



## توزیع درجه حرارت در یک استوانه توخالی متشکل از مواد هدفمند با استفاده از مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تأخیر زمان منفرد کسری

عزیز عظیمی<sup>۱\*</sup>، شهاب غلامی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران اهواز  
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران اهواز  
# اهواز، صندوق پستی ۱۵۷-۶۱۳۵۵ a.azimi@scu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله، به بررسی حل عددی هدایت حرارتی غیرفوریه بر اساس مدل تأخیر زمان منفرد کسری در یک استوانه غیرهمگن توخالی ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته شده است. برای این منظور، تمامی خواص ماده هدفمند به صورت کاملاً متغیر و براساس قانون توانی در نظر گرفته و تنها تأخیر زمانی و مرتبه کسری به صورت ثابت در نظر گرفته شده‌اند. استوانه به صورت یک‌بعدی و کاملاً متقارن و بدون حضور منبع گرمایی در نظر گرفته شده‌است. مسئله در یک الگوریتم سعی و خطا به منظور یافتن مقادیر تأخیر زمانی و مرتبه کسری با استفاده از یک روش عددی ضمنی حل گردیده است. جهت اعتبارسنجی مسئله، نتایج بدست آمده از حل عددی تأخیر زمان منفرد کسری و حل عددی تأخیر زمانی دوگانه با نتایج بدست آمده از روش نیمه تحلیلی تأخیر زمانی دوگانه مقایسه شده‌است. در ادامه تأثیر پارامترهای غیرهمگنی بر روی ماکسیمم دمای گذرا و سرعت موج گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین توزیع دمایی در جسم از لحظه ایجاد موج تا لحظه رسیدن به دمای پایا مورد بررسی قرار گرفته و در آخر به بررسی تأثیر تغییر تأخیر زمانی و مرتبه کسری بر روی توزیع دما در جسم پرداخته شده‌است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: ۱۹ آذر ۱۳۹۲  
پذیرش: ۱۶ بهمن ۱۳۹۲  
ارائه در سایت: ۰۷ مرداد ۱۳۹۳  
کلیدواژه‌ها:  
هدایت حرارتی  
مدل غیرفوریه  
مدل تأخیر فاز منفرد کسری  
مدل تأخیر زمان دوگانه  
مواد هدفمند

## Temperature distribution in a hollow cylinder composed of functionally graded material using non-Fourier fractional single phase lag model

Aziz Azimi\*, Shahab Gholami

Drilling Research Center, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran  
\* P.O.B. 61355-157, Ahvaz, Iran, a.azimi@scu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 December 2013  
Accepted 05 February 2014  
Available Online 29 July 2014

#### Keywords:

Heat Conduction  
Non-Fourier Model  
Fractional Single Phase Lag  
Double Phase Lag  
Functionally Graded Material

### ABSTRACT

In this study, numerical solution of non-Fourier heat conduction is discussed by a fractional single phase lag model in an inhomogeneous hollow cylinder made of a functionally graded material. For this purpose, all material properties of the media are assumed to vary continuously according to a power-law formulation except the phase lag and fractional order considered as constants. It is assumed that the cylinder is one-dimensional, symmetric and without any heat source. The governing equation has been solved numerically in a try and error algorithm to find the phase lag and the fractional order using an implicit numerical method. In order to validate the results, the numerical solutions of the fractional single phase lag model and the dual phase lag model are compared to the results of semi-analytical dual-phase lag. In the following the influence of non-homogeneity parameters is studied on the maximum transient temperature and thermal wave transmission speed. The temperature distribution is investigated from wave creation instance to steady state thermal distribution. Finally, the effect of different time delays and fraction orders on the temperature distribution is investigated.

### ۱- مقدمه

تعداد زیادی لایه تشکیل شده و خواص مواد در آن به آرامی تغییر می‌کند. همچنین مواد هدفمند، مواد کامپوزیتی با ساختار غیرهمگن هستند که به سبب مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا به طور گسترده در صنایع مدرن کاربرد دارند [۱]. در مواد هدفمند تغییرات پیوسته خواص باعث می‌شود تا اثراتی همچون لایه‌لایه شدن کامپوزیت‌ها مشاهده نشود. یکی از کاربردهای مواد هدفمند قابلیت استفاده آن‌ها به عنوان سپرهای حرارتی به علت مقاومت حرارتی بالای آن‌ها است. به همین دلیل، امروزه آنالیز حرارتی این مواد بسیار

مواد هدفمند<sup>۱</sup> (FGM) مواد کامپوزیت پیشرفته‌ای هستند که به علت تعداد فازهای مختلف دارای ساختار پیچیده‌ای می‌باشند. خواص گرمایی و مکانیکی کامپوزیت‌ها به ساختار مواد سازنده و نحوه قرار گرفتن مواد سازنده بستگی دارند. به طور کلی دو نوع ماده هدفمند وجود دارد: یکی با تغییرات پیوسته خواص مواد و دیگری با تغییرات گسسته خواص مواد به گونه‌ای که جسم از

1- Functionally graded material

### Please cite this article using:

A. Azimi, Sh. Gholami, Temperature distribution in a hollow cylinder composed of functionally graded material using non-Fourier fractional single phase lag model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 61-67, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مورد توجه محققین قرار گرفته است [۲].

با استفاده از تبدیل لاپلاس گالرکین و روش المان مرزی مورد مطالعه قرار دادند. سوترادر و پائولینیو [۱۳] یک روش المان مرزی برای هدایت حرارتی گذرا در مواد هدفمند ارائه دادند. خسروی فرد و همکارانش [۱۴] با استفاده از روش بدون شبکه به بررسی هدایت حرارتی گذرا در مواد هدفمند پرداختند. بابایی و چن [۱۶، ۱۵] هدایت حرارتی هذلولی غیرفوری را در یک کره و استوانه توخالی غیرهمگن ساخته شده از مواد هدفمند مورد مطالعه قرار دادند. کلس و کانکر [۱۷] یک کره و استوانه توخالی ساخته شده از مواد هدفمند را از طریق هدایت حرارتی هذلولی مورد بررسی قرار دادند. رهیده و همکارانش [۱۸] هدایت حرارتی با سرعت موج محدود را در یک ماده هدفمند چندلایه که در معرض تولید حرارت بود شبیه سازی کردند. اکبرزاده و چن [۱۹] هدایت حرارتی یک بعدی مواد هدفمند را برای انواع مختصات و انواع شرایط مرزی بر اساس نظریه تأخیر زمانی دوگانه بررسی کردند. اکبرزاده و چن [۲۰] در بررسی دیگری هدایت حرارتی گذرا در یک صفحه استوانه ای از جنس مواد هدفمند بر اساس تئوری تأخیر زمانی دوگانه را مورد مطالعه قرار دادند. گلپهار حقیقی و همکارانش [۲۱] هدایت حرارتی گذرای معکوس را در یک ماده هدفمند استوانه ای چندلایه بررسی کردند. آن ها از روش انتقال حرارت غیرفوری به منظور بالا بردن دقت استفاده کردند و همچنین بر اساس اندازه گیری دمای روی سطح خارجی استوانه، ضریب انتقال حرارت جابجایی و شارحرارتی صفحه داخلی استوانه را تخمین زدند.

در زمینه حساب کسری تاکنون کاری به صورت عددی و تحلیلی در مواد هدفمند انجام نشده است؛ اما در محیط های دیگر کارهایی صورت گرفته که می توان به بررسی های زیر اشاره کرد. باتاگلیا و همکارانش [۲۳، ۲۲]، رفتار حرارتی گذرای یک سیستم را از طریق یک رابطه خطی مرتبه کسری بین دما و شار حرارتی مطالعه کردند. موریو [۲۴] مسئله معکوس معادله هدایت حرارتی کسری در یک قطعه محدود را بررسی کرد و یک روش عددی برای حل معادله حرارت کسری معرفی کرد. قاضی زاده و همکارانش [۲۵] به بررسی هدایت حرارتی در یک قطعه بافت زیستی با استفاده از روش تأخیر فاز منفرد کسری پرداختند. بدین منظور در مقاله حاضر از مزایای روش حساب کسری در جهت بررسی اثرات گذرای ناشی از شرط مرزی اعمال شده روی سطح یک ماده هدفمند استفاده شده است. اعمال شرط مرزی فوق، ایجاد یک رفتار شبه موجی در ماده هدفمند را ممکن ساخته که مطالعات محققان قبلی نشان از قابلیت و توانایی بکارگیری مدل غیرفوری توأم با روش حساب کسری در قالب مدل FSPL در تسخیر این رفتار می دهند.

در مقاله حاضر به بررسی حل عددی هدایت حرارتی غیرفوری در یک ماده هدفمند یک بعدی استوانه ای با استفاده از مدل تأخیر زمانی منفرد کسری پرداخته شده است. مسئله با استفاده از روش ضمنی گسسته سازی شده است. خواص مواد به طور پیوسته تغییر می کنند که این تغییر بر اساس قانون توانی در نظر گرفته می شود. در این مطالعه با استفاده از حل نیمه تحلیلی روش تأخیر زمانی دوگانه [۱۹]، نتایج حاصل از حل روش های عددی تأخیر زمانی دوگانه و تأخیر زمانی منفرد کسری اعتبارسنجی شده و سپس به بررسی تأثیر پارامترهای غیرهمگنی، تأخیر زمانی، مرتبه کسری و تاریخچه دمایی تا رسیدن به دمای پایا پرداخته می شود.

## ۲- معادلات حاکم

در این تحقیق، هدایت حرارتی مواد هدفمند بر اساس مدل های غیرفوری ای مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله مدل های استفاده شده در این بررسی می توان به مدل های تأخیر زمانی دوگانه و تأخیر زمانی منفرد کسری اشاره کرد.

در راستای آنالیز حرارتی مواد، از مدل هدایت حرارتی فوری به طور گسترده برای پیش بینی توزیع دمایی این گونه مواد استفاده می شود، این مدل بر سرعت موج گرمایی بی نهایت تأکید دارد. این فیزیک بدین معنی است که یک تغییر محلی دما هر چند کوچک سبب ایجاد اغتشاش دمایی در هر نقطه از محیط حتی در فواصل بسیار دور از تحریک اولیه می گردد. اگر چه سرعت بی نهایت موج گرمایی از نظر فیزیکی قابل قبول نیست ولی در بسیاری از کاربردهای مهندسی فرض قابل قبولی تلقی شده و استفاده از مدل فوری به نتایج بسیار دقیقی منجر می شود؛ اما با پیشرفت صنعت و تکنولوژی ثابت شد که در شرایطی همچون حضور منابع حرارتی با شدت بالا و شرایط بسیار گذرا از قبیل مسائلی که در آن ها از لیزر برای ایجاد شار حرارتی استفاده می شود و همچنین انتقال حرارت در شرایط دمایی بسیار پایین، انتقال حرارت روی لایه های نازک فلزی، نیمه رساناها و ابررساناها و مواد با ساختار غیرهمگن و متخلخل، سرعت موج گرمایی می تواند محدود باشد. در نتیجه مدل فوری قابلیت پاسخ به این شرایط را ندارد و این مسئله باعث ایجاد شاخه ای در علم انتقال حرارت شد که هدایت حرارتی غیرفوری نامیده می شود.

بدین منظور کاتانو و ورنات [۴، ۳] اولین کسانی بودند که مدل هدایت حرارتی هایپربولیک را که بر سرعت موج گرمایی محدود اشاره داشت، معرفی کردند. سپس ژو [۵] مدل تأخیر زمانی دوگانه (DPL) را ارائه داد که به دو مقدار تأخیر زمانی اشاره داشت: تأخیر زمان گرادیان دمایی مفسر تأخیر زمان به علت واکنش های میکروساختاری از قبیل فونون-الکترون یا پراکندگی فونون و همچنین تأخیر زمان شار گرمایی بیانگر زمان آسایش آثار گذرا همانند مدل کاتانو ورنات بود. در چند سال اخیر مدل دیگری توسط قاضی زاده و همکارانش [۶] بر پایه حساب کسری با عنوان روش تأخیر زمانی منفرد کسری (FSPL) ارائه شد. حساب کسری توانایی بالایی از خود در مدل کردن رفتارهای غیرعادی در فرآیندهای پیچیده نشان داده است. حساب کسری، مشتق و انتگرال از مرتبه غیرصحیح است و این ویژگی روش حساب کسری سبب می شود که توانایی بهتری در توصیف واکنش های میکروساختاری و اثرات گذرای زمانی در مقایسه با روش های قبلی در دسترس باشد.

تاکنون مقالات زیادی به بررسی انتقال حرارت غیرفوری در مواد همگن و مواد کامپوزیتی پرداخته اند، از جمله این مقالات می توان به موارد زیر اشاره کرد. فرانکل و همکارانش [۷] یک فرمولاسیون یک بعدی دما و شارحرارتی برای هدایت حرارت هذلولوی در یک جسم کامپوزیتی ارائه دادند. رونگ هو و همکارانش [۸] انتقال حرارت یک ساختار چندلایه را از طریق مدل هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه با استفاده از روش لاتیس بولتزمن مورد بررسی قرار دادند. سای و همکارانش [۹] اثرات غیرفوری ای بر رفتار دینامیک گرمایی اجسام کروی و کامپوزیتی دو لایه ناشی از تغییرات ناگهانی دما را مطالعه کردند. رامادان [۱۰] یک حل نیمه تحلیلی برای هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه در جسم چندلایه ارائه داد. ژانگ شوان و همکارانش [۱۱] توزیع دمایی در مواد کامپوزیت چندلایه سرامیکی را با هدف استفاده از هدایت حرارتی غیرفوری ای مورد بررسی قرار دادند و با توزیع دمایی بدست آمده از مدل هدایت حرارتی فوری در ساختار پوشش سپرهای حرارتی مقایسه نمودند.

تا به امروز مقالات کمی در زمینه انتقال حرارت غیرفوری در مواد غیرهمگن و مواد هدفمند ارائه شده است که می توان به موارد زیر اشاره کرد. سوترادر و همکارانش [۱۲] هدایت حرارتی گذرا در مواد همگن و غیرهمگن

1- Dual Phase Lag  
2- Fractional Single Phase Lag

## ۱-۲- مدل تأخیر زمانی دوگانه

مدل تأخیر زمانی دوگانه نخستین بار توسط ژو [۵] و با در نظر گرفتن دو تأخیر زمانی ارائه شد. به طور کلی این مدل را برای اجسام جامد می‌توان به صورت معادله (۱) بیان کرد:

$$q(r, t + \tau_q) = -K \nabla T(r, t + \tau_T) \quad (1)$$

در این مدل، با فرض کوچک بودن هر دو تأخیر زمانی، معادله (۱) با استفاده از بسط تیلور، بسط داده شده و با صرف نظر از جمله‌های مرتبه دوم و بالاتر، شکل خطی معادله تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۲) بدست می‌آید:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) q(r, t) = -K \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T(r, t) \quad (2)$$

با تعریف معادله بالانس انرژی به صورت معادله (۳):

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) q(r, t) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

و ترکیب معادله (۲) با معادله بالانس انرژی، معادله (۳)، معادله هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۴) بدست می‌آید:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) (\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) (k(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial T}{\partial r}) \quad (4)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در مدل تأخیر زمانی دوگانه در صورتی که از تأخیر زمان گرادیان دمایی صرف نظر شود، معادله (۴) به معادله تأخیر زمان منفرد یا کاتانو-ورنات کاهش داده می‌شود و در صورتی که از هر دو تأخیر زمان گرادیان دمایی و تأخیر زمان شار گرمایی صرف نظر شود، معادله تأخیر زمانی دوگانه به معادله کلاسیک فوریه کاهش داده می‌شود. همچنین قابل ذکر است که برای مواد با  $\tau_q < \tau_T$ ، شار حرارتی به سبب وجود گرادیان دمایی است و همچنین برای موادی با  $\tau_q < \tau_T$ ، وجود گرادیان دمایی به سبب وجود شار حرارتی است. به گونه‌ای که هنگامی که  $\tau_q < \tau_T$  باشد، ترم مشتق ترکیبی، اثرات ترم موجی را از بین می‌برد و معادله در این حالت سهموی می‌شود و هدایت حرارتی را غیرموجی پیش‌بینی می‌کند؛ اما این رفتار متفاوت از نفوذ عادی است که توسط معادله هدایت حرارتی سهموی کلاسیک فوریه بیان می‌شود. خواص مواد هدفمند یک‌بعدی، بر اساس قانون توانی در نظر گرفته می‌شوند. طبق رابطه (۵) داریم:

$$\begin{aligned} k(\eta) &= k_0 \eta^{n_1}, \\ \rho(\eta) &= \rho_0 \eta^{n_2}, \\ C_p(\eta) &= C_{p0} \eta^{n_3} \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $C_{p0}$ ،  $\rho_0$  و  $k_0$  مقادیر ثابتی هستند که خواص جسم بر روی سطح خارجی آن را نشان می‌دهند و همچنین  $n_1$ ،  $n_2$  و  $n_3$  پارامترهای غیرهمگنی هستند که خواص جسم را نشان می‌دهند. به گونه‌ای که پارامترهای غیرهمگنی همان الگوی تغییر خواص در ماده است. در واقع با تغییر مقادیر پارامترهای غیرهمگنی می‌توان خواص متفاوتی برای ماده هدفمند بدست آورد که باعث تغییر رفتار این ماده در مقابل انتقال حرارت هدایتی می‌شوند. در نهایت با استفاده از پارامترهای معادله (۶) به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{k_0}{\rho_0 C_{p0}}, \quad \zeta = \frac{\psi t}{r_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{\psi \tau_q}{r_0^2}, \quad \delta = \frac{\psi \tau_T}{r_0^2}, \\ \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_\infty}, \quad \theta_{wi} = \frac{T_{wi} - T_\infty}{T_\infty}, \quad \theta_{wo} = \frac{T_{wo} - T_\infty}{T_\infty}, \\ r_r &= \left(\frac{r}{r_0}\right), \quad Q_r = \frac{r_0 q_r}{k_0 T_\infty}, \quad \eta = \left(\frac{r}{r_0}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

جایی که  $T_{wi}$  و  $T_{wo}$  دماهای سطح درونی و بیرونی جسم می‌باشند و در نهایت با استفاده از پارامترهای بی‌بعد ارائه شده در معادله ۶، معادله بی‌بعد مدل تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۷) بدست می‌آید:

$$\eta^{n_2+n_3} \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \left(1 + \delta \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \times \left[ (n_1 + 1) \eta^{n_1-1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \eta^{n_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right] \quad (7)$$

## ۲-۲- مدل تأخیر زمانی منفرد کسری

مدل غیرفوریه تأخیر زمانی منفرد کسری با در نظر گرفتن رابطه‌ی تأخیر زمانی منفرد به صورت معادله (۸):

$$q(r, t + \tau_q) = -K \nabla T(r, t) \quad (8)$$

و با بسط دادن ترم شارحرارتی به وسیله‌ی بسط تیلور کسری که توسط ادیبات و شوافه [۲۶] ارائه شده‌است برای اطلاعات بیشتر به مطالعه قاضی زاده و همکاران مراجعه شود [۶]. همچنین با صرف نظر کردن از جملات مرتبه دوم و بالاتر در معادله (۸)، به صورت معادله (۹) بدست می‌آید:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) q(r, t) = -K \nabla T(r, t) \quad (9)$$

در معادله بالا  $\alpha$  مرتبه مشتق کسری است و مقدار آن  $0 < \alpha < 1$  است.

همچنین قابل ذکر است که  $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$  مشتق زمانی مرتبه کسری، بر اساس تعریف کاپوتو است که برای اطلاع بیشتر در مورد چگونگی رفتار حساب کسری می‌توان به کتاب معادلات دیفرانسیل کسری نوشته پودلونی [۲۷] مراجعه شود. با ترکیب معادله (۹) با معادله بالانس انرژی در نهایت معادله (۱۰) مربوط به تأخیر زمانی منفرد کسری بدست می‌آید:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) (\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) (k \frac{\partial T}{\partial r}) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (10)$$

در معادله (۱۰)،  $\alpha$  مرتبه کسری است و می‌تواند مقادیر  $0 < \alpha < 1$  را داشته باشد، به گونه‌ای که با در نظر گرفتن  $\alpha = 0$  و یا  $\tau_q = 0$ ، معادله تأخیر زمان منفرد کسری به معادله فوریه تبدیل می‌شود و توزیع دما رفتار پخششی را از خود نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن  $\alpha = 1$ ، معادله فوق به معادله تأخیر زمانی منفرد یا هایپربولیک تبدیل می‌شود و توزیع دما یک رفتار موجی را نشان می‌دهد. همچنین با قراردادن مقادیر بین صفر و یک برای مرتبه کسری در معادله (۱۰) می‌توان رفتار پخششی - موجی فرآیند انتقال حرارت را تسخیر نمود.

در نهایت با استفاده از پارامترهای بی‌بعد ارائه شده معادله (۶)، معادله بی‌بعد تأخیر زمانی منفرد کسری به صورت معادله (۱۱) بدست می‌آید:

$$\eta^{n_2+n_3} \left(1 + \varepsilon^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial \zeta^\alpha}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \left[ (n_1 + 1) \eta^{n_1-1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \eta^{n_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right] \quad 0 < \alpha < 1 \quad (11)$$

مدل‌های بر اساس حساب کسری تاکنون بیشتر از جنبه ریاضی مورد بررسی قرار گرفته‌اند ولی به دلیل توانایی بالای آن‌ها در مدل کردن رفتار گرمایی مواد به تازگی از نقطه نظر جنبه‌های فیزیکی نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند.

## ۳- گسسته‌سازی معادله هدایت حرارتی تأخیر زمان منفرد کسری

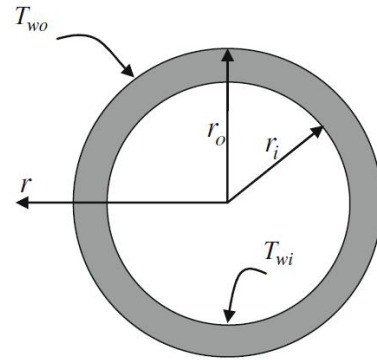
همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادله (۱۱) شامل ترمی با مشتق غیرصحیح است. قاضی‌زاده و همکارانش [۶] یک روش برای بدست آوردن مقدار مشتق غیرصحیح ارائه داده‌اند.

## ۵- نتایج

در این قسمت قبل از هر چیز لازم است که به اعتبارسنجی مسئله پرداخته شود ولی قبل از اعتبارسنجی به منظور بدست آوردن توزیع دما در جسم با استفاده از روش عددی، می‌بایست استقلال شبکه مورد استفاده جهت حل عددی با انتخاب صحیح مقادیر گام‌های زمانی و مکانی مورد بررسی قرار گرفته و مقادیر مناسبی برای آن‌ها بدست آورده شود. شکل ۲ توزیع دمای جسم برای گام‌های زمانی و مکانی مختلف را برای مدل تأخیر زمانی دوگانه نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود برای گام زمانی  $\Delta t = 0.004$  و گام مکانی  $\Delta r = 0.001$  مقدار خطا زیاد است. با کوچک کردن گام‌های زمانی و مکانی، مقدار گام زمانی و مکانی مناسب حل عددی مشخص خواهد شد. همان‌گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با انتخاب مقادیر گام زمانی  $\Delta t = 0.0008$  و گام مکانی  $\Delta r = 0.001$  می‌توان به طور نسبی مطمئن شد که شبکه مناسب و معقولی برای استفاده در حل عددی بدست آورده شده است. با کوچک‌تر کردن گام‌های زمانی و مکانی، نوسان در پاسخ دمایی حاصل شده و تغییری در دقت حل عددی به وجود نمی‌آید، لذا مابقی نتایج با در نظر گرفتن مقادیر  $\Delta t = 0.0008$  و  $\Delta r = 0.001$  ارائه شده‌اند.

در شکل ۲، همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار ماکسیمم درجه حرارت از مقدار ماکسیمم درجه حرارت روی مرزها بیشتر شده است که این به علت فیزیک حاکم بر مسئله بوده و ناشی از انباشت انرژی در درون جسم به علت وجود غیرهمگنی در جسم است. به گونه‌ای که هرچه از سطح بیرونی به سمت داخلی حرکت شود، خواص جسم کاهش می‌یابد؛ بنابراین جسم به زمان بیشتری نیاز دارد تا انرژی را منتقل کند و این باعث انباشت انرژی می‌شود. این موضوع سبب می‌شود هرچه موج به سطح درونی نزدیک شود مقدار دمای آن افزایش یابد.

جهت اعتبارسنجی، نتایج حاصل از حل عددی مدل DPL با نتایج حاصل از حل نیمه تحلیلی انجام شده توسط اکبرزاده و چن [۱۹] در شکل ۳ مقایسه شده‌اند. در مدل تأخیر زمانی دوگانه هر چه مقادیر تأخیر زمان گرادپان دمایی و تأخیر زمان شار گرمایی به هم نزدیک باشند پاسخ دمایی حاصل شده به مدل فوریه نزدیک می‌شود. لذا در شکل ۳ نموداری که مربوط به دو مقدار تأخیر زمانی نزدیک به هم هستند، دارای پاسخ دمایی مشابه با مدل فوریه است. برای اطمینان از صحت حل عددی علاوه بر مقایسه نتایج مربوط به پاسخ دمایی در حالت  $\delta = 0.25$ ، نتایج حل نیمه تحلیلی برای حالت  $\delta = 0$  نیز با هم مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود نمودارهای حل عددی و نیمه تحلیلی به خوبی همپوشانی دارند و گویای این مطلب است که حل عددی توانسته به خوبی حل نیمه تحلیلی انجام شده توسط اکبرزاده و چن [۱۹] را مدل کند. پس از اعتبارسنجی حل عددی معادله تأخیر زمانی دوگانه با حل نیمه تحلیلی، نتایج حاصل از حل‌های عددی DPL و FSPL مربوط به جسم FGM استوانه‌ای یک‌بعدی با فرض اینکه مقدار تأخیر زمان بی‌بعد شار گرمایی برابر با  $\epsilon = 0.346$  و تأخیر زمان بی‌بعد گرادپان دمایی برابر  $\delta = 0.001$  باشند، با یکدیگر مقایسه شده‌اند که پاسخ مربوط به این حالت، در شکل ۴ نشان داده شده است. در این مقایسه برای استفاده از روش تأخیر زمانی منفرد کسری لازم است که مقادیر مربوط به  $\epsilon$  و  $\alpha$  بدست آیند. با چندین بار سعی و خطا مقادیر  $\epsilon = 0.346$  و  $\alpha = 0.998$  بدست می‌آیند که با توجه به فیزیک موجی بودن مسئله مورد بررسی و نزدیکی مقادیر بدست آمده به مقادیر مدل DPL و همپوشانی نمودارها نشان از صحت نتایج مدل FSPL در تسخیر رفتار شبه موجی مسئله مورد بررسی دارد.



شکل ۱ جسم مورد بررسی

آن‌ها با تقریب عددی مشتق کسری بر پایه تعریف کاپوتو توانستند مقدار مشتق غیرصحیح را بدست آورند. با در نظر گرفتن تقریب عددی مشتق کسری، معادله (۱۱) به صورت معادله (۱۲) گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{\partial^{1+\alpha} \theta}{\partial \zeta^{1+\alpha}} = \sigma_{1+\alpha} \sum_{j=1}^k \omega_j^{1+\alpha} (\theta_i^{k-j+1} - 2\theta_i^{k-j} + \theta_i^{k-j-1}),$$

$$\sigma_{1+\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\Delta \zeta^{1+\alpha}},$$

$$\omega_j^{1+\alpha} = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha} \quad (12)$$

و همچنین گسسته‌سازی عبارات شامل مشتق صحیح به صورت معادله (۱۳) می‌باشد:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{3\theta_i^k - 4\theta_i^{k-1} + \theta_i^{k-2}}{2\Delta \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \frac{\theta_{i-1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i+1}^k}{\Delta \eta^2},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\theta_{i+1}^k - \theta_{i-1}^k}{2\Delta \eta} \quad (13)$$

## ۴- تعریف مسئله

مسئله مورد بررسی، هدایت حرارتی در یک ماده هدفمند استوانه‌ای است که در ابتدا در دمای  $300$  درجه کلون قرار داشته و سپس سطح خارجی آن به طور ناگهانی تحت تأثیر تغییرات ناگهانی دما به اندازه  $600$  درجه کلون قرار می‌گیرد. در این مسئله، همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود مشابه با پژوهش انجام گرفته توسط اکبرزاده و چن [۱۹] استوانه مورد بررسی، استوانه‌ای با شعاع‌های  $r_o = 1$  m و  $r_i = 0.6$  m است.

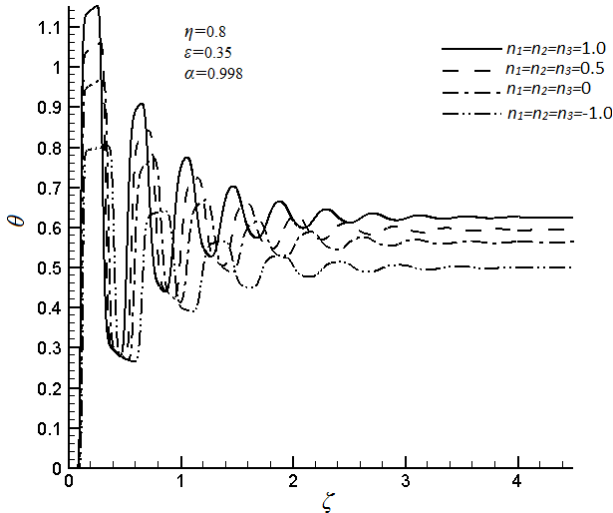
این مسئله به صورت نیمه تحلیلی با استفاده از مدل‌های فوریه، هدایت حرارتی هاینرپولیک و تأخیر زمانی دوگانه توسط اکبرزاده و چن [۱۹] حل شده است. ولی با استفاده از مدل تأخیر زمانی منفرد کسری در هیچ مرجعی بررسی نشده است. در تحقیق حاضر، مسئله به صورت عددی و با استفاده از روش‌های تأخیر زمانی دوگانه و تأخیر زمانی منفرد کسری مورد مطالعه قرار گرفته است.

با در نظر گرفتن معادلات به صورت بی‌بعد شده، شرایط مرزی و اولیه بی‌بعد برای جسم به صورت معادله (۱۴) تعریف می‌شوند:

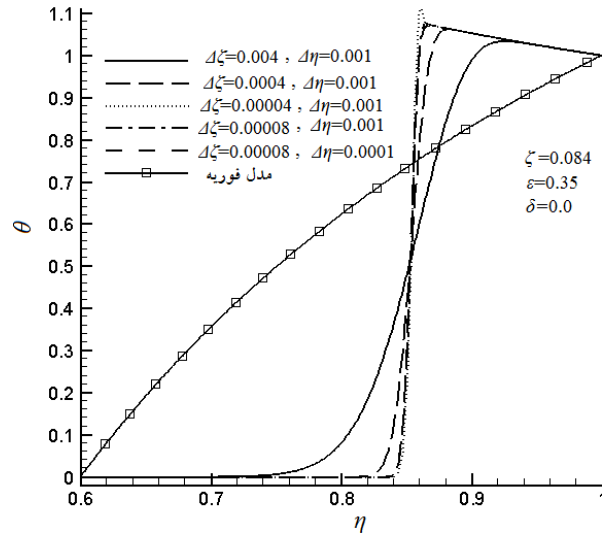
$$\theta(0, \eta) = 0.0, \quad \theta(\zeta, 0) = 0.0,$$

$$\theta(\zeta, 1) = 1.0, \quad Q(0, \eta) = 0.0 \quad (14)$$

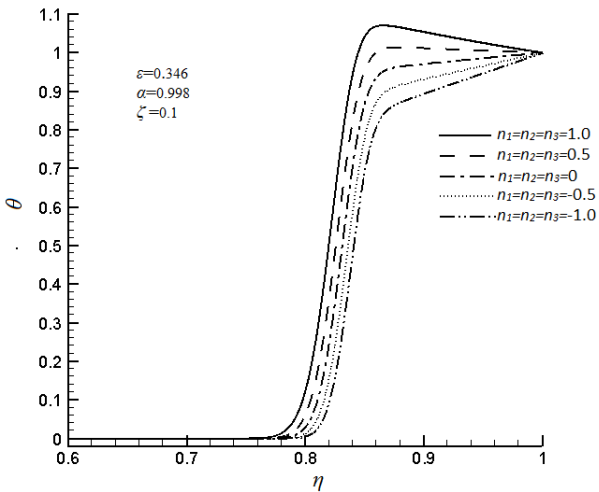
برای حل این مسئله، از روش عددی ضمنی جهت گسسته‌سازی معادله حاکم به دلیل پایداری مناسب این روش، استفاده شده است. مقدار پارامترهای غیرهمگنی در این تحلیل به جز برای شکل‌های ۵ و ۶ به صورت  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$  در نظر گرفته شده‌اند.



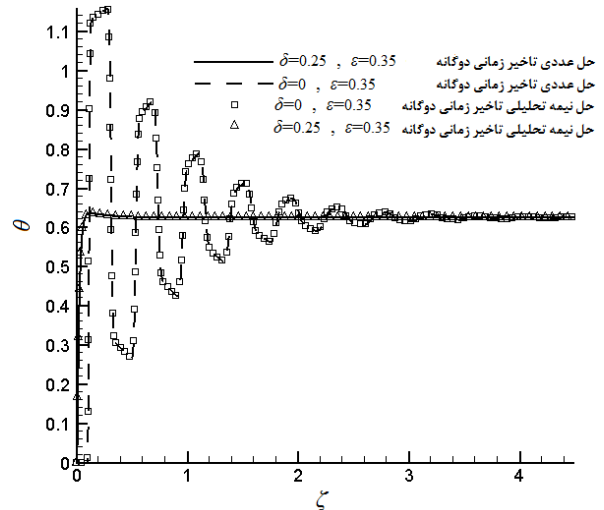
شکل ۵ اثر پارامتر غیرهمگنی در تاریخچه دمایی در مکان بی بعد  $\eta=0/8$



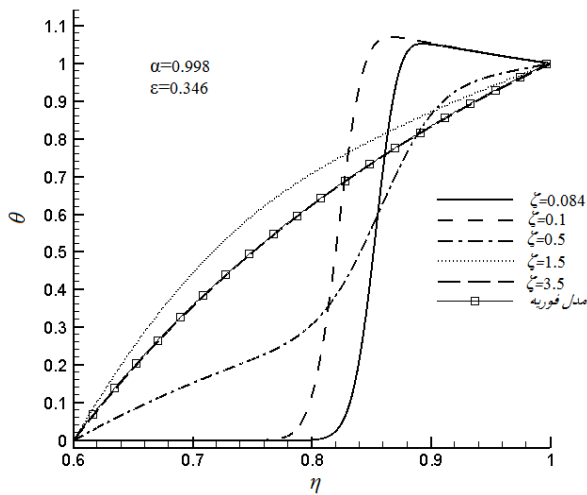
شکل ۲ توزیع دما به ازای گام‌های مختلف در زمان بی بعد  $\zeta=0/84$



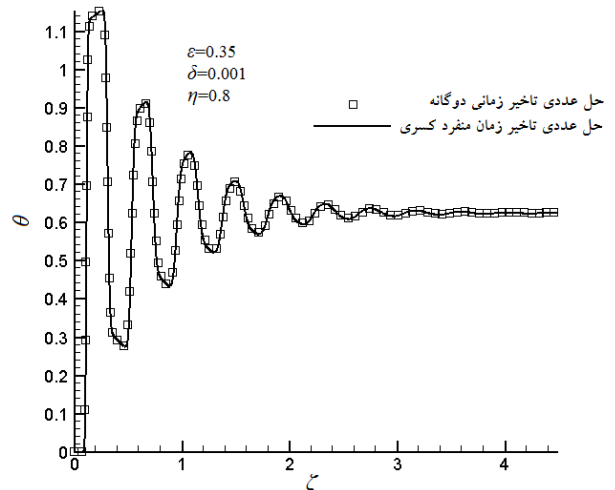
شکل ۶ تأثیر پارامتر غیرهمگنی بر توزیع دما در جسم در زمان بی بعد  $\zeta=0/1$



شکل ۳ مقایسه حل نیمه تحلیلی با حل عددی تأخیر زمانی دوگانه



شکل ۷ توزیع دما در جسم در زمان‌های بی بعد مختلف



شکل ۴ مقایسه حل عددی تأخیر زمانی منفرد کسری با تأخیر زمانی دوگانه

شکل ۵ تأثیر پارامتر غیرهمگنی را در زمان‌های مختلف و مکان بی بعد  $\eta=0/8$  بر تاریخچه دمایی نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هرچه مقدار پارامترهای غیرهمگنی در جسم بیشتر باشد به سبب انباشت انرژی در جسم ماکسیمم دمای گذرا در جسم بیشتر شده و مقدار دمای پایایی جسم بالاتر می‌رود.

پس از اعتبارسنجی مربوط به تحلیل عددی به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف در جسم FGM یک بعدی با استفاده از روش عددی تأخیر فاز منفرد کسری پرداخته شده است. شکل‌های ۵ و ۶ تأثیر پارامترهای غیرهمگنی را نشان می‌دهند.

سطح درونی انعکاس می‌یابد. رفت و برگشت موج تا جایی که دیگر در جسم تغییر دمایی مشاهده نشود ادامه خواهد داشت که به این حالت دمایی پایایی جسم گفته می‌شود. در لحظه‌ای که جسم از نظر دمایی به حالت پایا می‌رسد توزیع دمایی آن مشابه توزیع دمایی مدل فوریه است.

شکل ۸ توزیع دمایی جسم را در زمان بی‌بعد  $\zeta=0.1$  به ازای مقادیر مختلف مرتبه کسری نشان می‌دهد. در این شکل مقدار تأخیر زمان بی‌بعد  $\varepsilon=0.346$  در نظر گرفته شده است.

همان‌گونه که در شکل ۸ مشخص است مقادیر مرتبه کسری نزدیک به یک، ماهیت موجی مسئله را نشان می‌دهد به گونه‌ای که هر چه مقدار  $\alpha$  به یک نزدیک باشد رفتار گرمایی جسم مشابه رفتار گرمایی مدل کاتانو-ورنات است. با کاهش مقدار مرتبه کسری ماهیت موجی جسم به حالت پخشی-موجی می‌رسد که رفتار گرمایی جسم نه به صورت پخشی و نه به صورت موجی است و رفتار گرمایی جسم بین حالت پخشی و موجی قرار دارد. با کاهش بیشتر مقدار مرتبه کسری و برای مقادیر نزدیک به صفر، رفتار گرمایی جسم به حالت پخشی نزدیک می‌شود.

شکل ۹ توزیع دما در جسم را در زمان بی‌بعد  $\zeta=0.1$  به ازای مقادیر مختلف تأخیر زمانی برای مدل تأخیر زمانی منفرد کسری نشان می‌دهد. در این شکل مقدار مرتبه کسری برابر  $\alpha=0.998$  در نظر گرفته شده است. شکل ۹ تأثیر تغییرات مقدار تأخیر زمانی منفرد کسری را در توزیع دمایی جسم نشان می‌دهد، به گونه‌ای که هر چه مقدار تأخیر زمان بیشتر باشد موج ایجاد شده دارای سرعت کمتری بوده و هرچه مقدار تأخیر زمانی کمتر باشد موج گرمایی ایجاد شده دارای سرعت بیشتری می‌شود. برای مقدار تأخیر زمانی صفر رفتار گرمایی جسم کاملاً پخشی بوده و سرعت موج گرمایی بی‌نهایت است.

## ۶- نتیجه گیری

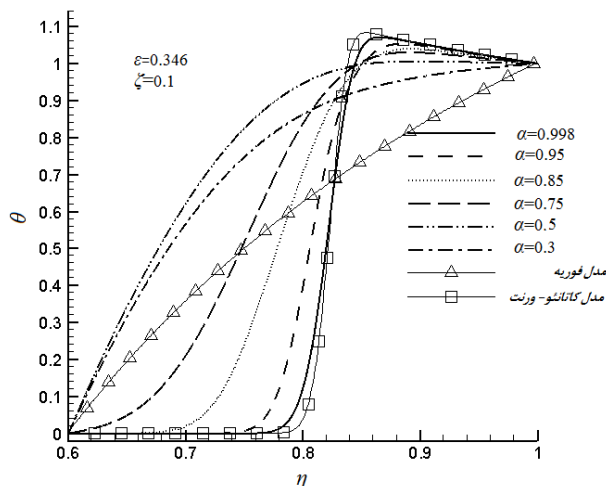
در این مطالعه به بررسی انتقال حرارت غیرفوریه بر اساس مدل تأخیر زمانی منفرد کسری در یک استوانه توخالی ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته شد. تمامی خواص جسم به صورت پیوسته و براساس قانون توانی در نظر گرفته شدند ولی تأخیر زمانی و مرتبه کسری برای سادگی به صورت ثابت مورد استفاده قرار گرفتند.

مسئله به صورت عددی و با استفاده از روش ضمنی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین مسئله با حل نیمه‌تحلیلی تأخیر زمان دوگانه اعتبارسنجی شد که حکایت از دقت بسیار بالای مدل FSPM دارد. در این بررسی به تأثیر پارامترهای غیرهمگنی و تأثیر تغییرات مرتبه کسری و تأخیر زمانی و همچنین تاریخچه دمایی جسم تا لحظه رسیدن به توزیع دمایی پایا پرداخته شد که می‌توان نتایج مورد بررسی را به طور خلاصه به صورت زیر بیان کرد:

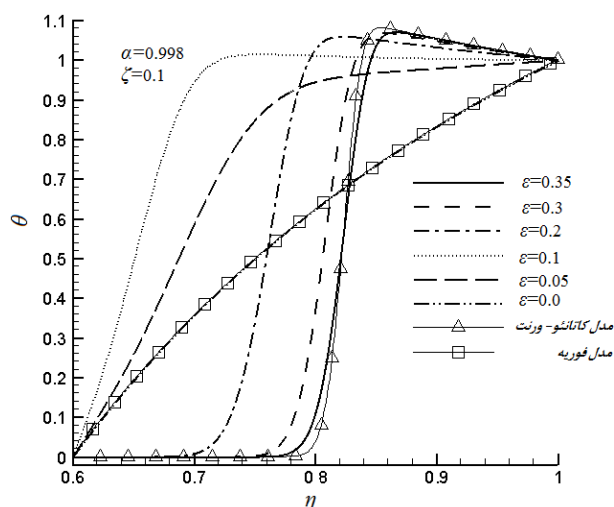
- سرعت موج گرمایی به پارامترهای غیرهمگنی خواص جسم وابسته است به گونه‌ای که هر چه مقدار پارامترهای غیرهمگنی در جسم بیشتر باشد سرعت موج گرمایی بیشتری را نتیجه می‌دهد.

- برای پارامترهای غیرهمگنی بالاتر مقدار دمایی پایایی بیشتری نتیجه می‌شود.
- با گذشت زمان و رسیدن به دمایی پایا، توزیع دمایی جسم مشابه مدل فوریه می‌گردد.

- هرچه مرتبه کسری به یک نزدیک باشد ماهیت رفتار گرمایی جسم، مشابه رفتار کاملاً موجی خواهد شد. با کاهش مقدار مرتبه کسری، ماهیت رفتار گرمایی جسم به حالت پخشی-موجی می‌رسد و برای مرتبه کسری نزدیک به



شکل ۸ اثر تغییرات مرتبه کسری در تاریخچه دمایی در زمان بی‌بعد  $\zeta=0.1$



شکل ۹ اثر تغییرات تأخیر فاز در تاریخچه دمایی در زمان بی‌بعد  $\zeta=0.1$

دمایی پایا، دمایی است که با گذشت زمان در آن تغییری مشاهده نشود. شکل ۶ تأثیر پارامتر غیرهمگنی را در زمان بی‌بعد  $\zeta=0.1$  بر توزیع دما در طول جسم نشان می‌دهد.

این شکل به خوبی تأثیر پارامتر غیرهمگنی را در ایجاد موج شکل گرفته شده نشان می‌دهد. به گونه‌ای که موج ایجاد شده با غیرهمگنی بالاتر دارای مقدار ماکسیمم دمایی بالاتری است. ماکسیمم دمایی بالاتر به سبب وجود ترم‌های غیرهمگنی که با تغییر پیوسته خواص مواد در جسم وجود دارد، است، به گونه‌ای که هر چه مقدار غیرهمگنی بالاتر باشد تجمع انرژی به سبب کاهش ضریب هدایت حرارتی افزایش می‌یابد؛ بنابراین هر چه موج به سمت شعاع داخلی استوانه حرکت کند تجمع انرژی در جسم باعث بالاتر رفتن ماکسیمم دمایی می‌شود. همچنین قابل ذکر است که هرچه غیرهمگنی جسم بیشتر باشد سرعت موج گرمایی در جسم بیشتر خواهد بود.

شکل ۷ توزیع دما در جسم را در زمان‌های بی‌بعد مختلف به ازای مقادیر  $\varepsilon=0.346$  و  $\alpha=0.998$  برای جسم FGM با استفاده از مدل تأخیر زمانی منفرد کسری نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در لحظه  $\zeta=0.1$  موج ایجاد شده از سطح بیرونی جسم در حال حرکت به سمت سطح درونی جسم است و پس از رسیدن به سطح درونی، به سمت سطح بیرونی منعکس می‌شود. توزیع دما در زمان بی‌بعد  $\zeta=0.5$  موج منعکس شده به سطح بیرونی جسم را نشان می‌دهد. پس از رسیدن به سطح بیرونی جسم دوباره به سمت

- صفر رفتار گرمایی جسم کاملاً پخشی خواهد شد.
- (۵) هرچه مقدار تأخیر زمانی بیشتر باشد، موج ایجاد شده دارای سرعت کمتری است و برعکس.
- ### ۷- فهرست علائم
- |               |  |
|---------------|--|
| $k_0$         | ضریب هدایت حرارتی سطح خارجی ( $W m^{-1} K^{-1}$ )          |
| $c$           | ظرفیت گرمایی در فشار ثابت ( $J kg^{-1} K$ )                |
| $c_{p_0}$     | ظرفیت گرمایی در فشار ثابت برای سطح خارجی ( $J kg^{-1} K$ ) |
| $k$           | ضریب هدایت حرارتی ( $W m^{-1} K^{-1}$ )                    |
| $n$           | پارامتر غیرهمگنی   |
| $q$           | شار گرمایی ( $W m^{-2}$ )                                  |
| $Q$           | شار گرمایی بی بعد  |
| $r$           | موقعیت بردار (m)   |
| $r_i$         | شعاع سطح داخلی جسم (m)                                     |
| $r_o$         | شعاع سطح خارجی جسم (m)                                     |
| $t$           | زمان (s)   |
| $T$           | دما (K)  |
| $T_{w_i}$     | دمای سطح داخلی (K)   |
| $T_{w_o}$     | دمای سطح خارجی (K)   |
| $T_{\infty}$  | دمای محیط (K)  |
| $r_{\lambda}$ | ضخامت جسم (m)  |
- ### علائم یونانی
- |               |                                 |
|---------------|---------------------------------|
| $\alpha$      | مرتبیه کسری                     |
| $\varepsilon$ | تأخیر زمان شار گرمایی بی بعد    |
| $\delta$      | تأخیر زمان گرادیان بی بعد       |
| $\zeta$       | زمان بی بعد                     |
| $\eta$        | مکان بی بعد                     |
| $\theta$      | دمای بی بعد                     |
| $\rho$        | چگالی ( $kg m^{-3}$ )           |
| $\rho_0$      | چگالی سطح خارجی ( $kg m^{-3}$ ) |
| $\tau_q$      | تأخیر زمان شار گرمایی (s)       |
| $\tau_T$      | تأخیر زمان گرادیان دمایی (s)    |
| $\psi$        | نفوذ گرمایی ( $m^2 s^{-1}$ )    |
- ### ۸- مراجع
- [1] J. Rohde, S. Schmauder, G. Bao, Mesoscopic modelling of gradient zones in hardmetals, *Journal of Computational Materials Science*, Vol. 7, No. 1, pp. 63-67, 1996.
  - [2] M. Koizumi, The Concept of FGM, ceramic transactions, functionally Gradiant Materials, American Ceramic Society, *Westerville, OH*, Vol. 34, No. 1, pp. 3-10, 1993.
  - [3] P. Vernotte, Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur, *comptes rendus de l'Academie bulgare des sciences*, Vol. 246, pp. 3154-3155, 1958.
  - [4] C. Cattaneo, Sulla conduzione del calore, Atti del seminario matematico e fisico dell, *Universita di Modena*, Vol. 3, pp. 83-101, 1948.
  - [5] D.Y. Tzou, A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scale, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, No. 1, pp. 8-16, 1995.
  - [6] H.R. Ghazizadeh, M. Maerefat, A. Azimi, Explicit and implicit finite difference schemes for fractional Cattaneo equation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 19, pp. 7042-7057, 2010.