

مقاله کوتاه

## حل عددی جریان جابه‌جایی آزاد گذرا حول کره با استفاده از روش DQ-IDQ

محمد مقیمی اردکانی\* و مهران عامری\*\*  
بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۸/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۹/۲۷)

(IDQM)

(DQM)

چکیده -

واژگان کلیدی :

### Numerical Solution of Transient Free Convection Using DQ-IDQ Method around Sphere

M. A. Moghimi and M. Ameri

Mechanical Engineering Department, University of Shahid Bahonar, Kerman, Iran

**Abstract:** *The applicability of the differential quadrature method (DQM) and incremental differential quadrature method (IDQM) in solving the unsteady free convection flow over a sphere is investigated in this paper. The rules of DQ method are used in both Spatial and temporal domains. Also, it is shown that splitting the total temporal domain greatly enhances the*

\*\* - دانشیار

\* - کارشناسی ارشد

*performance of method. It is worth mentioning that this is the first attempt in using these methods for modeling of transient convective fluid flow. Two advantages of IDQM over the conventional methods are shown through the results of this study, which are: (1) unconditional stability & (2) minimum computational effort required. For this purpose, the convergence study is performed and for the cases that a solution is available, comparison is done.*

**Keywords:** DQM, IDQM, Free Convection, Transient.

## ۱- مقدمه

گسسته‌سازی عددی معادلات پاره زمان‌مند به دو بخش تقسیم می‌شود، گسسته‌سازی مکانی و گسسته‌سازی زمانی. در گسسته‌سازی مکانی روشهای بسیاری توسط محققان استفاده می‌شود، که از آن جمله می‌توان به روشهای تفاضل محدود، اجزای محدود، حجم محدود، طیفی<sup>۱</sup> و روش مربعات دیفرانسیل (DQM) اشاره کرد. از میان این روشها سه روش اول جزو روشهای مرتبه پایین به حساب می‌آیند در حالی که روشهای طیفی و مربعات دیفرانسیل به عنوان روشهای مرتبه بالا شناخته می‌شوند. روشهای مرتبه پایین برای به دست آوردن دقت کافی در محاسبات نیازمند تعداد گره‌های محاسباتی بسیاری‌اند. این در حالی است که در روشهای مرتبه بالا، حتی با استفاده از تعداد گره‌های محاسباتی کم نیز، نتایج عددی از دقت خوبی برخوردار است. روش مربعات دیفرانسیل نخستین بار توسط بلمن و همکاران [۲۰۱] ارائه شد و پس از آن توسط شو و همکاران [۳-۶] در زمینه بهود محاسبه ضرایب وزنی گامهای به‌سزایی برداشته شد. این روش در دامنه‌های منظم با تعداد گره‌های کم و هزینه محاسباتی پایین قادر به یافتن جوابهای عددی با دقت بسیار زیاد است [۶]. برای اعمال این روش در دامنه‌های نامنظم می‌بایست در صورت امکان به نگاشتها در تصویر کردن دامنه نامنظم به دامنه منظم استفاده کرد. در مسایل سازه‌ای و ارتعاشات از روش مربعات دیفرانسیل به طور گسترده‌ای استفاده شده است [۷-۱۰]. همچنین این روش برای حل عددی معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر دوبعدی، با استفاده از روابط ورتیسیتی - تابع جریان ( $\omega, \psi$ ) در دامنه‌های منظم و با استفاده از نگاشتها در دامنه‌های نامنظم، به‌طور موثر و با راندمان محاسباتی بالا به‌کار گرفته شده است [۱۱-۱۷]. اما به

هر حال، به دلیل عدم وجود یک رابطه انتقال برای فشار و یا یک رابطه برای فشار در معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر با متغیرهای اولیه و همچنین عدم وجود یک مکانیزم بالادستی<sup>۲</sup> در این روش، روش مربعات دیفرانسیل با گستردگی زیاد برای حل عددی مسایل مرتبط با جریان سیال مورد استفاده قرار نگرفته است. اما برای حل این دو مشکل کارهای بسیار خوبی انجام شده است [۱۸ و ۱۹].

در مقایسه با گسسته‌سازی مکانی، توجه کمتری نسبت به گسسته‌سازی زمانی انجام گرفته است. در اکثر مسایل گذرا که روش مربعات دیفرانسیل بر روی آنها اعمال شده است از مربعات دیفرانسیل برای گسسته‌سازی دامنه مکانی استفاده شده است و از روشهای مختلف تفاضل محدود در گسسته‌سازی دامنه زمانی استفاده شده است. این روشها تحت عنوان روشهای مربعات دیفرانسیل هیبریدی<sup>۳</sup> شناخته می‌شوند [۲۰ و ۲۱]. از جمله مهمترین معایب روشهای مربعات دیفرانسیل هیبریدی ناپایداری آنهاست [۲۲]. بنابراین محققان به فکر استفاده از روشهای مربعات دیفرانسیل غیرهیبریدی افتادند، از جمله به‌روزترین و کاراترین این روشها می‌توان به ترکیب مربعات دیفرانسیل تکه‌ای (IDQ) با مربعات دیفرانسیل (DQ) اشاره کرد. ایده روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای در سال ۲۰۰۶ توسط هاشمی و همکاران [۲۳] به‌کار گرفته شده است. بدلیل نوپا بودن ایده این روش تعداد مقالات در این زمینه محدود است. به هر حال از این روش در حل عددی مسایل انتقال گرمای هدایت گذرا استفاده شده است [۲۴-۲۶]. این روش با تکه تکه کردن دامنه محاسباتی بر زیر دامنه‌ها و اعمال روش مربعات دیفرانسیل بر هر زیر دامنه به بالابردن کارایی این روش کمک شایانی می‌کند. این روش در مسایلی که گرادیان متغیرها در

## ۲- اصول ریاضی روش دیفرانسیل کوادریچر

ایده اولیه این روش برگرفته شده از روش انتگرالگیری مربعی است. در این روش نیز مشتق در یک راستای معین از تمامی گره‌های محاسباتی در این راستا اثر می‌پذیرد. میزان اثرپذیری گره‌های محاسباتی را ماتریس ضرایب وزنی تعیین می‌کند. به عبارت دیگر مشتق یک تابع نسبت به متغیر آن در یک نقطه معین، با مجموع خطی حاصلضرب ضرایب وزنی در مقدار تابع در نقاط موجود در دامنه آن متغیر محاسبه می‌شود تابع  $g(\eta, \tau)$  را در نظر بگیرید که میدان آن بر روی یک ناحیه مستطیلی به صورت  $0 \leq \eta \leq a$  و  $0 \leq \tau \leq b$  قرار دارد. در ناحیه داده شده مقادیر تابع معلوم است و یا اینکه بر روی نقاط ناحیه خواسته شده‌اند.

بر اساس روش مربعات دیفرانسیل، مشتق  $\mathcal{R}$  تابع  $g(\eta, \tau)$  را می‌توان این‌گونه تقریب زد.

$$\frac{\partial^r g(\eta, \tau)}{\partial \eta^r} \Big|_{(\eta, \tau) = (\eta_i, \tau_j)} = \sum_{m=1}^{N_\eta} A_{im}^{\eta(r)} g(\eta_m, \tau_j) \quad (1)$$

$$= \sum_{m=1}^{N_\eta} A_{ij}^{\eta(r)} g_{mj}$$

$$i = 1, 2, \dots, N_\eta, \quad j = 1, 2, \dots, N_\tau$$

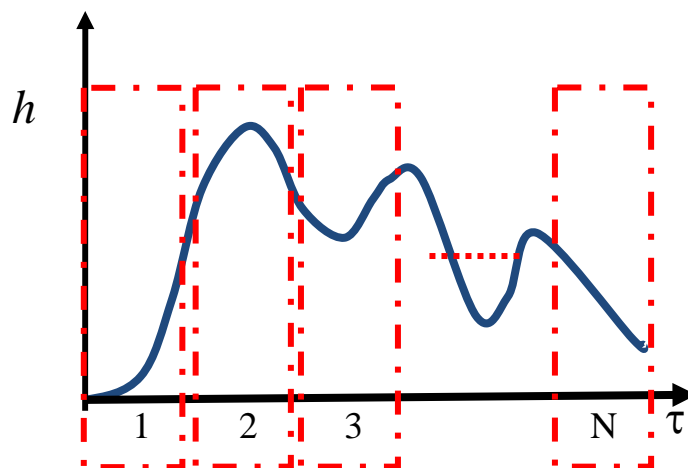
که  $A_{ij}^{\eta(r)}$  ضرایب وزنی و  $N_\eta$  تعداد کل گره‌ها در دامنه مورد نظر است. این تقریب را تقریب کلی روش شو می‌نامند که الهام گرفته شده از تقریب بلمن است. از جمله مشکلاتی که روش بلمن داشت بد وضعیت بودن ماتریس ضرایب وزنی با افزایش تعداد نقاط و افزایش مرتبه مشتقات و همچنین نبود رابطه‌ای صریح برای محاسبه ماتریس ضرایب مشتقات بالاتر است که شو [۶] با ارایه روش خود بر این مشکلات فایز آمد و موفق به ارایه روش صریحی برای به‌دست آوردن ماتریس ضرایب شد. با توجه به معادله (۱) مولفه اساسی در تقریب مربعات دیفرانسیل تعیین ضرایب وزنی  $(A_{ij}^{\eta(r)})$  است و انتخاب نقاط نمونه است. به منظور تعیین ضرایب وزنی می‌بایست از مجموعه از توابع آزمون در معادله (۱) استفاده کرد که شو با انتخاب تابع لاگرانژ به عنوان تابع آزمون کلی، ضرایب وزنی

بازه‌ای از دامنه اصلی دارای تغییرات شدیدی باشد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

از طرفی مسئله جابه‌جایی آزاد به عنوان مسئله رایج در تشخیص کارایی الگوریتم‌های عددی پیشنهادی، استفاده می‌شود. علت این امر وابسته بودن معادله مومتم به معادله انرژی از طریق نیروی بویانسی است. از طرف دیگر، با توجه به اینکه این الگوریتم تا کنون بر روی مسایل جریان جابه‌جایی گذرا استفاده نشده است؛ در این مقاله، به منظور اثبات کارایی و دقت الگوریتم عددی ترکیبی پیشنهادی، مسئله جابه‌جایی آزاد گذرا در اطراف کره بررسی شده است.

در زمینه جابه‌جایی آزاد در اطراف کره پژوهشهای بسیاری انجام شده است [۲۷-۲۹]. از جمله آخرین کارهایی که در این زمینه انجام شده است می‌توان به مقیمی و همکاران [۳۰] اشاره کرد که جریان جابه‌جایی آزاد مگنتو هیدرو دینامیک اطراف کره در محیط متخلخل با در نظر گرفتن تواید و جذب گرما در حالت دایم بررسی کرده‌اند. اما در حالت گذرا معمولاً پژوهشگران به سراغ هندسه‌های ساده‌تر رفته‌اند و هندسه‌هایی چون کره کمتر مورد توجه قرار گرفته است. اینگهام و همکاران [۳۱] به بررسی جریان جابه‌جایی آزاد گذرا اطراف سطوح همدمای سه بعدی در گرافهای بالا پرداختند. ینگ و همکاران [۳۲] به بررسی جریان جابه‌جایی آزاد گذرا اطراف کره همدمای پرداختند که برای این کار از روش حجم محدود استفاده کردند. سایتو و همکاران [۳۳] جریان جابه‌جایی آزاد گذرا اطراف کره با شار ثابت را بررسی کردند که از روش حجم محدود برای مدل‌سازی استفاده کردند. کاتیگاری و پاپ [۳۴] جریان جابه‌جایی آزاد گذرا را اطراف کره دما ثابت را با استفاده از تفاضل محدود بررسی کردند.

در این مقاله به بررسی کارآمدی الگوریتم ترکیبی DQ-IDQ برای حل عددی جریان جابه‌جایی آزاد لایه مرزی گذرا پرداخته شده است. بدین منظور جریان جابه‌جایی آزاد گذرا بر روی کره بررسی شده و کارآمدی استفاده از این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتمها نشان داده شده است.



شکل ۱- چگونگی اعمال روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای بر یک تابع زمان‌مند دلخواه

$$\frac{\eta_i}{a} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{(N_\eta - 1)} \right] \right\},$$

$$\frac{\tau_j}{b} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(j-1)\pi}{(N_\tau - 1)} \right] \right\}, \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, N_\eta; j = 1, 2, \dots, N_\tau$

### ۳- اصول روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای

کارایی این روش عمدتاً در مسایلی که گرادینان متغیرهای مطلوب مسئله در یک مقطع از دامنه شدید باشد، خودش را به وضوح نشان می‌دهد. یکی از کاربردهای این روش جریانهای گذراست که در لحظات آغازین گرادینان مولفه‌های سرعت جریان و دما بسیار شدید است. بنابراین استفاده از این روش بر روی دامنه زمانی بسیار کارآمد خواهد بود. تابع  $h(\varepsilon, \delta, \tau)$  را در نظر بگیرید که  $\varepsilon, \delta$  متغیر مکانی و  $\tau$  متغیر زمانی تابع مذکور است. فرض کنید روند تغییرات تابع  $h$  بر حسب زمان به صورت شکل (۱) باشد. در این روش به جای بررسی کل دامنه زمانی (هر دامنه محاسباتی که مربعات دیفرانسیل تکه‌ای می‌خواهد بر آن اعمال شود) به صورت یک‌جا، دامنه زمانی به زیر دامنه‌هایی شکسته می‌شود. سپس، با اعمال روش مربعات دیفرانسیل بر هر یک از این زیر دامنه‌ها، نتایج عددی دلخواه تعیین می‌شود. نتایج به دست آمده در آخرین گام زیر دامنه به

برای تعیین مشتق مرتبه اول در جهت  $\eta_i$  به نحو زیر تعیین کرده است [۶]:

$$A_{ij}^\eta = \begin{cases} -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_\eta} A_{ij}^\eta & \text{for } i = j \\ \frac{1}{a} \frac{M(\eta_i)}{(\eta_i - \eta_j)M(\eta_j)} & \text{for } i \neq j \end{cases}; \quad (2)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N_\eta$

که در آن

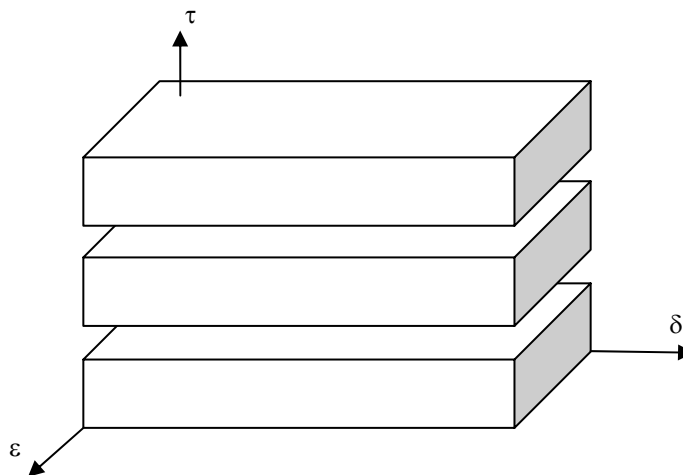
$$M(\eta_i) = \prod_{j=1, i \neq j}^{N_\eta} (\eta_i - \eta_j) \quad (3)$$

برای محاسبه ضرایب مشتقات مرتبه بالاتر، شو [۶] روش زیر را پیشنهاد داده است که به روش ضرب ماتریسی معروف است.

$$\begin{aligned} [A^{(m)}] &= [A^{(1)}][A^{(m-1)}] \\ &= [A^{(m-1)}][A^{(1)}], \quad m = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $m$  مرتبه مشتق را نشان می‌دهد. به همین منوال نیز می‌توان ضرایب وزنی مربوط به جهت  $\tau$  را نیز به دست آورد.

همان‌گونه که شو [۶] نشان داده است انتخاب شبکه نایکنواخت چیشف-گاس-لوباتو<sup>۵</sup> منجر به دقت بالاتر و پایداری مطلق حل عددی می‌شود. بنابراین انتخاب گره‌ها بر روی ناحیه محاسباتی با استفاده از معادله زیر تعیین می‌شود.



شکل ۲- نحوه تکه تکه کردن دامنه محاسباتی در روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای

$$\frac{\partial(RU)}{\partial X} + \frac{\partial(RV)}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_{\infty}) \sin \left( \frac{X}{a} \right) \quad (7)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

شرایط مرزی و اولیه به شرح زیر است:

$$\text{at } Y = 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = T_w \quad (9\text{-الف})$$

$$\text{at } Y \rightarrow \infty: \quad U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_{\infty} \quad (9\text{-ب})$$

$$\text{at } t = 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = T_{\infty} \quad (9\text{-ج})$$

که در آن  $U$  و  $V$  به ترتیب مولفه‌های سرعت در راستای  $X$  و  $Y$  اند.  $a$  شعاع کره،  $\rho$  چگالی سیال،  $\mu$  لزجت دینامیکی سیال،  $k$  ضریب هدایت گرمایی،  $g$  شتاب جاذبه،  $\beta$  ضریب انبساط گرمایی و  $C_p$  گرمای ویژه در فشار ثابت است.  $R$  فاصله شعاعی از محور تقارن تا سطح کره است و  $w$  و  $\infty$  به ترتیب نمایش دهنده شرایط بر روی سطح کره و در جریان آزاد هستند.

پارامترهای بدون بعد به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴].

$$x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{2\sqrt{vt}}, \quad \tau = 2\sqrt{\frac{vt\sqrt{Gr}}{a^2}} \quad (10)$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_{\infty})a^3}{\nu^2}, \quad r(x) = a \sin(x)$$

عنوان شرایط اولیه برای مرحله بعد استفاده می‌شود. همان‌طور که گفته شد در راستایی که این روش اعمال می‌شود، دامنه محاسباتی مرتبط با آن راستا به زیر بازه‌هایی شکسته می‌شود و در آن زیر بازه‌ها روش مربعات دیفرانسیل اعمال می‌شود این مسئله در شکل (۲) نشان داده شده است.

#### ۴- مدل‌سازی ریاضی جریان

حال جریان جابه‌جایی آزاد لایه مرزی گذرا اطراف کره هم‌دما بررسی می‌شود، این هندسه به دلیل پیچیدگیهای معادلات آن مخصوصاً در حالت گذرا کمتر توسط سایر محققان به کار گرفته شده است. نمایی از مسئله مورد مطالعه را در شکل (۱) می‌بینید. فرضیات زیر در بررسی جریان گذرا بر روی کره استفاده شده است:

جریان سیال، لایه‌ای و تراکم‌ناپذیر دمای  $T_{\infty}$  در نظر گرفته شده است. از جمله اتلافات ویسکوز صرف نظر شده است و همچنین اثر جریان شناوری القایی ناشی از جمله گرادیان فشار ناچیز در نظر گرفته شده است. از طرفی در زمان  $t = 0$ ، دمای کره غوطه‌ور در سیال ناگهان از دمای سیال محیط برابر با  $T_{\infty}$  به دمای سطح  $T_w$  می‌رسد و پس از آن در آن دما باقی می‌ماند.

با توجه به فرضیات فوق و با استفاده از تقریب بوزینسک معادلات لایه مرزی این گونه است [۲۷-۳۰]:

شرط به صورت خودکار شرط دوم را نیز ارضا می‌کند. دوم اینکه همان‌گونه که از درجه معادلات حاکم بر مسئله پیداست، این مسئله برای حل بر روی ناحیه مذکور به دو شرط بر روی  $y$  و یک شرط بر روی  $x$  نیاز دارد. شرایط مرزی و اولیه بر روی  $y$  و  $t$  معلوم است و به یک شرط بر روی  $x$  نیاز است. برای پیدا کردن شرایط اولیه بر روی  $x$  بدین‌گونه عمل می‌شود. اگر در معادلات ۱۲ و ۱۳، مقدار  $x$  برابر با صفر قرار داده شود، معادلات ۱۵ و ۱۶ به دست می‌آید. درحقیقت معادلات ۱۵ و ۱۶ مجموعه معادلات حاکم بر مرز  $x=0$  است که با حل آنها شرایط مرزی در  $x=0$  به دست می‌آید.

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - 2\tau \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau} + 2\tau^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \tau^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \tau^2 \theta = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) + 2y \frac{\partial \theta}{\partial y} - 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + 2\tau^2 f \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

جابه‌جایی آزاد دایم اطراف کره حالت حدی مسئله جریان جابه‌جایی آزاد گذرا است ( $t \rightarrow \infty$ )، که در این حالت معادلات حاکم بر آن عبارت است از:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + (1+x \cot x) f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\theta}{x} \sin x = x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \quad (17)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (1+x \cot x) f \frac{\partial \theta}{\partial y} = x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \quad (18)$$

باید توجه کرد که معادلات مذکور با توجه به تعریف جدیدی که برای تابع جریان، تابع تفاضل دمایی و پارامتر بدون بعد  $y$  در حالت دایم انجام می‌شود، به دست آمده‌اند:

$$y = \frac{Y}{a} Gr^{1/4} \quad (19)$$

$$\Psi(X, Y) = \nu Gr^{1/4} x f(x, y)$$

$$T(X, Y) = (T_w - T_\infty) \theta(x, y)$$

و شرایط مرزی انتقال یافته مطابق معادله (۱۴-الف) و (۱۴-ب) است.

که  $x$  و  $y$  به ترتیب مختصات بدون بعد در جهت سطح کره و عمود بر آن و  $\tau$  زمان بی‌بعد شده است.  $Gr$  عدد گراشف و  $\nu$  لزجت سینماتیکی سیال است. تابع جریان و تابع تفاضل دمایی بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\Psi(t, X, Y) = 2\sqrt{\nu t} \frac{\nu \sqrt{Gr}}{a} x f(x, y) \quad (11)$$

$$T(t, X, Y) = (T_w - T_\infty) \theta(\tau, x, y)$$

که  $\theta$  دمای بی‌بعد شده است. با توجه به تابع جریان، مولفه‌های سرعت  $U$  و  $V$ ، به قرار زیر است:

$$U = x \frac{\nu \sqrt{Gr}}{a} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$V = -2\sqrt{\nu t} \frac{\nu \sqrt{Gr}}{a^2} \left[ (1+x \cot x) f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right]$$

با جایگذاری  $U$ ،  $V$  و  $\theta$  در معادلات ۷ تا ۹ داریم:

$$\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \frac{2}{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \tau} + (1+x \cot x) f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\theta}{x} \sin(x) \quad (12)$$

$$= x \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{1}{\tau^2} \left[ \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) + 2y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] - \frac{2}{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (13)$$

$$+ (1+x \cot x) f \frac{\partial \theta}{\partial y} = x \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]$$

$$\text{at } y=0: \quad f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \theta=1 \quad (14\text{-الف})$$

$$\text{at } y \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad (14\text{-ب})$$

$$\text{at } \tau=0: \quad f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \theta=0 \quad (14\text{-ج})$$

که  $Pr$  عدد پرانتل است. در اینجا دو نکته را باید مد نظر قرار داد:

اول اینکه برای رسیدن از معادلات ۹ به ۱۴ چه فرایندی طی شده است؟ در نگاه اول برای ارضای شرط  $V=0$ ، می‌بایست هم  $f$  و هم  $\frac{\partial f}{\partial x}$  برابر صفر قرار داد اما اگر خوب دقت شود قرار دادن  $f=0$  تنها برای این مسئله کفایت می‌کند و این

به دست می آید. اگر در معادلات از این ماتریس در گسسته سازی مشتقات  $f$  استفاده شود در حقیقت شرط  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  در  $y=0$  بطور خودکار بر مسئله اعمال شده و در نتیجه هر دو شرط مرزی دقیقاً در سر جای خود در مسئله به کار گرفته می شود. بنابراین، ماتریس ضرایب وزنی  $f$  با ماتریس ضرایب وزنی  $\theta$  تفاوت دارد. برای ساختن ماتریس ضرایب وزنی مشتقات مرتبه دوم  $f$  از رابطه زیر استفاده می شود:

$$\left[ \bar{B}_{ij}^y \right] = \left[ A_{ij}^y \right] \left[ \bar{A}_{ij}^y \right] \quad (21)$$

در حالی که در ساخت ماتریس ضرایب وزنی مشتقات مرتبه دوم  $\theta$  از رابطه زیر استفاده می شود:

$$\left[ B_{ij}^y \right] = \left[ A_{ij}^y \right] \left[ A_{ij}^y \right] \quad (22)$$

که در آن  $\left[ A_{ij} \right]$  و  $\left[ B_{ij} \right]$  به ترتیب ماتریس ضرایب وزنی مرتبه اول و دوم،  $\left[ \bar{A}_{ij} \right]$  و  $\left[ \bar{B}_{ij} \right]$  ماتریس ضرایب اصلاح شده مرتبه اول و دوم هستند و بالانویس آورده شده در ماتریس ضرایب وزنی نشان دهنده جهتی است که مشتق در آن سمت محاسبه می شود. به همین ترتیب ضرایب وزنی مرتبه بالاتر از ضرب ماتریسی به دست آورده می شود. حال با توجه به مسایل مذکور، گسسته سازی معادلات و شرایط مرزی، معادلات (۱۲) تا (۱۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_q} \left[ \sum_{k=1}^{N_y} \bar{C}_{ik}^y f_{kjq} + 2y_i \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{B}_{ik}^y f_{kjq} \right) \right] \\ & + (1 + x_j \cot x_j) f_{ijq} \left[ \sum_{k=1}^{N_y} \bar{B}_{ik}^y f_{kjq} \right] \\ & - \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y f_{kjq} \right)^2 + \theta_{ijq} \frac{\sin x_j}{x_j} - \frac{2}{\tau_q} \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y \sum_{l=1}^{N_x} A_{qp}^x f_{klq} \right) \\ & = x_j \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y f_{kjq} \right) \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^x f_{klq} \right) \right] \\ & - \left( \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^x f_{ilq} \right) \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y f_{kjq} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

برای به دست آوردن نرخ گرمای انتقال و میزان نیروی اصطکاک بر واحد سطح از دو عدد ناسلت محلی و تنش برشی بی بعد شده دیواره استفاده می کنند که برای جریان جابه جایی آزاد گذرا اطراف کره عبارت اند از:

$$Nu_x Gr^{-0.25} = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y=0}$$

## ۵- گسسته سازی معادلات

حال با استفاده از قوانین روش مربعات دیفرانسیل معادلات حاکم و شرایط مرزی و اولیه گسسته سازی می شود. در ابتدا شرایط اولیه و مرزی گسسته می شوند. اگر تعداد تقسیمات در جهت  $x, y$  و  $\tau$  به ترتیب برابر با  $N_x, N_y$  و  $N_\tau$  قسمت باشد، پس برای اعمال شرط مرزی (۱۴-ج) خواهیم داشت:

$$at \tau = 0: \quad f_{ijl} = 0, \quad \theta_{ijl} = 0 \quad (20)$$

در شرط اولیه  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  در  $\tau = 0$  وارد نمی شود چون این شرط به صورت خودکار با در نظر گرفتن  $f=0$  ارضا می شود. از طرف دیگر اکثر قریب به اتفاق محققان برای اعمال شرایط مرزی بر مسایلی که بیش از یک شرط مرزی در یک سمت دارند، از روش دلتا<sup>۶</sup> (یعنی اعمال تنها یک شرط مرزی در هر مرز و انتقال سایر شرایط مرزی به نقاط مجاور) استفاده می کنند اما به خطایی که با این کار بر نتایج خود وارد می کنند دقت نمی کنند. با اعمال شرط مرزی در نقطه به جز مرز، دقت جوابهای عددی کاهش می یابد برای غلبه بر این عیب باید ماکزیمم فاصله نقطه مجاور تا مرز از مرتبه  $0.0001$  واحد باشد که این امر (کوچک بودن بیش از حد مرتبه نقطه مجاور تا مرز نسبت به فواصل دیگر نقاط با یکدیگر) منجر به ناپایداری جوابها می شود [۶]. برای غلبه بر این کاستیها از روش زیر استفاده می شود:

اگر سطر اول ماتریس ضرایب وزنی مرتبه اول صفر گذاشته شود، ماتریس ضرایب وزنی مرتبه اول اصلاح شده،

جدول ۱ - بررسی استقلال روش از تعداد گره‌ها در راستای  $y$  در بخش دایم مسئله گذرا در  $x = 0^\circ$

	تعداد گره‌های محاسباتی انتخاب شده						[۲۷]	[۲۸]	[۲۹]	[۳۰]
	۲۰	۲۲	۲۴	۲۶	۲۸	۳۰				
$Nu_x Gr^{-0.25}$	۰٫۴۵۷۵	۰٫۴۵۷۵	۰٫۴۵۷۶	۰٫۴۵۷۶	۰٫۴۵۷۶	۰٫۴۵۷۶	۰٫۴۵۷۴	۰٫۴۵۷۶	۰٫۴۶۷۶	۰٫۴۵۷۷
$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$	۰٫۷۶۸۲	۰٫۷۶۸۱	۰٫۷۶۸۱	۰٫۷۶۸۱	۰٫۷۶۸۱	۰٫۷۶۸۱	۰٫۷۶۷۸	---	---	۰٫۷۶۸

## ۶- نتایج

ابتدا برای الگوریتم ترکیبی DQ-IDQ، استقلال شبکه در راستاهای  $x, y$  و  $\tau$  بررسی می‌شود. استقلال از شبکه در این راستاها به ترتیب در جداول (۱) تا (۳) آورده شده است. شایان ذکر است که در اعمال روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای طول تمامی زیر بازه‌ها بر روی  $\tau$  یکسان و برابر  $0.5$  واحد در نظر گرفته شده است. نتایج بررسی شده در جداول (۱) تا (۳)، مربوط به آخرین گام زمانی یا به تعبیر دیگر بخش دایم جریان جابه‌جایی آزاد گذرا است که نحوه مشخص شدن این گام و علت انتخاب آن بدین قرار است:

نحوه مشخص کردن آخرین گام زمانی مسئله بدین صورت است که اگر اختلاف بین نتایج تمامی متغیرها در دو گام زمانی متوالی کمتر از  $1e-6$  باشد، آنگاه آخرین گام زمانی مسئله مشخص می‌شود. علت انتخاب بخش دایم جریان جابه‌جایی آزاد گذرا این است که این بخش در حقیقت آخرین پله زمانی مسئله گذرا می‌باشد و چون مسئله مذکور در حقیقت مسئله مقدار اولیه بر روی زمان است پس حداکثر انباشتگی خطای برشی در آخرین پله زمانی (بخش دایم) رخ می‌دهد.

در جدول (۱) استقلال روش در راستای  $y$  و در  $x = 0^\circ$  بررسی شده است. چراکه در حقیقت با صفر قرار دادن  $x$  معادلات حاکم بر جریان از  $x$  مستقل و موجب می‌شود تا اثرات نامطلوبی که ممکن است انتخاب ناآگاهانه فاصله گره‌ها در راستای  $x$  بر نتایج استقلال شبکه مسئله در راستای  $y$  بگذارد، حذف شود. همچنین تعداد گره‌های محاسباتی در هر زیر بازه زمانی ۵ انتخاب شده است. همان‌طور که از جدول (۱) واضح است با انتخاب ۲۴ گره در راستای مذکور، مسئله تا ۴ رقم بعد

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_q} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_y} B_{ik}^y \theta_{kjq} + 2y_i \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik}^y \theta_{kjq} \right) \\ & - \frac{2}{\tau_q} \left( \sum_{p=1}^{N_\tau} A_{qp}^\tau f_{ijp} \right) + (1 + x_j \cot x_j) f_{ijq} \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik}^y \theta_{kjq} \right) \\ & = x_j \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y f_{kjq} \right) \left( \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^x \theta_{ilq} \right) \right. \\ & \left. - \left( \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^x f_{ilq} \right) \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik}^y \theta_{kjq} \right) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{at } y = 0: \quad f_{1jq} = 0, \quad \theta_{1jq} = 1 \quad (25)$$

$$\text{at } y \rightarrow \infty: \quad \sum_{k=1}^{N_y} (\bar{A}_{Mk}^y f_{kjq}) = 0, \quad \theta_{Mjq} = 1 \quad (26)$$

گسسته سازی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرزی ۱۵ و ۱۶ (مجموعه معادلات حاکم بر مرز  $x=0$ ) برای حل معادلات پاره‌ای اصلی بدین شرح است:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_q} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_y} \bar{C}_{ik}^y f_{kq} + 2y_i \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{B}_{ik}^y f_{kq} \right) \right] + 2f_{ijq} \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{B}_{ik}^y f_{kq} \right) \\ & - \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y f_{kq} \right)^2 + \theta_{iq} - \frac{2}{\tau_q} \left( \sum_{k=1}^{N_y} \bar{A}_{ik}^y \sum_{l=1}^{N_\tau} A_{qp}^\tau f_{kpl} \right) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_q} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_y} B_{ik}^y \theta_{kq} + 2y_i \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik}^y \theta_{kq} \right) \\ & - \frac{2}{\tau_q} \sum_{p=1}^{N_\tau} A_{qp}^\tau f_{ip} + 2f_{iq} \left( \sum_{k=1}^{N_y} A_{ik}^y \theta_{kq} \right) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$



جدول ۲ - بررسی استقلال روش از تعداد گره‌ها در راستای  $x$  در بخش دایم مسئله گذرا در  $x = 90^\circ$

	تعداد گره‌های محاسباتی انتخاب شده					[۲۷]	[۲۸]	[۲۹]	[۳۰]
	۴	۵	۶	۷	۸				
$Nu_x Gr^{-0.25}$	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۸۴	۰٫۳۸۶۳	۰٫۳۶۹۲
$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$	۰٫۵۱۹	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	---	---	۰٫۵۱۹۸

جدول ۳ - بررسی استقلال روش از تعداد گره‌ها در راستای  $\tau$  در بخش دایم مسئله گذرا برای روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای در  $x = 90^\circ$

	تعداد گره‌های محاسباتی انتخاب شده در هر زیر بازه					[۲۷]	[۲۸]	[۲۹]	[۳۰]
	۳	۴	۵	۶	۷				
$Nu_x Gr^{-0.25}$	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۶۸۴	۰٫۳۸۶۳	۰٫۳۶۹۲
$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$	۰٫۵۱۹۳	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	۰٫۵۱۹۲	---	---	۰٫۵۱۹۸

جدول ۴ - مقایسه استفاده از روش تفاضل محدود با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل در جهت  $x$

	$Nu_x Gr^{-0.25}$	$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$	مدت زمان اجرای برنامه برحسب ثانیه	تعداد گره در راستای $x$
DQ	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۷۴۰	۱۲۴٫۳۷	۶
FD	۰٫۳۶۹۴	۰٫۳۷۴۰	۴۷۸٫۰۷	۱۳

روش تفاضل محدود مرکزی<sup>۷</sup> با دقت مرتبه دو، در راستای  $x$  از این دو روش عددی بهره گرفته شده است. این در حالی است که در راستای  $y$  و  $z$  روش در نظر گرفته شده برای هر دو حالت به ترتیب مربعات دیفرانسیل و مربعات دیفرانسیل تکه‌ای است. در جدول (۴) به بررسی مدت زمان اجرای این مسئله و همچنین تعداد گره لازم برای استقلال مسئله در جهت  $x$  پرداخته شده است. مقادیر داده شده در جدول (۴) در  $x = 90^\circ$  محاسبه شده‌اند. جدول (۴) نشان می‌دهد که استفاده از روش تفاضل محدود در جهت  $x$  زمان محاسبه را به تقریباً ۴ برابر حالتی که از روش مربعات دیفرانسیل در آن جهت استفاده می‌شود افزایش می‌دهد و در ضمن تعداد گره‌هایی که نیاز است تا مسئله در راستای  $x$  به استقلال برسد نیز بیش از ۲ برابر افزایش می‌یابد. همان‌گونه که از جدول (۴) برمی‌آید روشهای

از اعشار به جوابهای مطلوبی همگرا می‌شود. همان‌گونه که در جدول (۲) نشان داده شده است با انتخاب ۵ گره محاسباتی در طول بازه  $0$  تا  $\pi/2$  شبکه در راستای  $x$  به استقلال می‌رسد. برای به دست آوردن نتایج این جدول تعداد گره‌های محاسباتی در هر زیر بازه زمانی ۵ و تعداد گره‌های محاسباتی در راستای  $y$ ، ۲۴ انتخاب شده است. جدول (۳) نشان می‌دهد که اگر تعداد ۴ گره محاسباتی را در هر زیر بازه زمانی ۵/۵ واحدی انتخاب شود شبکه مستقل از تعداد گره‌ها در این راستاست. همچنین با توجه به نتایج جداول (۱) و (۲)، تعداد گره‌ها در دو راستای  $y$  و  $x$  به ترتیب ۲۴ و ۵ انتخاب شده است. بنابراین با توجه به نتایج گرفته شده از جداول (۱) - (۳)، شبکه محاسباتی  $4 \times 5 \times 24$  در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی مزایای روش مربعات دیفرانسیل نسبت به

جدول ۵ - مقایسه استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل در جهت  $\tau$

	مدت زمان اجرای برنامه برحسب ثانیه	تعداد زیربازه‌ها در جهت $\tau$	طول هر زیر بازه در جهت $\tau$	کل بازه مورد بررسی در جهت $\tau$	تعداد گره در هر زیر بازه	$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$	$Nu_x Gr^{-0.25}$
DQ	۱۲۴۸۲	۱	۶	۶	۲۰	۰/۵۸۹۲	۰/۳۷۴۰
IDQ	۱۲۴۳۷	۱۲	۰/۵	۶	۵	۰/۵۸۹۲	۰/۳۶۹۴

جدول ۶ - مقایسه نتایج در طول زمان بی بعد شده در پرانتل ۰/۷ در  $x=0$

$\tau$	$\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$		$Nu_x Gr^{-0.25}$	
	[۳۴]	present	[۳۴]	present
۰/۴	۰/۱۲۲۹	۰/۱۲۲۶	۲/۳۶۰۵	۲/۳۶۸۷
۰/۸	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۴۸	۱/۱۸۳۱	۱/۱۸۶۸
۱/۲	۰/۳۶۶۱	۰/۳۶۵۳	۰/۷۹۷۱	۰/۷۹۹۵
۱/۶	۰/۴۸۱۳	۰/۴۸۰۳	۰/۶۱۴۴	۰/۶۱۶۲
۲	۰/۵۸۴۵	۰/۵۸۳۲	۰/۵۱۸۶	۰/۵۲۰۰
۲/۴	۰/۶۶۷۶	۰/۶۶۶۳	۰/۴۷۰۸	۰/۴۷۱۸
۲/۸	۰/۷۲۴۵	۰/۷۲۳۳	۰/۴۵۲	۰/۴۵۲۶
۳/۲	۰/۷۵۵۲	۰/۷۵۴۳	۰/۴۴۹	۰/۴۴۹۳
۳/۶	۰/۷۶۶۹	۰/۷۶۶۴	۰/۴۵۱۹	۰/۴۵۱۹
۴	۰/۷۶۹۴	۰/۷۶۹۱	۰/۴۵۴۴	۰/۴۵۴۹
$\infty$	۰/۷۶۸	۰/۷۶۸۱	۰/۴۵۷۵	۰/۴۵۷۴

برای حل چنین مسائلی ترجیح داده می‌شود.

پس از بررسی استقلال از شبکه و بررسی مزیت روش برای اطمینان از صحت نتایج، ناسلت محلی و تنش برشی بی‌بعد شده دیواره با نتایج حاصل از تحقیقات سایر محققان در جداول (۶) تا (۸) مقایسه شده‌اند.

شکل‌های (۳) و (۴) به ترتیب روند تغییرات پروفیل سرعت و دما را با زمان در  $x = 30^\circ$  و  $Pr=0.7$  نشان می‌دهند. اما چرا در رسم این دو شکل از همان متغیر  $y$  بی‌بعدی که در معادله (۵) تعریف شده، استفاده نشده است؟ علت آن است که  $y$  تعریف شده در معادله (۵) خود متغیری بر حسب زمان است و نمی‌توان پروفیل آنها را در زمانهای مختلف با هم مقایسه کرد. بنابراین از یک متغیر مرجع استفاده می‌کنیم که همان  $y$  تعریف شده در معادله (۱۹) (حالت دایم) است و تمام پروفیلها در

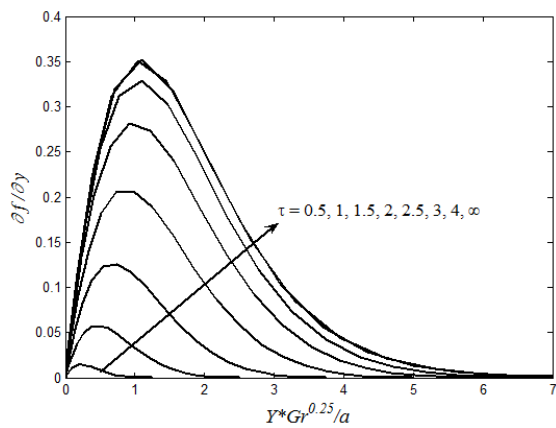
مرتبه بالا هزینه محاسباتی را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهند. پس از بررسی توانمندی روش مربعات دیفرانسیل در این‌گونه مسائل، کارایی دو روش مربعات دیفرانسیل غیرهیبریدی بررسی می‌شوند. در یکی از روشها از مربعات دیفرانسیل و در دیگری از مربعات دیفرانسیل تکه‌ای بر روی زمان استفاده شده است. به عبارت دیگر آیا لازم است که در دامنه زمانی از روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای استفاده شود؟ نتایج این بررسی در جدول (۵) آورده شده است. همان‌گونه که از جدول (۵) برمی‌آید مدت زمان اجرای برنامه با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تکه‌ای بر روی یک زمان بی‌بعد شده ( $\tau$ ) برابر، تقریباً ۰/۱ روش مربعات دیفرانسیل است و همچنین دقت آن در محاسبه جوابها به مراتب بهتر از مربعات دیفرانسیل است. بنابراین استفاده از ترکیب روش مربعات دیفرانسیل با مربعات دیفرانسیل تکه‌ای

جدول ۷- بررسی نتایج حاصل از  $Nu_x Gr^{-0.25}$  با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل

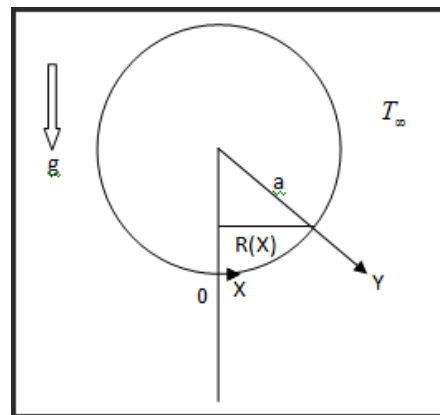
x بر حسب درجه	Pr=0.7				Pr=7			
	[27]	[28]	[29]	DQM	[27]	[28]	[29]	DQM
0	0.4574	0.4576	0.4576	0.4576	0.9512	0.9595	0.9511	0.9511
10	0.4563	0.4565	0.4564	0.4566	0.9551	0.9572	0.9559	0.9561
20	0.4532	0.4533	0.4532	0.4535	0.9492	0.9506	0.9496	0.9494
30	0.4480	0.4480	0.4479	0.4482	0.9383	0.9397	0.9389	0.9396
40	0.4407	0.4405	0.4404	0.4409	0.9231	0.9239	0.9239	0.9237
50	0.4312	0.4308	0.4307	0.4313	0.9034	0.9045	0.9045	0.9042
60	0.4194	0.4189	0.4188	0.4195	0.8791	0.8801	0.8805	0.8795
70	0.4053	0.4046	0.4045	0.4054	0.8501	0.8510	0.8518	0.8512
80	0.3886	0.3879	0.3877	0.3887	0.8161	0.8168	0.8182	0.8179
90	0.3694	0.3684	0.3683	0.3695	0.7768	0.7774	0.7792	0.7792

جدول ۸- بررسی نتایج حاصل از  $\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$  با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل

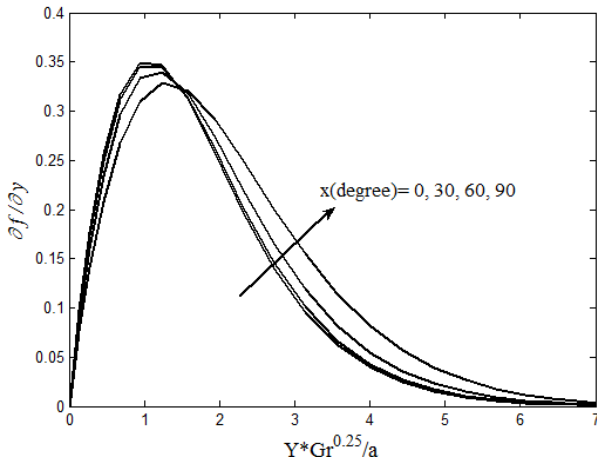
x بر حسب درجه	Pr=0.7		Pr=7	
	[27]	DQM	[27]	DQM
0	0.7678	0.7681	0.5034	0.5029
10	0.7655	0.7657	0.5019	0.5015
20	0.7586	0.7588	0.4975	0.4969
30	0.7471	0.7473	0.4901	0.4889
40	0.7311	0.7313	0.4800	0.4793
50	0.7108	0.7110	0.4670	0.4664
60	0.6863	0.6865	0.4514	0.4509
70	0.6577	0.6579	0.4332	0.4328
80	0.6253	0.6254	0.4127	0.4123
90	0.5892	0.5892	0.3898	0.3894



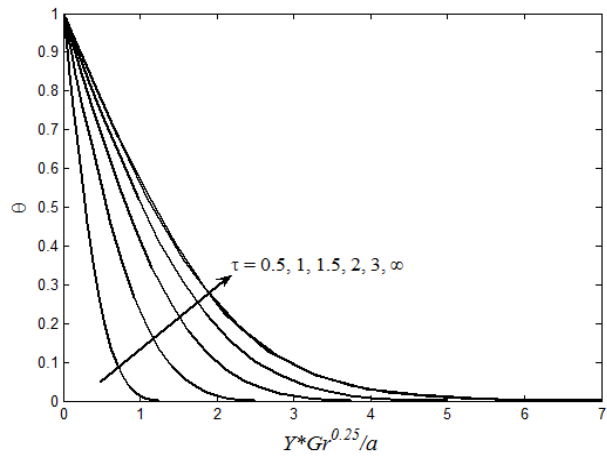
شکل ۴- روند تغییرات  $\frac{\partial f}{\partial y}$  با  $\tau$  در  $x = 30^\circ$  با Pr=0.7



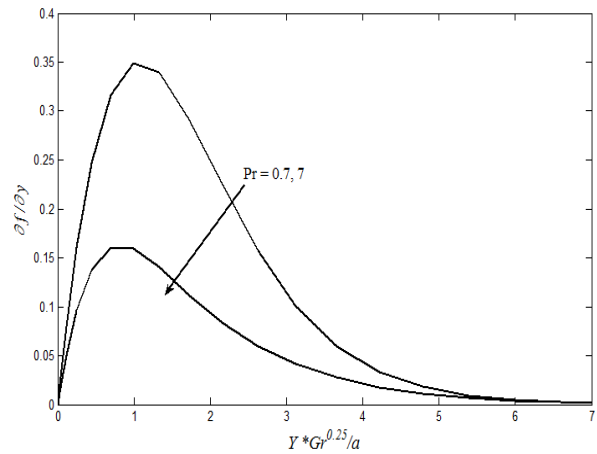
شکل ۳- نمایی از مسئله مورد مطالعه



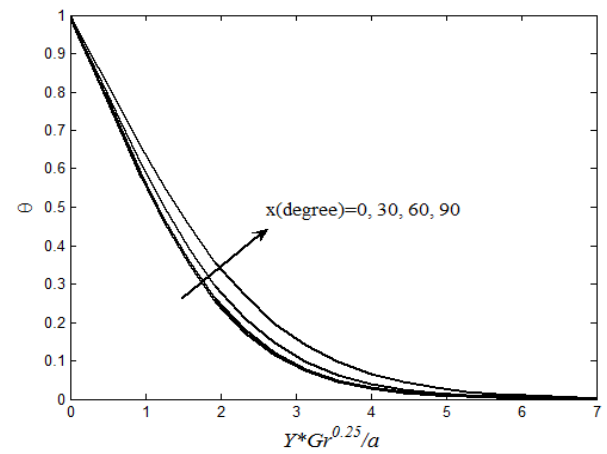
شکل ۶ - روند تغییرات  $\frac{\partial f}{\partial y}$  در لایه مرزی با  $Pr=0.7$



شکل ۵ - روند تغییرات  $\theta$  با  $\tau$  در  $x = 30^\circ$  با  $Pr=0.7$



شکل ۸ - روند تغییرات  $\frac{\partial f}{\partial y}$  با  $Pr$  در حالت دائم در  $x = 30^\circ$

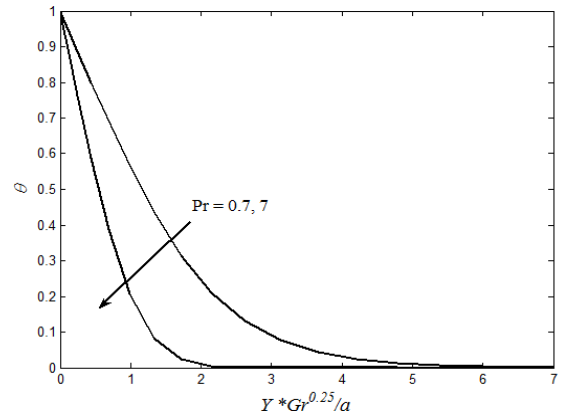


شکل ۷ - روند تغییرات  $\theta$  در لایه مرزی با  $Pr=0.7$

$$\frac{YGr^{0.25}}{a} = y\tau$$

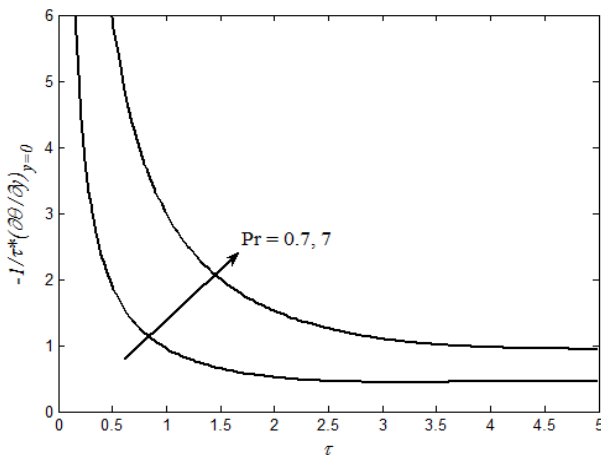
همان طور که از شکل‌های (۳) و (۴) به ترتیب بر می‌آید ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی و گرمایی با گذشت زمان افزایش می‌یابد تا اینکه در حالت دائم به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

شکل‌های (۶) و (۷) روند تغییرات پروفیل سرعت و دما را در زوایای گوناگون و شکل‌های (۸) و (۹) روند تغییرات پروفیل سرعت و دما را با عدد پرانتل در حالت دائم نشان می‌دهند. نتایج همان روند آشناست. شکل‌های (۶) و (۷) نشان‌دهنده افزایش ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی و گرمایی با افزایش زاویه از نقطه سکون بوده و شکل‌های (۸) و (۹) نشان‌دهنده کاهش سرعت و نازک شدن لایه مرزی هیدرودینامیکی و

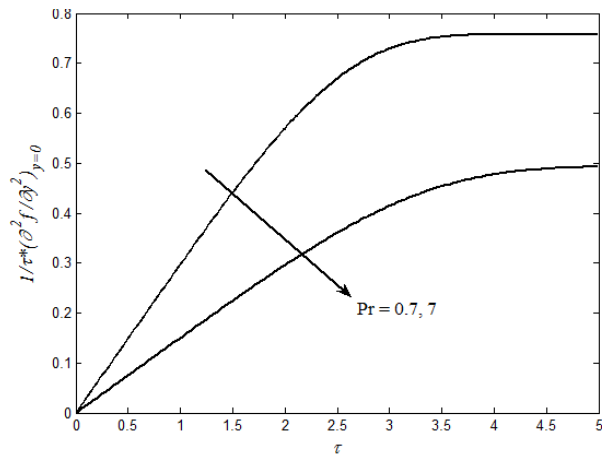


شکل ۹ - روند تغییرات  $\theta$  با  $Pr$  در حالت دائم در  $x = 30^\circ$

زمان‌های مختلف برحسب آن رسم می‌شود. بدین منظور از معادله زیر استفاده می‌شود:



شکل ۱۱ - روند تغییرات  $Nu_x Gr^{-0.25}$  با  $\tau$  در  $x = 30^\circ$



شکل ۱۰ - روند تغییرات  $\frac{C_f Gr^{0.25}}{2x}$  با  $\tau$  در  $x = 30^\circ$

صرف هزینه‌های محاسباتی (مخصوصاً در زمان محاسبه) بیشتری نسبت به روشهای مرتبه بالا می‌شود. در مسایل گذرا، با توجه به مشکلات روشهای مربعات دیفرانسیل هیبریدی استفاده از روشهای مربعات دیفرانسیل غیرهیبریدی موجب کاهش زیاد زمان محاسبه می‌شود. از این میان استفاده از مربعات دیفرانسیل تکه‌ای بر روی زمان نسبت به مربعات دیفرانسیل مدت زمان اجرای برنامه را به شدت کاهش داده و دقت نتایج را بالا می‌برد. بنابراین، این روش با صرف هزینه‌های محاسباتی کمتر و دقت بالاتر قادر به حل مسایل است. این تحقیق نشان می‌دهد که روش ترکیبی DQ-IDQ در حل معادلات جریانهای جابه‌جایی هم همانند سایر معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی گذرا که سایر محققان در سایر زمینه‌ها از آن استفاده کرده‌اند، الگوریتمی بسیار کارآمد است. این روش یک روش بسیار بهینه در حل مسایل لایه مرزی جریانهای جابه‌جایی گذرا بوده و در حل مسایل مشابه در سایر زمینه‌های علوم قابل به‌کارگیری است.

گرمایی با افزایش عدد پراتل‌اند.

شکلهای (۱۰) و (۱۱) به ترتیب روند تغییرات عدد ناسلت و تنش برشی بی‌بعدشده دیواره را با زمان در  $x = 30^\circ$  و پراتلهای  $0.7$  و  $7$  نشان می‌دهند. در شکل (۱۰) آشکار است که تنش برشی از صفر شروع شده و با گذشت زمان افزایش یافته و در نهایت بعد از زمانی به حالت دایم می‌رسد. در حالی که شکل (۱۱) نشان می‌دهد که عدد ناسلت از بی‌نهایت شروع شده و با گذشت زمان کاهش یافته تا در نهایت به حالت دایم برسد. افزایش عدد پراتل موجب کاهش تنش برشی و افزایش عدد ناسلت شده و زمان رسیدن به حالت دایم را افزایش می‌دهد.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی کارایی روش ترکیبی DQ-IDQ در حل مسایل جابه‌جایی آزاد گذرا پرداخته شد. با توجه به غیرخطی بودن معادلات حاکم بر جریان لایه مرزی، حل این معادلات با روشهای مرتبه پایین مانند تفاضل محدود منجر به

## واژه نامه

1. rung-kutta
2. upwind
3. hybrid DQ
4. HAM (Homotopy analysis method)
5. Chebyshev-Gauss-Lobatto
6.  $\delta$  technique
7. central finite difference

1. Bellman, R. E., and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration," *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
2. Bellman, R. E., Kashef, B. G., and Casti, J., "Differential Quadrature : A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, pp. 40-52, 1972.
3. Shu, C., "Generalised Differential-Integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation," Ph.D. Thesis, University of Glasgow, UK, 1991.
4. Shu, C., and Richards, B. E., "Application of Generalised Differential Quadrature to Solve Two-Dimension Incompressible Navier-Stokes Equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.15, pp. 791-798, 1992.
5. Shu, C., and Chew, Y. T., "Fourier Expansion-Based Differential Quadrature and Its Application to Helmholtz Eigenvalue Problems," *Computational Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 643-653, 1997.
6. Shu, C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Springer, Berlin, 2000.
7. Civalek, O., "Application of Differential Quadrature (DQ) and Harmonic Differential Quadrature (HDQ) for Buckling Analysis of thin Isotropic Plates and Elastic Columns," *Engineering Structures*, Vol. 26, pp.171-186, 2004.
8. Wang, X., Gan, L., and Wang, Y., "A Differential Quadrature Analysis of Vibration and Buckling of an SS-C-SS-C Rectangular Plate Loaded by Linearly Varying in-Plane Stresses," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, pp. 420-431, 2006.
9. Malekzadeh, P., Farid, and M., Zahedinejad, P., "A three - Dimensional Layerwise - Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, pp. 450- 458, 2008.
10. Ke, L. L., Xiang, Y., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Nonlinear Free Vibration of Embedded Double-Walled Carbon Nanotubes Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory," *Computational Materials Science*, In press.
11. Shu, C., Wang, L., Chew, Y. T., and Zhao, N., "Numerical Study of Eccentric Couette-Taylor Flows and Effect of Eccentricity on Flow Patterns," *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 18, pp. 43-59, 2004.
12. Al-Saif, A. S. J., and Zheng-You, Z., "Diffrential Quadrature Method for Steady Flow an Incompressible Second-Order Viscolastic Fluid and Heat Transfer Model," *Journal of Shanghai University*, Vol. 9, pp. 298-305, 2005.
13. Zhu, Y. D., Shu, C., Qiu, J., and Tani, J., "Numerical Simulation of Natural Convection Between Two Elliptical Cylinders Using DQ Method," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 797-808, 2004.
14. Lo, D. C., Young, D. L., Tsai, K. C. C., and Gou, M. H., "Velocity-Vorticity Formulation for 3D Natural Convection in an Inclined Cavity by DQ Method" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 479-49, 2007.
15. Kahveci, K., "Numerical Simulation of Natural Convection in a Partitioned Enclosure Using PDQ Method," *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 439-456, 2007.
16. Lo, D. C., Young, D. L., and Tsai, C. C., "High Resolution of 2D Natural Convection in a Cavity by the DQ Method," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 203, pp. 219 - 236, 2007.
17. Jian-An , S., and Zheng-You, Z., "Application of Differential Quadrature Method to Solve Entry Flow of Viscoelastic Second-Order Fluid," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 30, pp. 1109 - 1117, 2009.
18. Sun, J., and Zhu, ZH., "Upwind Local Differential Quadrature Method for Solving Incompressible Viscous Flow," *Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering*, Vol. 188, pp. 495-504, 2000.
19. Shu, C., and Wee, K. H. A., "Numerical Simulation of Natural Convection in a Square Cavity by SIMPLE-Generalized differential quadrature method," *Computers & Fluids*, Vol. 31, pp. 209-226, 2002.
20. Zong, Z., and Lam, Y., "A Localized Differential Quadrature (LDQ) Method and its Application to the 2-d Wave Equation," *Computational Mechanics*, Vol. 29, pp. 382-391, 2002.
21. Shu, C., Wang, L., and Chew, Y. T., "Numerical Computation of Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variable form by DQ Method," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 43, pp. 345-368, 2003.
22. Fung, T. C., "Stability and Accuracy of Differential Quadrature Method in Solving Dynamic Problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 1311-1331, 2002.
23. Hashemi, M. R., Abedini, M.J., and Malekzadeh, P. "Numerical Modeling of Long Waves in Shallow Water Using Incremental Differential Quadrature Method," *Ocean Engineering*, Vol. 33, pp. 1749-1764, 2006.
24. Malekzadeh, P., and Rahideh, H. "IDQ Two-Dimensional Nonlinear Transient Heat Transfer Analysis of Variable Section Annular Fins," *Energy*

- Conversion and Management*, Vol. 48, pp. 269–276, 2007.
25. Golbahar Haghighi, M. R., Eghtesad, M., and Malekzadeh, P., "Coupled DQ–FE Methods for Two Dimensional Transient Heat Transfer Analysis of Functionally Graded Material," *Energy Conversion and Management*, Vol. 49, pp. 995–1001, 2008.
  26. Malekzadeh, P., and Rahideh, H. "Two-Dimensional Nonlinear Transient Heat Transfer Analysis of Variable Section Pin Fins," *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, pp. 916–922, 2009.
  27. Huang, M., and Chen, C. K., "Laminar Free Convection from a Sphere with Blowing and Suction," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 529-532, 1987.
  28. Nazar, R., Amin, N., Grosan, T., and Pop, I., "Free Convection Boundary Layer on an Isothermal Sphere in a Micropolar Fluid," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 377-386, 2002.
  29. Molla, M. A., Taher, M. A., Chowdhury, M. M. K., and Hossain, M. A., "Magnetohydrodynamic Natural Convection Flow on a Sphere in presence of Heat Generation," *Nonlinear Analysis:Modelling and Control*, Vol. 10, pp. 349- 363, 2007.
  30. Moghimi, M. A., Talebizadeh, P., and Mehrabian, M. A., "Heat Generation or Absorption Effects on MHD Natural Convection Flow Over a Sphere in a Non-Darcian Porous Medium," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E, Journal of Process Mechanical Engineering*, DOI: 10.1243/09544089JPME378, In Press.
  31. Ingham, D. B., Merkin, J. H., and Pop, I., "Unsteady Free Convection of a Stagnation Point of Attachment on an Isothermal Surface," *International Journal of Mathematic and Mathematical science*, Vol. 7, pp. 599-614, 1984.
  32. Yang, S., Raghavan, V., and Gogos, G., "Numerical Study of Transient Laminar Natural Convection over an Isothermal Sphere," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 821–837, 2007.
  33. Saito, K., Raghavan, V., and Gogos, G., "Numerical Study of Transient Laminar Natural Convection Heat Transfer Over a Sphere Subjected to a Constant Heat Flux," *Heat Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 923–933, 2007.
  34. M. Katagiri and I. Pop, "Transient Free Convection on an Isothermal Sphere, Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow," *proceedings of the first intenational conference*, Swansea, Wales, 1978.