روش شتاب سهموي انتگرال‌گيری زمانی برای مسائل ديناميك سازه‌ها

مهدی قاسمیه*[1] و مهدی کریمی راد[2]

[1] دانشيار دانشكده مهندسي عمران - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[2] دانش آموخته کارشناسي ارشد دانشكده مهندسي عمران - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ٨٧/٦/٢٦، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ٨٩/٣/١٧، تاريخ تصويب ٨٩/٤/٧)

چکیده

در اين تحقيق يک روش جديد عددي انتگرال‌گيري زماني براي حل معادلة ديفرانسيل حرکت پيشنهاد مي‌شود. با افزايش مرتبه تغييرات شتاب در هر گام زمانی نسبت به روش‌های کلاسیک، یک روش جدید انتگرال‌گيري با دقت بالا و بدون شرط پايدار معرفی شده است. در سازه‌هاي چند درجه آزادي براي ميرا کردن اثر مدهاي مصنوعي از پاسخ سازه بايستي از يک الگوريتم انتگرال‌گيري با ميرايي عددي استفاده شود. در روش پيشنهادي مدهاي غير واقعي و مصنوعي از پاسخ سازه فيلتر مي‌شود. همچنين معادلة تعادل به صورت دقيق هم در ابتدا و هم در انتهاي گام زماني ارضاء مي‌شود. مرتبة همگرائي روش پيشنهادي عدد دو مي‌باشد. براي ارزيابي دقت روش پيشنهادي، اتلاف و پراکندگي عددي اندازه گيري شده و با ساير روشهاي کلاسيک مقايسه شده‌است.

واژه‌های کليدي: انتگرال‌گيري مستقيم زماني، بدون شرط پايدار، مرتبة همگرايي، پراکندگي عددي

مقدمه

يکي از روش‌هاي حل معادلة ديفرانسيل حرکت روش انتگرال‌گيري مستقيم زماني مي‌باشد. اين روش هم در تحليل خطي و هم در تحليل غير خطي سازه‌ها کاربرد دارد. با فرض اينکه هدف يافتن پاسخ سازه در لحظة t ($t>0$) باشد، ابتدا بازة زماني $[0,t]$ به n زير بازه افراز مي‌شود. هريك از اين زير بازه‌ها يك گام زماني ناميده مي‌شود. معمولاً طول اين گام‌هاي زماني مساوي و برابر Δt اختيار مي گردد که در نتيجه $\Delta t = t/n$ مي‌باشد. سپس نحوة تغييرات شتاب، سرعت و تغييرمکان سازه بر حسب زمان، در هر گام زماني فرض مي‌گردد. در نهايت تلاش مي‌شود تا معادلة ديفرانسيل حرکت در نقاط افراز شده زماني ارضاء گردد. روش‌هاي انتگرال‌گيري مستقيم زماني از يک ديدگاه به روش‌هاي صريح و روش‌هاي ضمني تقسيم بندي مي‌شوند. در روش‌هاي صريح در هر گام زماني، معادلة تعادل در ابتداي گام زماني ارضاء گرديده تا مقادير جواب در انتهاي گام زماني تعيين شوند. در روش‌هاي ضمني در هر گام زماني، معادلة تعادل در انتهاي گام زماني ارضاء گرديده تا مقادير جواب در انتهاي گام زماني تعيين شوند. در روش‌هاي صريح حافظة کمتري از کامپيوتر اشغال مي‌گردد چرا که نياز به تشکيل ماتريس سختي مؤثر در هر گام زماني نمي‌باشد. از طرفي ديگر بنابر ملاحظات پايداري تعداد مراحل تحليل در روشهاي صريح افزايش پيدا مي‌کند. در نتيجه روش‌هاي صريح عموماً در مورد مسائلي که تحت تأثير بارهاي زماني کوتاه مدت (ضربه‌اي) قرار دارند مناسب مي‌باشند. مثال‌هايي از روش‌هاي مختلف انتگرال‌گيري صريح و ضمني در [١] الی [۴] آمده است. روش‌هاي انتگرال‌گيري مستقيم زماني از ديدگاهي ديگر به روشهاي بدون شرط پايدار و روش‌هاي مشروط پايدار طبقه بندي مي‌شوند. يک روش انتگرال‌گيري مستقيم زماني بدون شرط پايدار است هرگاه براي هر انتخاب Δt، پايداري عددي روش حفظ گردد. يک روش انتگرال‌گيري مستقيم زماني مشروط پايدار است هرگاه براي پايداري لازم باشد طول گام زماني از يک مقدار مشخصي که عموماً وابسته به کوچکترين دورة تناوب سازه است کمتر اختيار گردد. بنابراين در سازه‌هاي با درجات آزادي زياد روش‌هاي انتگرال‌گيري بدون شرط پايدار از کاربرد بسيار مناسب-تري نسبت به روش‌هاي مشروط پايدار برخوردار مي‌باشند [۵]. روش‌هاي کلاسيک مانند روش نيومارک [۶] يا روش ويلسون [۷] تغييرات شتاب در هر بازة زماني را به صورت ثابت يا خطي بر حسب زمان فرض مي‌کنند [۸]. واضح است که افزايش مرتبة تغييرات شتاب در هر گام زماني منجر به افزايش دقت روش مي‌گردد زيرا تعداد جملات بيشتري از سري تيلور براي تقريب تابع شتاب در نظر گرفته مي‌شود [۹].

* نويسنده مسئول : تلفن : ٦١١١٢٨٦٩ , فاكس : ٦٦٤٠٣٨٠٨ , Email: mghassem@ut.ac.ir

در اين تحقيق با فرض تغييرات سهموي شتاب در هر گام زماني و استفاده از پارامترهاي عددي δ و α يك روش جديد ضمني انتگرال‌گيري زماني پيشنهاد مي‌شود. ابتدا معادلات حاكم بر روش پيشنهادي ارائه مي‌شود. سپس شرايط لازم براي پايداري روش تعيين و در نهايت دقت روش پيشنهادي با روش‌هاي كلاسيك مقايسه مي‌گردد.

روش پيشنهادي

معادلة ديفرانسيل حركت براي یک سازه ارتجاعي خطي به صورت ذيل مي‌باشد :

$$M\ddot{U}+C\dot{U}+KU=P \quad (1)$$

که در رابطه فوق M، C و K به ترتيب ماتريس‌هاي جرم، ميرايي و سختي سازه و P بردار نيروهاي خارجي مي‌باشند. براي بردارهاي تغييرمكان، سرعت و شتاب سازه نيز به ترتيب از نمادهاي U، $\dot{U}$ و $\ddot{U}$ استفاده مي‌کنيم. بردارهاي تغييرمكان، سرعت و شتاب سازه در لحظة t را نيز به ترتيب با ${}^{t}U$، ${}^{t}\dot{U}$ و ${}^{t}\ddot{U}$ نشان مي‌دهيم. سري تيلور توابع ${}^{t+\Delta t}U$ و ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ در لحظة t مطابق معادلات (۲) و (۳) مى‌باشد. هر الگوريتم عددي مرتبط با سري تيلور، تعداد محدودي از جملات اين سري را در نظر گرفته و از مرحله اي به بعد آن را برش مي‌زنند. در روش پيشنهادي، سري تيلور (۲) و (۳) به صورت (٤) و (٥) برش زده مي‌شوند. اگر تابع شتاب بين لحظات $t-\Delta t$ تا $t+\Delta t$ به صورت یک چند جمله‌اي درجه دو بر حسب زمان در نظر گرفته شود مي‌توان روابط (٦) و (٧) را نوشت. با جاي‌گذاري روابط (٦) و (٧) در روابط (٤) و (٥) و ساده كردن نتايج به معادلات (۸) و (۹) مي‌رسيم.

معادلات (۸) و (۹) براي تقريب تغييرمكان و سرعت سازه در لحظة $t+\Delta t$ استفاده مي‌شود. اين معادلات نشان مي دهد که روش پيشنهادي یک روش ضمني مي‌باشد زيرا در سمت راست معادلات (۸) و (۹) ترم ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ وجود دارد. به عبارت ديگر تغييرمكان و سرعت در زمان $t+\Delta t$ صريحاً بر اساس مقادير جواب تعيين شدة قبلي بدست نمي‌آيند. روش پيشنهادي یک روش دو گامي است زيرا تعيين جواب در زمان $t+\Delta t$ به مقادير جواب در دو گام قبلي يعني در زمان هاي t و $t-\Delta t$ وابسته است. تغييرمكان اوليه ${}^{0}U$ و سرعت اوليه ${}^{0}\dot{U}$ معلوم مي‌باشند، در نتيجه با بكاربردن معادلة (۱) در زمان $t=0$ شتاب اوليه ${}^{0}\ddot{U}$ تعيين مي‌شود. براي استفاده از روابط (۸) و (۹) ابتدا تغييرمكان، سرعت و شتاب در لحظة Δt با استفاده از يك روش انتگرال‌گيري تک گامي دلخواه مانند روش شتاب خطي يا شتاب متوسط تعيين مي‌شود. سپس با جای گذاری معادلات (۸) و (۹) در معادله ديفرانسيل حركت مي‌توان گام به گام مقادير جواب را در لحظات $2\Delta t$، $3\Delta t$، ..... و $n\Delta t$ تعيين نمود. ملاحظه مى‌شود که معادله ديفرانسيل حرکت گام به گام در نقاط افراز شده توسط بازه هاى زمانى ارضا مى‌شود. پارامترهاي α و δ مشخصه‌هاي پايداري و دقت روش انتگرال‌گيري مي‌باشند. علت اصلي استفاده از اين پارامترها رسيدن به خانواده‌اي از روش‌هاي بدون شرط پايدار و با دقت بالا مي‌باشد.

$${}^{t+\Delta t}U={}^{t}U+\Delta t\,{}^{t}\dot{U}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\,{}^{t}\ddot{U}+\frac{\Delta t^{3}}{6}\,{}^{t}\dddot{U}+\ldots\ldots \quad (۲)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U}={}^{t}\dot{U}+\Delta t\,{}^{t}\ddot{U}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\,{}^{t}\dddot{U}+\frac{\Delta t^{3}}{6}\,{}^{t}\ddddot{U}+\ldots\ldots \quad (۳)$$

$${}^{t+\Delta t}U={}^{t}U+\Delta t\,{}^{t}\dot{U}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\,{}^{t}\ddot{U}+\frac{\Delta t^{3}}{6}\,{}^{t}\dddot{U}+\alpha\Delta t^{4}\,{}^{t}\ddddot{U} \quad (۴)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U}={}^{t}\dot{U}+\Delta t\,{}^{t}\ddot{U}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\,{}^{t}\dddot{U}+\delta\Delta t^{3}\,{}^{t}\ddddot{U} \quad (۵)$$

$${}^{t}\dddot{U}=\frac{1}{2\Delta t}\left({}^{t+\Delta t}\ddot{U}-{}^{t-\Delta t}\ddot{U}\right) \quad (۶)$$

$${}^{t}\ddddot{U}=\frac{1}{\Delta t^{2}}\left({}^{t-\Delta t}\ddot{U}-2\,{}^{t}\ddot{U}+{}^{t+\Delta t}\ddot{U}\right) \quad (۷)$$

$$ {}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^{t}\dot{U} + [(\delta - \frac{1}{4})\, {}^{t-\Delta t}\ddot{U} + (1-2\delta)\, {}^{t}\ddot{U} + (\delta + \frac{1}{4})\, {}^{t+\Delta t}\ddot{U}]\Delta t \quad (۸) $$

$$ {}^{t+\Delta t}U = {}^{t}U + {}^{t}\dot{U}\,\Delta t + [(\alpha - \frac{1}{12})\, {}^{t-\Delta t}\ddot{U} + (\frac{1}{2} - 2\alpha)\, {}^{t}\ddot{U} + (\alpha + \frac{1}{12})\, {}^{t+\Delta t}\ddot{U}]\Delta t^2 \quad (۹) $$

پايداري عددي

براي بررسي پايداري روش پيشنهادي مي‌بايست عملگر تقريب انتگرال‌گيري روش تعيين شود [۱۰]. ابتدا معادلة ديفرانسيل حركت سازة يک درجه آزادي خطي با جرم m، ميرايي c و سختي k كه تحت اثر نيروي p قرار دارد را در لحظة $t+\Delta t$ به شرح ذيل در نظر مي‌گيريم:

$$ {}^{t+\Delta t}\ddot{x} + 2\xi\omega\, {}^{t+\Delta t}\dot{x} + \omega^2\, {}^{t+\Delta t}x = {}^{t+\Delta t}r \quad (۱۰) $$

كه در رابطه فوق $2\xi\omega = c/m$، $\omega^2 = k/m$ و ${}^{t+\Delta t}r = {}^{t+\Delta t}p/m$ مي‌باشند. ω فركانس طبيعي سازه بوده و پريود حركت نيز $T = 2\pi/\omega$ مي‌باشد. اگر معادلات (۸) و (۹) را براي سازة يک درجه آزادي با تنها مؤلفة حركتي وابسته به زمان x بازنويسي كنيم به معادلات (۱۱) و (۱۲) مي‌رسيم. با جاي‌گذاري روابط (۱۱) و (۱۲) در رابطة (۱۰) معادله‌اي با تنها مجهول ${}^{t+\Delta t}\ddot{x}$ بدست مي آيد. اگر اين معادله بر حسب ${}^{t+\Delta t}\ddot{x}$ حل گرديده و سپس مجدداً در روابط (۱۱) و (۱۲) جاي‌گذاري شود مي‌توان به فرم بازگشتي (۱۳) رسيد:

$$ {}^{t+\Delta t}\dot{x} = {}^{t}\dot{x} + [(\delta - \frac{1}{4})\, {}^{t-\Delta t}\ddot{x} + (1-2\delta)\, {}^{t}\ddot{x} + (\delta + \frac{1}{4})\, {}^{t+\Delta t}\ddot{x}]\Delta t \quad (۱۱) $$

$$ {}^{t+\Delta t}x = {}^{t}x + {}^{t}\dot{x}\,\Delta t + [(\alpha - \frac{1}{12})\, {}^{t-\Delta t}\ddot{x} + (\frac{1}{2} - 2\alpha)\, {}^{t}\ddot{x} + (\alpha + \frac{1}{12})\, {}^{t+\Delta t}\ddot{x}]\Delta t^2 \quad (۱۲) $$

$$ \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\ddot{x} \\ {}^{t}\ddot{x} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{x} \\ {}^{t+\Delta t}x \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} {}^{t}\ddot{x} \\ {}^{t-\Delta t}\ddot{x} \\ {}^{t}\dot{x} \\ {}^{t}x \end{Bmatrix} + \{L\}\, {}^{t+\Delta t}r \quad (۱۳) $$

$$ \lambda^3 + \frac{(-2 + h(\delta - 3\alpha + \frac{2}{3}))}{(1 + h(\alpha + \frac{1}{12}))}\lambda^2 + \frac{(1 + h(3\alpha - 2\delta + \frac{5}{12}))}{(1 + h(\alpha + \frac{1}{12}))}\lambda + \frac{h(\delta - \alpha - \frac{1}{6})}{(1 + h(\alpha + \frac{1}{12}))} = 0 \quad (۱۴) $$

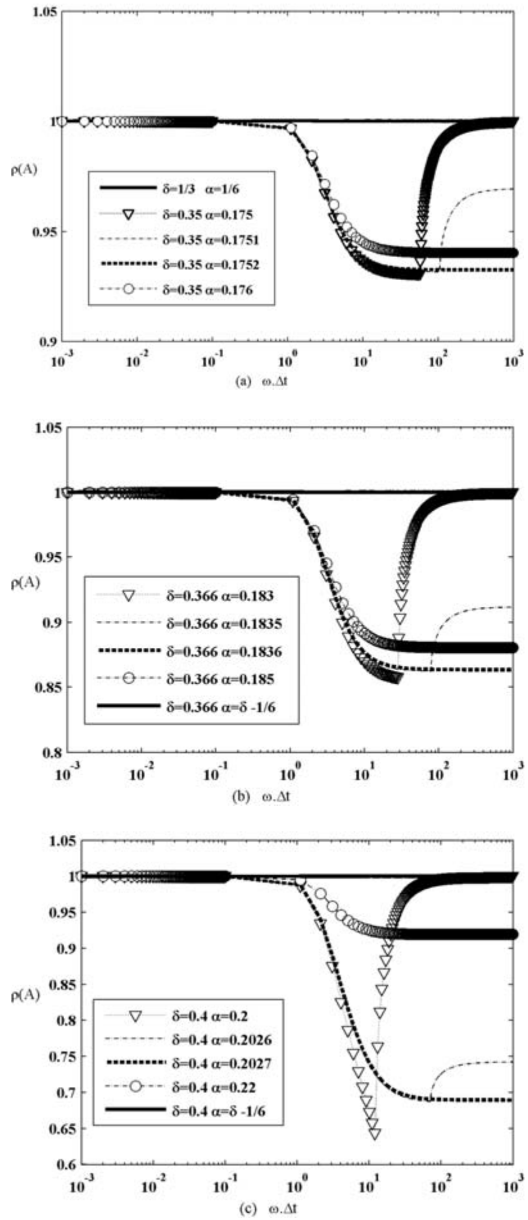
ماتريس $[A]$ و بردار $\{L\}$ به ترتيب عملگرهاي تقريب انتگرال‌گيري و بار ناميده مي‌شوند [۱۰]. ضرائب ماتريس $[A]$ و مؤلفه‌هاي بردار $\{L\}$ در پيوست ارائه گرديده‌اند. شعاع طيفي ماتريس $[A]$، $\rho(A)$، به صورت ذيل تعريف مي‌شود:

$$ \rho(A) = \max_i |\lambda_i| \quad (۱۵) $$

كه در رابطه (۱۵) λ_i مقادير ويژة ماتريس $[A]$ مي‌باشند. بعلاوه $|\lambda_i| = (\lambda_i . \overline{\lambda_i})^{1/2}$ كه $\overline{\lambda_i}$ مزدوج مختلط λ_i مي باشد. براي پايداري يک روش انتگرال گيري مستقيم زماني بايستي رابطه $\rho(A) \le 1$ برقرار باشد [۱۰]. بنابراين در بررسي پايداري يك روش بايستي به عملكرد شعاع طيفي ماتريس تقريب انتگرال‌گيري روش توجه شود. در روش پيشنهادي آن مقاديري از پارامترهاي δ و α قابل قبول مي‌باشند كه به ازاي آن مقادير اندازة شعاع طيفي ماتريس $[A]$ هيچ گاه از عدد يك بيشتر نشود يا به عبارتي ديگر روش انتگرال‌گيري بدون شرط پايدار باشد. در شكل (۱) شعاع طيفي ماتريس $[A]$ بر حسب $\omega.\Delta t$ به ازاي مقادير مختلف δ و α رسم شده است. شكل (۱) نشان مي‌دهد روش پيشنهادي شامل

خانواده‌اي از روش‌هاي بدون شرط پايدار مي‌باشد. با توجه به رابطه $\rho(A) \le 1$ و منحني تغييرات شعاع طيفي ماتريس $[A]$ نتيجه مي‌شود روش پيشنهادي بدون شرط پايدار است هرگاه پارامترهاي δ و α در محدوده ذيل انتخاب شوند:

$$\delta \ge 1/3\,;\, \delta/2 \le \alpha \le \delta - 1/6 \qquad (۱۶)$$



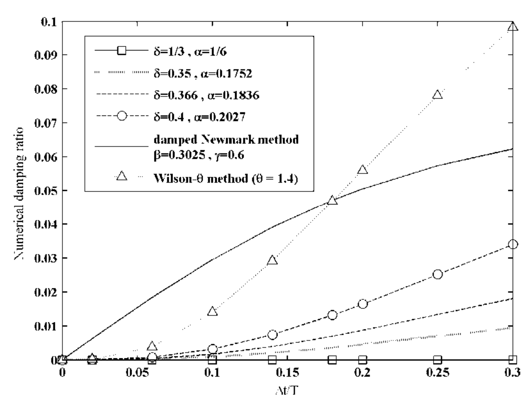
شکل ۱ : منحنی شعاع طيفی ماتريس $[A]$ بر حسب $\omega.\Delta t$.

براي رسيدن به محدوده معرفی شده در رابطه (۱٦) کافیست چند جمله ای مشخصه حاکم بر روش پیشنهادی تشکیل شود [۵] که در رابطه (۱٤) ارائه شده است. اکنون برای پایداری روش پیشنهادی کافیست شرایط Routh-Hurwitz [۵] براي اين معادله درجه سه برقرار باشد. در نتيجه پارامترها بايستی در محدوده ارائه شده در رابطه (۱۶) قرار گيرند. واضح است كه براي $\delta = 1/3$ پايداري بدون شرط تنها زماني به دست مي‌آيد كه $\alpha = 1/6$ باشد. در اين حالت شعاع طيفي همواره برابر با عدد يك مي‌باشد. چنين وضعيتي در مورد روش شتاب متوسط نيز برقرار است.

دقت عددي

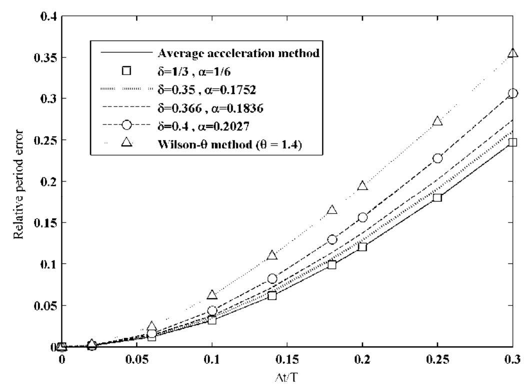
دقت هر روش انتگرال‌گيري مستقيم زماني با بررسي سه عامل مرتبة همگرايي، افت عددي و خطاي پراكندگي ارزيابي مي‌شود [۵]. افت عددي ميزان افت مصنوعي را كه به علت استفاده از یک روش عددي بر پاسخ واقعي سازه تحميل مي‌شود، نشان مي‌دهد. خطاي پراكندگي ميزان افزايش يا كاهش پريودي را كه از روش عددي به دست مي‌آيد، نسبت به پريود واقعي سازه نشان مي‌دهد. براي روش پيشنهادي به ازاي $\delta = 1/3$ و $\alpha = 1/6$ هيچ گونه افت عددي نداريم (شكل (a)۱). همچنين با انتخاب $\alpha = \delta - 1/6$ برای $\delta = 0.366$ و $\delta = 0.4$ شعاع طيفي ماتريس $[A]$ همواره برابر با واحد بوده و هيچگونه افت عددي نداريم. اين مطلب به ترتيب در شكل‌هاي (b)۱ و (c)۱ نشان داده شده است. در سازه‌هاي چند درجه آزادي براي استهلاک مدهاي بالا كه تأثير چنداني در پاسخ كلي سازه ندارند بايستي از روشي استفاده شود كه داراي افت عددي در مدهاي بالا باشد. بيشترين افت عددي در مدهاي بالا هنگامي به دست مي‌آيد كه مقدار ρ_∞ ($\rho_\infty = \lim_{\omega.\Delta t \to \infty} \rho(A)$) كمترين باشد [۵]. روش شتاب متوسط و يا روش پيشنهادي به ازاي $\delta = 1/3$ و $\alpha = 1/6$ نمي‌توانند مدهاي غير مؤثر را از پاسخ سازه خارج كنند زيرا در هر دو روش هيچ گونه افت عددي در مدهاي بالا نداريم. در روش پيشنهادي وقتي $\delta > 1/3$ باشد مي توان پارامتر α مناسبي انتخاب كرد كه ρ_∞ را حداقل كرده و اين حداقل كمتر از واحد باشد. به عنوان نمونه در شكل (a)۱ براي $\delta = 0.35$ بيشترين افت عددي در مدهاي بالا به ازاي $\alpha = 0.1752$ بدست مي‌آيد. به طور مشابه با توجه به شكل‌هاي (b)۱ و (c)۱ براي $\delta = 0.366$ و $\delta = 0.4$ كمترين مقدار ρ_∞ به ترتيب به ازاي $\alpha = 0.1836$ و $\alpha = 0.2027$ به دست مي‌آيد. نكتة مهم اين است كه

در روش ارائه شده براي هر مقدار δ و α مرتبه همگرائي عدد دو مي‌باشد که اين مسأله با استفاده از ضرائب ماتريس $[A]$ که در پيوست ارائه گرديده است مي‌تواند کنترل شود. اين در حالي است که خانوادة روش‌هاي نيومارک مي‌تواند مدهاي مصنوعي و غير مؤثر را از پاسخ سازه فيلتر نمايد اما مرتبة همگرايي روش نيومارك در اين حالت ازعدد دو به عدد يک تنزل مي‌کند و به عبارت ديگر دقت خود را از دست مي‌دهد [۵]. در اين تحقيق روشي پيشنهاد شده است که به ازاي $\delta > 1/3$ و با انتخاب يک پارامتر α مناسب افت عددي در مدهاي بالا وجود داشته ودر عين حال مرتبة همگرائي روش عدد دو باقي مي‌ماند. همچنين روش‌هاي ديگري که براي اصلاح روش نيومارک جهت ارائة افت عددي پيشنهاد شده اند نظير روش آلفا [۱۱] قادر به ارضاء معادلة تعادل در انتهاي گام‌هاي زماني نمي‌باشند در حالي که روش پيشنهادي معادلة اساسي تعادل را هم در ابتدا و هم در انتهاي گام زماني به صورت دقيق ارضاء مي‌کند (زيرا هيچ گونه تصحيح و يا تغييری در معادله ديفرانسيل حرکت ايجاد نمی کند) و به علاوه افت عددي لازم را براي ميرا کردن مدهاي مصنوعي ارائه مي‌کند. همچنين دقت روش پيشنهادي در مدهاي پايين که قسمت اصلي جواب سازه مي‌باشد از روش‌هاي کلاسيک بالاتر است. در شکل (۲) افت عددي روش پيشنهادي با روش‌هاي کلاسيک مقايسه گرديده است.



شکل ۲ : مقايسهٔ نسبت ميرايی عددی روش پيشنهادی، روش ويلسون و روش نيومارک.

شکل (۲) دقت بسيار مناسب روش پيشنهادي در مدهاي پايين را نسبت به روش‌هاي نيومارک و ويلسون نشان مي‌دهد. به عبارت ديگر افت عددي روش پيشنهادي در مدهاي پايين کمتر از اين دو روش مي‌باشد. در شکل (۳) خطاي پراکندگي روش پيشنهادي با روش‌هاي کلاسيک مقايسه گرديده است. خطاي پراکندگي روش ارائه شده به ازاي $\delta = 1/3$ و $\alpha = 1/6$ مساوي با خطاي پراکندگي روش شتاب متوسط مي باشد (شکل ۳). واضح است بهترين انتخاب مي تواند آن زوج پارامتر δ و α باشد که کمترين خطاي پراکندگي را داشته و همچنين افت عددي آن در مدهاي پايين بسيار کم و در مدهاي بالا زياد باشد. در نتيجه زوجهاي ($\delta = 0.366$ و $\alpha = 0.1836$) و ($\delta = 0.4$ و $\alpha = 0.2027$) انتخاب بسيار مناسبي خواهد بود.



شکل ۳ : مقايسة نسبت خطاي پريود روش پيشنهادي،روش ويلسون و روش شتاب متوسط.

شکل (۳) نشان مي‌دهد خطاي پراکندگي روش پيشنهادي از روش ويلسون کمتر مي‌باشد. براي قضاوت بهتر دربارة دقت روش پيشنهادي دو مثال ذيل را در نظر مي‌گيريم.

مثال ۱

فرض کنيد که هدف استفاده از يك روش انتگرال‌گيري مستقيم زماني مي‌باشد که ميزان افت عددي[۱] و خطاي پراکندگي آن در هر دورة تناوب از پنج درصد تجاوز نمي‌کند. در نتيجه براي روش پيشنهادي به ازاي $\delta = 0.366$ و $\alpha = 0.1836$ بايستي $\Delta t/T$ کوچکتر از 0.115 و براي $\delta = 0.4$ و $\alpha = 0.2027$

[۱] براي وقتي که نسبت ميرايي، $\bar{\xi}$، کوچک باشد ميزان افت عددي به شرح ذيل بدست مي‌آيد [۵]:

$AD = 2\pi\bar{\xi}$

بايستي $\Delta t/T$ كوچكتر از 0.107 باشد. اين مقادير به صورت كيفي از شكلهاي (۲) و (۳) ويا به صورت دقيق با توجه به ضرائب ماتريس $[A]$ كه در پيوست ارائه مي‌گردد قابل تعيين مي‌باشد. براي ساير روش‌هاي كلاسيک و داراي افت عددي از جمله روش آلفا با $\alpha = -0.3$، روش ويلسون با $\theta = 1.4$ و روش هوبالت [۱۲] بايستي $\Delta t/T$ به ترتيب كوچكتر از 0.1، 0.08 و 0.04 باشد [۵]. در نتيجه بزرگترين مقدار گام زماني براي يک دورة تناوب معين توسط روش پيشنهادي به ازاي $\delta = 0.366$ و $\alpha = 0.1836$ فراهم مي‌گردد. به عبارت ديگر با انتخاب گام زماني بزرگتر براي روش پيشنهادي نسبت به روش‌هاي كلاسيك مي‌توان به دقت اين روش‌ها رسيد. اين بدان معني است كه با تعداد مراحل تحليل كمتر در روش پيشنهادي نسبت به روش‌هاي كلاسيك مي‌توان به دقت اين روش‌ها رسيد.

مثال ۲

معادلة ديفرانسيل كلاسيک مرتبة دوم به شرح ذيل را در نظر مي‌گيريم:

$$\ddot{x} + x = 0 \qquad (۱۷)$$

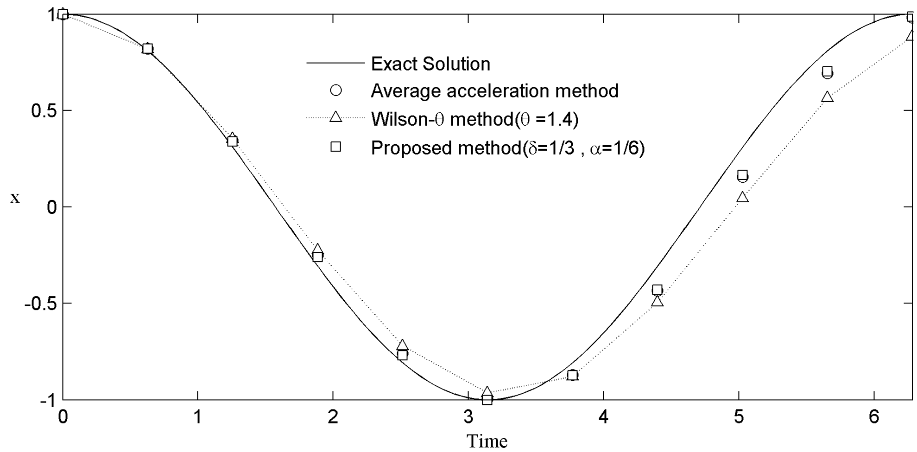
شرايط اوليه به صورت $^{0}x = 1$ و $^{0}\dot{x} = 0$ فرض مي‌شوند. اين مثال به اين علت انتخاب شده است كه مشخصه‌هاي دقت يک روش انتگرال‌گيري را نشان مي‌دهد [۱۰]. جواب دقيق معادلة (۱۷) با شرايط اوليه داده شده به صورت $x_{exact} = \cos(t)$ خواهد بود. در نتيجه پريود ارتعاشي كه معادلة (۱۷) بيانگر آن است برابر با $T = 2\pi$ مي‌باشد. با انتخاب $\Delta t = T/10$ معادلة (۱۷) با استفاده از روشهاي شتاب متوسط، ويلسون و پيشنهادي حل شده است. براي قضاوت در مورد دقت هر يك از اين روش‌ها ميزان خطا در نقاط افراز شدة زماني نيز مقايسه شده است. خطای نسبی در لحظة t به صورت ذيل تعريف مي‌گردد:

$$^{t}e = \frac{\left| ^{t}x - {^{t}x_{exact}} \right|}{^{t}x_{exact}} \qquad (۱۸)$$

كه در رابطة فوق $^{t}x_{exact}$ و ^{t}x به ترتيب مقادير دقيق و تقريبي حل در لحظة t مي‌باشند. نتايج حل و ميزان خطا در جدول (۱) نشان داده شده است. براي روش پيشنهادي در گام اول زماني از روش شتاب متوسط استفاده شده است. با توجه به نتايج اين جدول ملاحظه مي‌شود كه روش پيشنهادي نتايج مناسب‌تري نسبت به روش‌هاي شتاب متوسط و ويلسون نشان مي‌دهد. در بين روش‌هاي بدون شرط پايدار، روش‌هاي شتاب متوسط و ويلسون دقت بسيار مناسبي دارند ولي در اين مثال خطاي روش پيشنهادي به ميزان محسوسي كمتر از روش‌هاي فوق مي‌باشد. منحني پاسخ معادلة ديفرانسيل (۱۷) با استفاده از هريك از روش‌هاي پيشنهادي، شتاب متوسط، ويلسون و دقيق در شكل (۴) ترسيم شده است.

جدول ۱ : حل عددی معادلۀ ديفرانسيل (۱۷) با استفاده از روش‌های شتاب متوسط، ويلسون و پيشنهادی.

Time	روش شتاب متوسط		روش ويلسون ($\theta = 1.4$)		روش پيشنهادي ($\delta = 1/3, \alpha = 1/6$)	
	^{t}x	^{t}e	^{t}x	^{t}e	^{t}x	^{t}e
Δt	0.8203	0.013968	0.8187	0.01199	0.8203	0.013968
$2\Delta t$	0.3459	0.119411	0.3529	0.142063	0.3405	0.101936
$3\Delta t$	-0.2528	-0.18187	-0.2273	-0.26439	-0.2616	-0.15339
$4\Delta t$	-0.7607	-0.0597	-0.7220	-0.10754	-0.7698	-0.04845
$5\Delta t$	-0.9952	-0.0048	-0.9651	-0.0349	-1.0013	-0.0013
$6\Delta t$	-0.8722	-0.07812	-0.8785	-0.08578	-0.8731	-0.07923
$7\Delta t$	-0.4357	-0.41001	-0.4968	-0.60741	-0.4311	-0.39512
$8\Delta t$	0.1573	0.490912	0.0464	0.850115	0.1658	0.463729
$9\Delta t$	0.6938	0.142395	0.5649	0.301724	0.7031	0.1309
$10\Delta t$	0.9810	0.019	0.8843	0.1157	0.9878	0.0122



شکل ۴ : منحنی پاسخ معادلۀ دیفرانسیل (۱۷) با استفاده از حل دقیق و روش‌های شتاب متوسط، ویلسون و پیشنهادی.

نتيجه گيري

در اين تحقيق يك روش جديد انتگرال‌گيري مستقيم زماني براي تحليل ديناميكي سازه‌ها پيشنهاد شد. براي رسيدن به دقت بالاتر مرتبة تغييرات شتاب در هر گام زماني افزايش داده شده است. برخلاف روش‌هاي انتگرال‌گيري كلاسيک كه مرتبة تغييرات شتاب را به صورت خطي فرض مي‌كنند در روش پيشنهادي مرتبة تغييرات شتاب به صورت يك تابع درجة دو بر حسب زمان در نظر گرفته شده است. در كنار اين فرض، همانند روش نيومارک از دو پارامتر عددي براي رسيدن به بهترين دقت و بالاترين محدودة پايداري استفاده شده است. نتيجه اين دو فرض معرفي خانواده اي از روش‌هاي مرتبة بالاست كه هم دقت مناسبي داشته و هم بدون شرط پايدار مي‌باشند. اين خانواده شامل روش‌هايي با خطاي پراكندگي كم و بدون افت عددي مي‌باشد. همچنين شامل روش‌هايي با خطاي پراكندگي كمتر نسبت به روش‌هاي كلاسيك، افت عددي بسيار كم در مدهاي پايين و افت عددي مؤثر در مدهاي بالا مي‌باشد. در نتيجه روش پيشنهادي براي فيلتر كردن مدهاي مصنوعي كه در پاسخ كلي سازه‌هاي چند درجه آزادي مؤثر نيستند، مي‌تواند استفاده شود. مزيت اصلي در اين است كه مرتبة همگرائي روش ارائه شده همواره عدد دو مي‌باشد در حالي كه الگوريتم هاي با افت عددي در خانوادة روش‌هاي نيومارک داراي مرتبة همگرائي يک مي‌باشند. همچنين روش پيشنهادي افت عددي در مدهاي بالا را معرفي مي‌كند بدون آنكه معادلة ديفرانسيل تعادل را تغيير دهد به عبارتي ديگر معادلة اساسي تعادل به صورت دقيق هم در ابتدا و هم در انتهاي گام زماني ارضاء مي‌گردد در حالي كه روش‌هاي كلاسيک داراي افت عددي نظير روش آلفا قادر به برقراري معادلة تعادل در انتهاي گام زماني نمي‌باشند. روش پيشنهادي از نظر دقت با ساير روش‌هاي كلاسيک مانند ويلسون و شتاب متوسط مقايسه شده است. ميزان خطاي روش پيشنهادي در مدهاي پايين كه نقش مهمي در پاسخ سازه دارند از ساير روش‌هاي كلاسيک كمتر است. مثال‌هايي براي ارزيابي دقت روش پيشنهادي و مقايسة آن با ساير روش‌هاي كلاسيك ارائه گرديد. روش پيشنهادي هم در تحليل خطي و هم در تحليل غير خطي سازه‌ها قابل استفاده است.

مراجع

1 - Belytschko, T. and Lu, Y. (1993). “Explicit multi-time step integration for first and second order finite element semi-discretizations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, Vol. 108, PP. 353–383.

2 - Hahn, G. D. (1991). “A modified Euler method for dynamic analysis.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, Vol. 32, No. 5, PP. 943–955.

3 - Hughes, T.J.R., and Belytschko, T. (1983). “A précis of developments in computational methods for transient analysis.” *Journal of Applied Mechanics*., Vol. 50, PP. 1033–1041.

4 - Dokainish, M.A. and Subbaraj, K. (1989). “A survey of direct time integration methods in computational structural dynamics-I. explicit methods.” *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 6, PP. 1371-1386.

5 - Hughes, T.J.R. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

6 - Newmark, N.M. (1959). “A method of computation for structural dynamics.” *Journal of the Engineering Mechanics Division., ASCE*, Vol. 85, No. 3, PP. 67–94.

7 - Wilson, E.L., Farhoomand, I., and Bathe, K.J. (1973). “Nonlinear dynamic analysis of complex structures.” *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*., Vol. 1, No. 3, PP. 241–252.

8 - Bathe, K.J., Wilson, E.L. (1973). “Stability and accuracy analysis of direct integration methods.” *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*., Vol. 1, No. 3, PP. 283–291.

9 - Keierleber, C.W., Rosson, B.T. (2005). “Higher-order implicit dynamic time integration method.” *Journal of Structural Engineering., ASCE*, Vol. 131, No. 8, PP. 1267–1276.

10 - Bathe, K.J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

11 - Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., and Taylor, R.L. (1977). “Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics.” *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*., Vol. 5, PP. 283–292.

12 - Houbolt, J.C. (1950). “A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft.” *Journal of the Aeronautical Sciences.,* Vol. 17, PP. 540–550.

پیوست

ضرائب ماتریس [A] و بردار {L}

در این پیوست مولفه‌هاي ماتریس $[A]$ و بردار $\{L\}$ براي روش پیشنهادي ارائه مي‌گردند. با توجه به رابطهٔ (۱۳) واضح است که ماتریس $[A]$ از مرتبهٔ چهار مي‌باشد.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$a_{11}=-(\frac{1}{2}-2\alpha)\beta-(2-4\delta)\kappa$$

$$a_{12}=-(\alpha-\frac{1}{12})\beta-(2\delta-\frac{1}{2})\kappa$$

$$a_{13}=\frac{1}{\Delta t}(-\beta-2\kappa) \quad , \quad a_{14}=\frac{1}{\Delta t^2}(-\beta)$$

$$a_{21}=1 \quad , \quad a_{22}=a_{23}=a_{24}=0$$

$$a_{31}=\Delta t\left[1-2\delta-(\frac{1}{2}-2\alpha)(\delta+\frac{1}{4})\beta-(1-2\delta)(2\delta+\frac{1}{2})\kappa\right]$$

$$a_{32}=\Delta t\left[\delta-\frac{1}{4}-(\delta+\frac{1}{4})(\alpha-\frac{1}{12})\beta-(\delta-\frac{1}{4})(2\delta+\frac{1}{2})\kappa\right]$$

$$a_{33}=1-\beta(\delta+\frac{1}{4})-2(\delta+\frac{1}{4})\kappa \quad , \quad a_{34}=\frac{-\beta}{\Delta t}(\delta+\frac{1}{4})$$

$$a_{41}=\Delta t^2\left[\frac{1}{2}-2\alpha-(\frac{1}{2}-2\alpha)(\alpha+\frac{1}{12})\beta-(2-4\delta)(\alpha+\frac{1}{12})\kappa\right]$$

$$a_{42}=\Delta t^2\left[\alpha-\frac{1}{12}-(\alpha-\frac{1}{12})(\alpha+\frac{1}{12})\beta-(2\delta-\frac{1}{2})(\alpha+\frac{1}{12})\kappa\right]$$

$$a_{43}=\Delta t\left[1-(\alpha+\frac{1}{12})\beta-2(\alpha+\frac{1}{12})\kappa\right]$$

$$a_{44}=1-(\alpha+\frac{1}{12})\beta$$

$$\{L\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2} \\ 0 \\ \dfrac{\beta(\delta+\frac{1}{4})}{\omega^2\Delta t} \\ \dfrac{\beta(\alpha+\frac{1}{12})}{\omega^2} \end{Bmatrix}$$