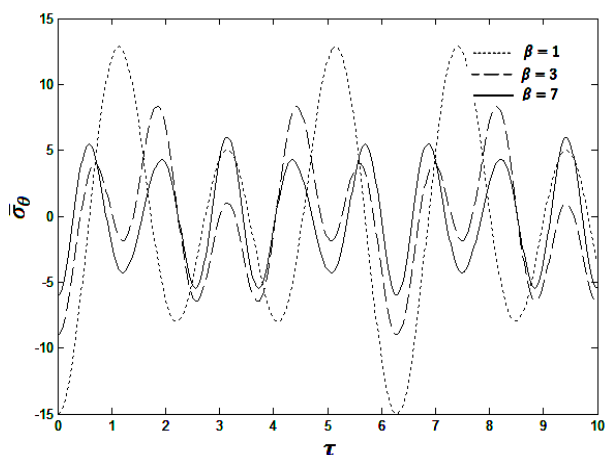
$$\phi_n^{(i)}(s) = \mathcal{X}_n^{(i)}(s)\phi_0^{(i)} + \mathcal{Y}_n^{(i)}(s)\phi_1^{(i)} + \mathcal{Z}_n^{(i)}(s), \quad i = 1, 2, 3 \quad (34)$$

در معادله (۳۴)،  $\mathcal{X}_n^{(i)}$ ،  $\mathcal{Y}_n^{(i)}$  و  $\mathcal{Z}_n^{(i)}$  از روابط بازگشتی (۳۲) و (۳۳) به‌دست می‌آیند و  $\phi_0^{(i)}$  و  $\phi_1^{(i)}$  ثابت‌های مجهول هستند که از شرایط مرزی (معادله (۲۵)) و شرایط پیوستگی (معادلات (۲۶) و (۲۷)) محاسبه می‌شوند. بنابراین، جابه‌جایی شعاعی به‌دست آمده مرتبط با هر یک از لایه‌ها را می‌توان به‌صورت معادله (۳۵) در حوزه لاپلاس بیان نمود:

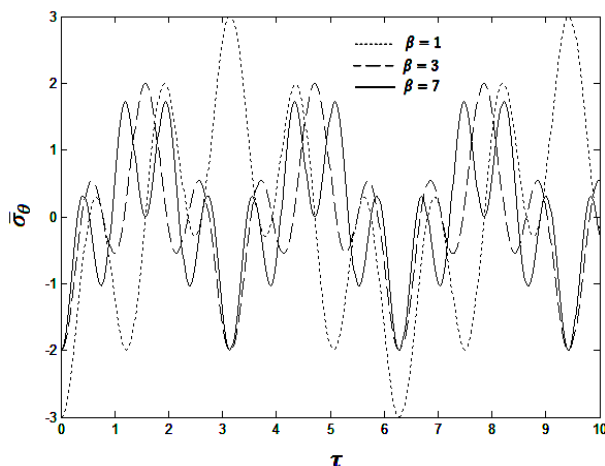
$$\bar{U}^{(i)}(\xi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \mathcal{X}_n^{(i)}(s)\phi_0^{(i)} + \mathcal{Y}_n^{(i)}(s)\phi_1^{(i)} + \mathcal{Z}_n^{(i)}(s) \right] (\xi-1)^n, \quad i = 1, 2, 3 \quad (35)$$



شکل ۶ تغییرات زمانی تنش شعاعی نسبت به تغییرات  $\beta$  در محل اتصال لایه‌های شماره ۲ و ۳ برای استوانه‌ای با شرایط شکل ۴



شکل ۷ تغییرات زمانی تنش محیطی نسبت به تغییرات  $\beta$  در صفحه داخلی استوانه برای استوانه‌ای با شرایط شکل ۴



شکل ۸ تغییرات زمانی تنش محیطی نسبت به تغییرات  $\beta$  در نقطه وسط استوانه برای استوانه‌ای با شرایط شکل ۴

ضریب پواسون هر سه لایه  $\nu = 0.3$  فرض شده است.

در شکل‌های ۴ الی ۶ اثر  $\beta$  بر تغییرات تنش شعاعی نسبت به زمان در سه نقطه مختلف نشان داده شده است. با افزایش  $\beta$  رفتار مشابهی در هر سه نقطه مشاهده می‌شود.

$$p = p_m V_m + p_c V_c = p_m V_m + p_c (1 - V_m)$$

$$V_m = \left( \frac{r - r_2}{r_3 - r_2} \right)^\beta \quad (37)$$

که  $p$  بیانگر خاصیت ترمومکانیکی جسم یعنی مدول یانگ، چگالی و یا ضریب انبساط حرارتی می‌باشد. اندیس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب بیانگر فلز و سرامیک می‌باشند و همچنین  $\beta$  عددی حقیقی و غیر منفی می‌باشد.

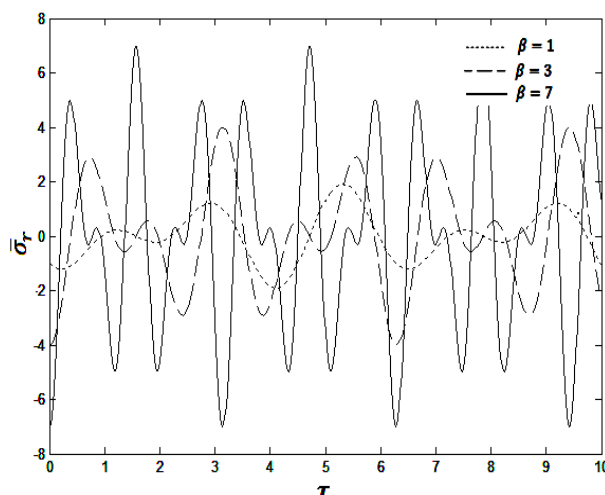
برای بررسی اثر شوک حرارتی بر رفتار میدان تنش استوانه، مرزها بدون شرایط بارگذاری سطحی در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین شرایط مرزی مکانیکی را می‌توان به صورت رابطه (۳۸) بیان نمود:

$$P_{in}(t) = 0, \quad P_{out}(t) = 0 \quad (38)$$

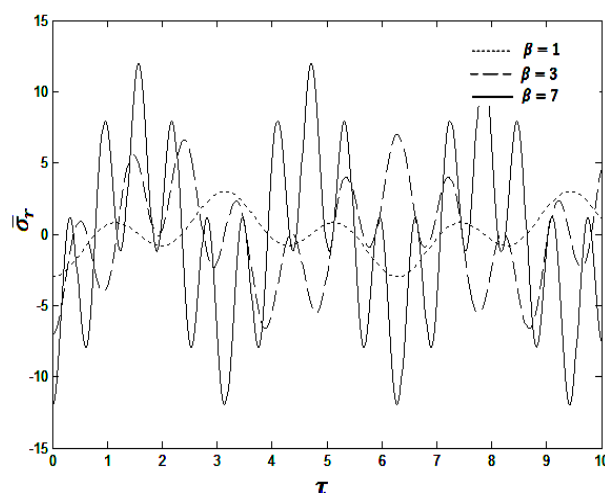
نتایج برای استوانه‌ای با لایه فلز ساخته شده از آلومینیوم و لایه سرامیک ساخته شده از آلومینا با خواص بیان شده در جدول ۱ به دست آمده است.

جدول ۱ خواص ترمو مکانیکی لایه‌های شماره ۱ و ۳ [۲۶]

ماده	ضریب انبساط حرارتی (1/°C)	چگالی (kg/m³)	مدول الاستیسیته (GPa)
آلومینا (سرامیک)	$7/4 \times 10^{-6}$	۳۸۰۰	۳۸۰
آلومینیوم (فلز)	$23 \times 10^{-6}$	۲۷۶۰	۷۰



شکل ۴ تغییرات زمانی تنش شعاعی نسبت به تغییرات  $\beta$  در محل اتصال لایه‌های شماره ۱ و ۲ برای استوانه‌ای با  $r_2 = 2r_1$ ،  $r_3 = 3r_1$  و  $r_4 = 4r_1$

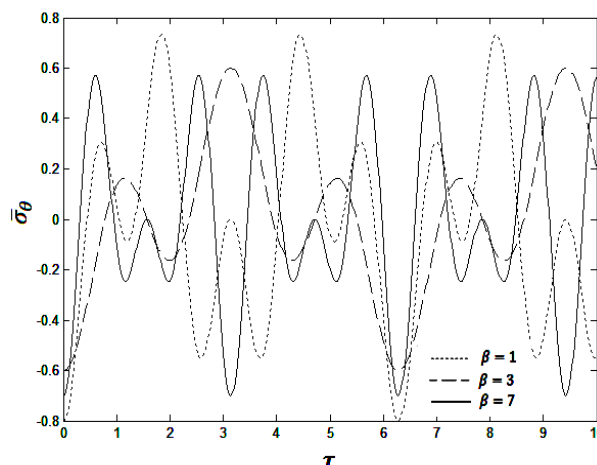


شکل ۵ تغییرات زمانی تنش شعاعی نسبت به تغییرات  $\beta$  در نقطه وسط استوانه برای استوانه‌ای با شرایط شکل ۴

تنش شعاعی (Pa)	$\sigma_{rr}$
تنش محیطی (Pa)	$\sigma_{\theta\theta}$
کرنش شعاعی	$\epsilon_{rr}$
کرنش محیطی	$\epsilon_{\theta\theta}$
ضریب انبساط حرارتی ( $1/^\circ\text{C}$ )	$\alpha$
ضریب پواسون	$\nu$
چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )	$\rho$

## ۷- مراجع

- [1] Y. M. Kolyano, B. V. Protsyuk, V. M. Sinyuta, The axisymmetric static problem of thermoelasticity for a multilayered cylinder, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 55, No. 6, pp. 920-926, 1991.
- [2] X. Wang, Y. N. Gong, An elastodynamic solution for multilayered cylinders, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, No. 1, pp. 25-33, 1992.
- [3] X. Wang, Stress wave propagation in a two-layered cylinder with initial interface pressure, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 12, pp. 1693-1700, 1993.
- [4] X. Wang, Thermal shock in a hollow cylinder caused by rapid arbitrary heating, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183, No. 5, pp. 899-906, 1995.
- [5] J. Q. Tarn, Exact solution for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 8189-8206, 2001.
- [6] V. E. Verijenko, S. Adali, P. Y. Tabakov, Stress distribution in continuously heterogeneous thick laminated pressure vessels, *Composite Structures*, Vol. 24, pp. 371-377, 2001.
- [7] Q. Wang, Axi-symmetric wave propagation in a cylinder coated with a piezoelectric layer, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 3023-3037, 2002.
- [8] Y. Ootao, Y. Tanigawa, Transient thermal stresses of angle-ply laminated cylindrical panel due to nonuniform heat supply in the circumferential direction, *Composite Structures*, Vol. 55, pp. 95-103, 2002.
- [9] K. C. Jane, Y. H. Wu, A generalized thermoelasticity problem of multilayered conical shells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 2205-2233, 2004.
- [10] J. Q. Tarn, Y. M. Wang, End effect of heat conduction in circular cylinders of functionally graded materials and laminated composites, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 5741-5747, 2004.
- [11] A. R. Shahani, S. M. Nabavi, Analytical solution of the quasi-static thermoelasticity problem in a pressurized thick-walled cylinder subjected to transient thermal loading, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 31, pp. 1807-1818, 2007.
- [12] M. Jabbaria, A. Bahtui, M. R. Eslami, Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, pp. 296-306, 2009.
- [13] Z. S. Shao, T. J. Wang, K. Ang, Transient thermo-mechanical analysis of functionally graded hollow circular cylinders, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 30, No. 1, pp. 81-104, 2007.
- [14] H. M. Wang, H. J. Ding, W. Ge, Transient responses in a two-layered elastopiezoelectric composite hollow cylinder, *Composite Structures*, Vol. 79, pp. 192-201, 2007.
- [15] M. Bayat, B. B. Sahari, M. Saleem, A. Ali, S. V. Wang, Thermoelastic solution of a functionally graded variable thickness rotating disk with bending based on the first-order shear deformation theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, pp. 568-582, 2009.
- [16] M. Shariyat, S. M. H. Lavasani, M. Khaghani, Nonlinear transient thermal stress and elastic wave propagation analyses of thick temperature-dependent FGM cylinders, using a second-order point-collocation method, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 898-918, 2010.
- [17] R. Ansari, F. Alisafaei, P. Ghaedi, Dynamic analysis of multi-layered filament-wound composite pipes subjected to cyclic pressure and cyclic temperature, *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 1100-1109, 2010.
- [18] A. Alibeigloo, Thermoelastic solution of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 961-972, 2011.
- [19] N. Soltani, K. Abrinia, P. Ghaderi, B. Hakimelahi, A numerical solution for the coupled dynamic thermoelasticity of axisymmetric thin conical shell, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 55, pp. 608-621, 2012.
- [20] J. Hein, J. Storm, M. Kuna, Numerical thermal shock analysis of functionally graded and layered materials, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 60, pp. 41-51, 2012.



شکل ۹ تغییرات زمانی تنش محیطی نسبت به تغییرات  $\beta$  در صفحه خارجی استوانه برای استوانه‌ای با شرایط شکل ۴

با توجه به رابطه (۳۷)، افزایش  $\beta$  باعث افزایش اثر سرامیکی استوانه می‌شود. با توجه به بیشتر بودن مدول یانگ در استوانه سرامیکی نسبت به استوانه آلومینیومی، سرعت انتشار امواج تنش در استوانه سرامیکی بیشتر از استوانه فلزی است. به این ترتیب با افزایش  $\beta$  در هسته انتظار می‌رود، سرعت انتشار امواج تنش در استوانه افزایش یابد که شکل‌های ۴ الی ۶ این مطلب را تایید می‌کنند.

شکل‌های ۷ الی ۹ نشان می‌دهند که تغییرات زمانی تنش محیطی به تغییر  $\beta$  وابسته است. با مقایسه این شکل‌ها می‌توان گفت بیشترین دامنه تنش محیطی در لایه داخلی رخ می‌دهد و با افزایش  $\beta$  دامنه تنش محیطی کاهش می‌یابد.

## ۵- نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر، به بیان روشی تحلیلی برای بررسی تنش‌های ترموالاستیک در یک استوانه ساندوویچی با هسته FGM تحت شوک حرارتی پرداخته است. معادلات حرکت با استفاده از تبدیل لاپلاس به حوزه لاپلاس تبدیل شدند و بعد از حل معادلات با استفاده از روش سری توانی، پاسخ‌های به‌دست آمده با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس، به حوزه زمانی تبدیل شدند. در این بررسی، چگونگی تغییرات رفتار زمانی تنش‌های نقاط مختلف استوانه نسبت به تغییر  $\beta$  مورد مطالعه قرار گرفته است. می‌توان گفت با افزایش  $\beta$ ، دامنه نوسانات تنش شعاعی نیز افزایش می‌یابد. همچنین نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد، با افزایش  $\beta$ ، سرعت انتشار امواج تنشی افزایش می‌یابد. چون سرعت انتشار امواج در سرامیک بیشتر از آلومینیوم است و با افزایش  $\beta$ ، کسر حجمی سرامیک افزایش پیدا می‌کند، لذا طبق نتایج، با افزایش  $\beta$  سرعت انتشار امواج نیز افزایش می‌یابد. یکی مهم‌ترین تفاوت‌های پژوهش حاضر با سایر پژوهش‌های مشابه، توانایی آن در تحلیل رفتار استوانه‌های FGM تحت شوک‌های دمایی و مکانیکی دلخواه است.

## ۶- فهرست علائم

مدول یانگ (Pa)	$E$
شعاع (m)	$r$
زمان (s)	$t$
دما (K)	$T$
جابجایی شعاعی (m)	$u_r$

- [24] A. Alibeigloo, Three-dimensional thermo-elasticity solution of sandwich panel with functionally graded core, *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 458-468, 2014.
- [25] F. Durbin, Numerical inversion of laplace transform: An efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Computer Journal*, Vol. 17, pp. 371-376, 1974.
- [26] Y. Ootao, Transient thermoelastic and piezothermoelastic problems of functionally graded materials, *Journal of Thermal Stress*, Vol. 32, No. 6, pp. 656-697, 2009.
- [21] M. Jabbarzadeh, J. Eskandari Jam, M. Khosravi, The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 59-73, 2012. (In Persian)
- [22] E. Sheibani, M. Mirzaei, Numerical analysis of mechanical and thermal stress in thin cylindrical tube under internal gaseous detonation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 112-121, 2012. (In Persian)
- [23] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. Esmailzadeh Khadem, General solution of plane elasticity of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 31-43, 2010. (In Persian)