توابع پتانسیل اسکالر برای مسائل الاستودینامیک در انواع دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای

مرتضی اسکندری قادی[*1] و عزیزالله اردشیر بهرستاقی[2]

[1]استادیار گروه علوم پایه مهندسی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

[2]دانش آموخته کارشناسی ارشد سازه - دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل

(تاریخ دریافت 87/11/29، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده 89/7/3، تاریخ تصویب 89/8/25)

چکیده

هدف این مقاله ارائه توابع پتانسیل اسکالر واحد برای حل مسائل انتشار امواج در محیط‌های همسانگرد برای انواع مختلف دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای می‌باشد. بدین منظور دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای دایره ای (استاندارد)، بیضوی و سهموی در نظر گرفته می‌شوند. قضایای کامل بودن توابع پتانسیل با استفاده از کامل بودن جواب‌های پواسون، لامه و چادویک- ترابریچ اثبات می‌شود. این توابع به خصوص برای تعیین امواج انکساری و انعکاسی از لبه‌های دایره ای، بیضوی یا سهموی مورد استفاده قرار می گیرند.

واژه‌های کلیدی: دستگاه مختصات استوانه‌ای، دستگاه مختصات بیضوی، دستگاه مختصات سهموی، توابع پتانسیل اسکالر، الاستودینامیک

مقدمه

روش توابع پتانسیل به خصوص در مسائل سه بعدی تئوری ارتجاعی بسیار کارا بوده و نقش اساسی در حل بسیاری از مسائل مقادیر مرزی- اولیه دارد [1، 2، 3، 4 و 5]. برخی از توابع پتانسیل مشهور در حل مسائل دینامیکی تئوری ارتجاعی توابع Somigliana-Galerkin، Kovalevchi-Iacavache-Somigliana، لامه و پواسون می‌باشند [6 و 3]. برخی از این توابع پتانسیل حالت برداری داشته و برخی حالت اسکالر دارند. استفاده از توابع پتانسیل برداری به جز در دستگاه مختصات کارتزین معمولاً آسان نبوده و به همین علت علاقه در استفاده از توابع پتانسیل اسکالر می‌باشد [7، 6، 8 و 9]. بدین منظور تلاش در بیان توابع پتانسیل برداری به شکل اسکالر همواره مورد توجه محققین بوده است [6]. از بین توابع پتانسیل فوق‌الذکر، مشهورترین آنها توابع پتانسیل لامه- پواسون می‌باشد که به شکل برداری می‌باشند. چادویک و ترابریچ یک شکل اسکالر برای این توابع در دستگاه مختصات کروی ارائه کرده و کامل بودن آن را اثبات کرده‌اند. پائو و مو اشکال اسکالر توابع لامه- پواسون را برای دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای استاندارد، سهموی و بیضوی ارائه داده‌اند، امّا کامل بودن آنها را ثابت نکرده‌اند [10]. در این مقاله قضایای اثبات کامل بودن این توابع برای اولین بار ارائه می‌شود. این توابع برای مطالعه امواج انعکاسی و انکساری از لبه‌های دایره‌ای شکل، سهمی شکل و بیضی شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد

مختصات هر نقطه نسبت به دستگاه کارتزین به مبداءِ o را با (x_1,x_2,x_3) و نسبت به یک دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد با مبداءِ مشابه را با (ξ_1,ξ_2,ξ_3) نشان می‌دهیم، دراین صورت:

$$x_i = x_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \qquad i=1,2,3. \tag{1}$$

و عکس این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\xi_i = \xi_i(x_1,x_2,x_3), \qquad i=1,2,3. \tag{2}$$

اگر ضریب مقیاس مختصات در امتداد ξ_i با $h_i>0$ نمایش داده شود، آنگاه طول پاره خط در دو دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(ds)^2=\sum_{i=1}^{3}(dx_i)^2=\sum_{i=1}^{3}(h_i\, d\xi_i)^2. \tag{3}$$

به طوری که ضرایب مقیاس از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$h_j^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)^2. \tag{4}$$

* نویسنده مسئول : تلفن : 61112171 ، فاکس : 66469809 ، Email: ghadi@ut.ac.ir

دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای

در این قسمت دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای استاندارد (دایره‌ای)، سهموی و بیضوی معرفی می‌شوند.

الف) دستگاه مختصات استوانه‌ای استاندارد

در یک دستگاه مختصات استوانه‌ای استاندارد، مختصات (r,θ,z) به صورت زیر برحسب مختصات دکارتی نوشته می‌شوند:

$$\xi_1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\quad \xi_2 = \theta = \tan^{-1}(x_2/x_1),\quad \xi_3 = z = x_3. \tag{5}$$

که از آن ضرایب مقیاس $h_r = 1$، $h_\theta = r$ و $h_z = 1$ به دست می‌آیند. معکوس روابط (5) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$x_1 = r\cos\theta,\quad x_2 = r\sin\theta,\quad x_3 = \xi_3 = z. \tag{6}$$

ب) دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی

در یک دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی با مختصات $(\xi_1,\xi_2,\xi_3 = x_3 = z)$، روابط زیر وجود دارند:

$$x_1 = a\cosh\xi_1\cos\xi_2,\quad x_2 = a\sinh\xi_1\sin\xi_2,\quad x_3 = \xi_3 = z. \tag{7}$$

که از آن ضرایب مقیاس به صورت

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\cosh^2\xi_1 - \cos^2\xi_2} = a\sqrt{[\cosh(2\xi_1) - \cos(2\xi_2)]/2},\quad h_3 = 1. \tag{8}$$

به دست می‌آیند. با استفاده از دو رابطهٔ اول (7) می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{x_1}{a\cosh\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a\sinh\xi_1}\right)^2 = 1, \tag{9}$$

$$\left(\frac{x_1}{a\cos\xi_2}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a\sin\xi_2}\right)^2 = 1, \tag{10}$$

این روابط خانواده‌ای از بیضی‌ها و هذلولی‌هایی را تعریف می‌کنند که منحنی‌های مختصات بوده و عمود بر محور $\xi_3 = z$ می‌باشند.

ج) دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی

در دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی، مختصات دکارتی با استفاده از روابط (11) بر حسب مختصات سهموی نوشته می‌شوند:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2),\quad x_2 = \xi_1\xi_2,\quad x_3 = \xi_3 = z. \tag{11}$$

که در آن $\xi_2 \ge 0$ و $-\infty < \xi_1, \xi_3 < +\infty$. ضرایب مقیاس با استفاده از رابطهٔ (4) عبارتند از:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},\quad h_3 = 1. \tag{12}$$

و معکوس روابط (11) به صورت (13) نوشته می‌شوند:

$$\xi_1^2 = x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\quad \xi_2^2 = -x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\quad z = x_3. \tag{13}$$

با استفاده از (13) مشاهده می‌شود که ξ_1 و ξ_2 به لحاظ ابعادی به صورت ریشه دوم طول می باشند. هر نقطه در صفحهٔ عمود بر $\xi_3 = z$ می‌تواند به صورت قطبی استاندارد نوشته شود. در این صورت $\theta = \tan^{-1}(x_2/x_1) = 2\tan^{-1}(\xi_2/\xi_1)$ و $\xi_2 = 0$ برش شاخه‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی را تعریف می‌کند. به علاوه فاصله شعاعی با رابطهٔ $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)/2$ نوشته می‌شود.

اپراتورهای دیفرانسیلی

فضای اشغال شده به وسیلهٔ یک جسم کراندار پیوسته در فضای اقلیدسی سه بعدی را با زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{B}$ نشان می‌دهیم. به علاوه مرز $\mathbf{B}$ را با $\partial\mathbf{B}$ نشان داده و $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cup \partial\mathbf{B}$. هر نقطه از $\mathbf{B}$ را با $\mathbf{P}$ نشان می‌دهیم، همچنین یک بازهٔ باز تا t_0 با $(0,t_0)$ نشان داده می‌شود. تابع برداری $\mathbf{u}$ از کلاس $C^{M,N}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ نامیده می‌شود اگر $\mathbf{u}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ پیوسته بوده و مشتق آن نسبت به مکان تا مرتبهٔ M و نسبت به زمان تا مرتبهٔ N در هر نقطهٔ از $\mathbf{B}$ و در هر لحظه $t \in (0,t_0)$ وجود داشته باشد. تابع $\varphi(\mathbf{P},t)$ روی $\mathbf{B}$ با نمای α $(0 < \alpha < 1)$ و ثابت K پیوسته ازنوع هولدر (Hölder) نامیده می‌شود اگر برای هر جفت نقطهٔ $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ در $\mathbf{B}$ این تابع در نامساوی زیر صدق کند [11 و 12]:

$$|\varphi(\mathbf{P},t)-\varphi(\mathbf{Q},t)| \le K d_{\mathbf{PQ}}^{\alpha} \quad (14)$$

به طوری که $d_{\mathbf{PQ}}$ فاصلهٔ بین نقاط $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ است. در ادامه عملگرهای دیفرانسیلی لاپلاسین، هلمهولتز و گرادیان در دستگاه مختصات دکارتی و در هر یک از دستگاه‌های مختصات معرفی شده در بخش قبل تعریف می‌شوند. در روابط زیر c ثابت مثبت است.

عملگرها در دستگاه مختصات دکارتی

عملگرهای گرادیان و لاپلاسین در دستگاه مختصات دکارتی عبارتند از:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (15)$$

در این روابط $\mathbf{e}_i$ بردار یکه در امتداد x_i است.

عملگرها در دستگاه مختصات استوانه‌ای استاندارد

عملگرهای گرادیان و لاپلاسین در دستگاه مختصات استوانه‌ای استاندارد عبارتند از:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (16)$$

در این روابط $\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_z$ بردارهای یکه به ترتیب در امتدادهای r، θ و z هستند.

عملگرها در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی

این عملگرها در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی عبارتند از:

$$\nabla = \frac{1}{a\sqrt{\cosh^2\xi_1 - \cos^2\xi_2}} \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2(\cosh^2\xi_1 - \cos^2\xi_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (17)$$

در اینجا $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بردارهای یکه در امتدادهای ξ_1 و ξ_2 بوده و $\mathbf{e}_3$ بردار یکه در امتداد z است.

عملگرها در دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی

این عملگرها در دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی عبارتند از:

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (18)$$

در اینجا $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بردارهای یکه در امتدادهای ξ_1 و ξ_2 بوده و $\mathbf{e}_3$ بردار یکه در امتداد z است.

عملگر هلمهولتز برای موج با سرعت انتشار برابر c_β در کلیه دستگاه‌های مختصات فوق‌الذکر به صورت

$$\Box_\beta = \nabla^2 - \frac{1}{c_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (19)$$

نوشته می‌شود که در آن عملگر لاپلاس بسته به مورد از روابط (15) تا (18) استخراج می‌گردد.

اگر تابع برداری $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ نسبت به مختصات منحنی‌الخط متعامد پیوسته از نوع هولدر تا مرتبهٔ 2 باشد و اگر مشتق $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ از کلاس $C^{2,2}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ باشد به طوری که در معادلهٔ حرکت

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{20-الف})$$

یا

$$c_d^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - c_s^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) = \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{20-ب})$$

با

$$c_d^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \qquad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (21)$$

صدق می‌کند، آنگاه $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ را تابع تغییرمکان ارتجاعی می‌نامیم. در این روابط λ و μ ضرایب لامه و ρ جرم حجمی $\mathbf{B}$ است.

توابع پتانسیل اسکالر

در این قسمت توابع پتانسیل اسکالر برای معادلات (20) در هر یک از دستگاه‌های مختصات معرفی شده ارائه

می‌شود. بدین منظور ابتدا توابع پتانسیل پواسون، لامه و چادویک- ترابریج معرفی می‌شوند.

لم 1: توابع پتانسیل پواسون [7]

فرض کنید $\Phi(\mathbf{P},t)$ تابعی اسکالر و از کلاس $C^{3,2}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ بوده و مشتقات تا مرتبهٔ 3 آن پیوسته از نوع هولدر باشند. همچنین فرض کنید جواب معادلهٔ موج $\Box_d \Phi(\mathbf{P},t)=0$ با $\Box_d=\nabla^2-\partial^2/c_d^2\partial t^2$ باشد. به همین ترتیب فرض می‌شود که تابع برداری $\mathbf{A}(\mathbf{P},t)$ از کلاس $C^{2,2}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ بوده و مشتقات تا مرتبهٔ 2 آن پیوسته از نوع هولدر باشد. تابع $\mathbf{A}(\mathbf{P},t)$ جواب معادلهٔ موج $\Box_s \mathbf{A}(\mathbf{P},t)=0$ با $\Box_s=\nabla^2-\partial^2/c_s^2\partial t^2$ و با شرط $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ فرض می‌گردد. در این صورت تابع برداری $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ با تعریف:

$$\mathbf{u}(\mathbf{P},t)=\nabla\Phi(\mathbf{P},t)-\mathbf{A}(\mathbf{P},t) \qquad (22)$$

تابع تغییرمکان ارتجاعی می‌باشد.

اثبات: با جایگزینی (22) در (20) این لم اثبات می‌شود.

لم 2: توابع پتانسیل لامه [7 و 6]

فرض کنید $\Phi(\mathbf{P},t)$ و $\Psi(\mathbf{P},t)$ به ترتیب توابع اسکالر و برداری باشند که روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ از کلاس $C^{2,2}$ و $C^{3,2}$ هستند و به ترتیب تا مشتقات مرتبه دوم و سوم آن‌ها روی $\mathbf{B}$ پیوسته از نوع هولدر باشد. به علاوه فرض می‌کنیم که Φ و Ψ جواب‌های معادلات موج $\Box_d\Phi=0$ و $\Box_s\Psi=\mathbf{0}$ هستند که $\Box_d$ و $\Box_s$ در لم 1 تعریف شده‌اند. در این صورت تابع برداری $\mathbf{u}$ با تعریف

$$\mathbf{u}(\mathbf{P},t)=\nabla\Phi(\mathbf{P},t)+\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{P},t) \qquad (23)$$

تابع تغییرمکان ارتجاعی می‌باشد.

اثبات: این موضوع با جایگزینی (23) در (20) مشخص می‌گردد که $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ مطابق (23) تابع تغییر مکان ارتجاعی است.

لم 3 : توابع پتانسیل چادویک- ترابریج [6]

فرض کنید $\Phi(\mathbf{P},t)$ و $\chi(\mathbf{P},t)$ توابع اسکالر از کلاس $C^{3,2}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ با دستگاه مختصات قائم (ξ_1,ξ_2,ξ_3) بوده و کلیهٔ مشتقات این توابع تا مرتبهٔ 3 روی $\mathbf{B}$ پیوسته از نوع هولدر فرض می‌گردد. به علاوه تابع اسکالر $\eta(\mathbf{P},t)$ از کلاس $C^{4,2}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ و مشتقات آن تا مرتبهٔ 4 روی $\mathbf{B}$ پیوسته از نوع هولدر فرض می‌گردد. اگر Φ، χ و η جواب‌های معادلات موج $\Box_d\Phi=0$، $\Box_s\chi=0$ و $\Box_s\eta=0$ باشند، آنگاه تابع برداری $\mathbf{u}$ با تعریف

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{P},t)=\nabla\Phi(\mathbf{P},t)-\nabla\times[\omega\mathbf{e}_1\,\chi(\mathbf{P},t)]\\ -\nabla\times\nabla\times[\omega\mathbf{e}_1\,\eta(\mathbf{P},t)]\end{aligned} \qquad (24)$$

یک تابع تغییرمکان ارتجاعی است. در (24) $\mathbf{e}_1$ بردار یکه در امتداد ξ_1 و ω تابعی می‌باشد که وابسته به دستگاه مختصات می‌باشد.

اثبات: برای اثبات آنکه $\mathbf{u}$ مطابق (24) یک تابع تغییرمکان ارتجاعی است، ادعا می‌کنیم که تابع برداری $\Psi(\mathbf{P},t)$ در (23) می‌تواند با تابع $-\omega\mathbf{e}_1\chi(\mathbf{P},t)-\nabla\times\left[\omega\mathbf{e}_1\eta(\mathbf{P},t)\right]$ جایگزین شود. در این صورت بر اساس لم 2، $\mathbf{u}$ مطابق (24) یک تابع تغییرمکان ارتجاعی و کامل بودن آن با کامل بودن توابع پتانسیل لامه اثبات می‌شود. ادعای فوق در هر یک از دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای معرفی شده با استفاده از دو لم بعدی اثبات می‌شود.

لم 4: فرض کنید تابع برداری $\mathbf{v}(\mathbf{P},t)$ از کلاس $C^{2,0}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ بوده و روی $\mathbf{B}$ پیوسته از نوع هولدر باشد به طوری که در معادلات

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=0,\quad \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=0,\\ &\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=0.\end{aligned} \qquad (25)$$

صدق می‌کند. در این صورت $\mathbf{v}(\mathbf{P},t)$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ ثابت است.

برای اثبات دستگاه‌های مختصات را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) دستگاه مختصات کارتزین

از معادلهٔ دوم (25) نتیجه می‌شود $v_z=0$. از معادلات اول و سوم (25) نیز می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v_x=0,\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v_y=0. \qquad (26)$$

یعنی v_x و v_y روی صفحات عمود بر $\mathbf{e}_z$ هارمونیک هستند. بر اساس فرض این لم تابع $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{B}$ کراندار است و در تئوری معادلات با مشتقات جزیی نشان داده می‌شود که هر تابع هارمونیک کراندار ثابت است [12]. واضح است که در این دستگاه مختصات می‌توان $\mathbf{e}_x$ یا $\mathbf{e}_y$ را جایگزین $\mathbf{e}_z$ کرد.

ب) دستگاه مختصات استوانه‌ای استاندارد

با استفاده از معادلهٔ دوم (25) مجدداً نتیجه می‌شود که $v_z = 0$، همچنین از معادلات اول و سوم (25) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial \theta^2}=0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r}]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (rv_\theta)}{\partial \theta^2}=0. \quad (27)$$

بنابراین توابع rv_r و rv_θ روی هر صفحهٔ عمود بر $\mathbf{e}_z$ هارمونیک هستند. از آنجایی که تابع $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{B}$ کراندار است، پس توابع rv_r و rv_θ روی $\mathbf{B}$ ثابت هستند. امّا از آنجایی که $\mathbf{v}$ **در** $r=0$ نیز کراندار است، آنگاه $\mathbf{v}(\mathbf{P},t)$ همه جا روی $\mathbf{B}$ صفر است.

ج) دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی

مجدداً با استفاده از معادلهٔ دوم (25) نتیجهٔ $v_z = 0$ به دست می‌آید. از معادلات اول و سوم (25) نیز نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{a^2(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)v_1=0,$$
$$\frac{1}{a^2(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)v_2=0. \quad (28)$$

بنابراین توابع v_1 و v_2 روی هر صفحهٔ عمود بر $\mathbf{e}_z$ هارمونیک بوده و با استفاده از فرض این لم تابع $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{B}$ ثابت است.

د) دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی

با استفاده از معادلهٔ دوم (25) نتیجهٔ $v_z = 0$ به دست می‌آید. از معادلات اول و سوم (19) نیز نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)v_1=0,$$
$$\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)v_2=0. \quad (29)$$

یعنی توابع v_1 و v_2 روی هر صفحهٔ عمود بر $\mathbf{e}_z$ هارمونیک هستند و در نتیجه $\mathbf{v}$ روی $\mathbf{B}$ ثابت است.

لم 5: فرض کنید $\mathbf{\Psi}(\mathbf{P},t)$ یک تابع برداری از کلاس $C^{3,0}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t_0)$ باشد به طوری که مشتق اول آن روی $\mathbf{B}$ پیوسته از نوع هولدر باشد، همچنین فرض کنید $\mathbf{a}(\mathbf{P},t)$ تابع برداری غیرچرخشی $(\nabla\times\mathbf{a}=\mathbf{0})$ از کلاس $C^{1,0}$ روی $\mathbf{B}\times(0,t)$ باشد، در این صورت توابع اسکالر $\chi(\mathbf{P},t)$ و $\eta(\mathbf{P},t)$ وجود دارند به طوری که:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{P},t)= -\mathbf{e}_z\,\chi(\mathbf{P},t)-\nabla\times[\mathbf{e}_z\,\eta(\mathbf{P},t)]-\mathbf{a}(\mathbf{P},t) \quad (30)$$

اثبات: با اعمال اپراتور کرل روی (30) داریم:

$$\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{P},t)= -\nabla\times\chi(\mathbf{P},t)\mathbf{e}_z-\nabla\times\nabla\times\eta(\mathbf{P},t)\mathbf{e}_z\,. \quad (31)$$

با این رابطه واضح است که $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathrm{P},t)=0$، تابع $\mathbf{v}(\mathbf{P},t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{P},t)+\nabla\times\chi(\mathbf{P},t)\mathbf{e}_1 +\nabla\times\nabla\times\eta(\mathbf{P},t)\mathbf{e}_1\,. \quad (32)$$

در این صورت $\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=0$. اگر توابع χ و η را جواب‌های معادلات زیر در نظر بگیریم:

الف) دستگاه مختصات دکارتی

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi=\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}= -\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x\partial z}, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\eta=\mathbf{e}_1\cdot\nabla\times\mathbf{\Psi}=\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}. \quad (34)$$

ب) دستگاه مختصات استوانه‌ای استاندارد

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\chi=\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\eta=\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\mathbf{\Psi} =\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Psi_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta}. \quad (36)$$

که در آن

$$\nabla\times\mathbf{\Psi}=\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial\Psi_z}{\partial\theta}-\frac{\partial(r\Psi_\theta)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r +r\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(r\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial r}-\frac{\partial\Psi_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z\right] \quad (37)$$

ج) دستگاه مختصات استوانه‌ای بیضوی

$$\frac{1}{a^2\,(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)\chi = \mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad (38)$$

$$\frac{1}{a^2\,(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)\eta = \mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\mathbf{\Psi}. \quad (39)$$

که در آن

$$\nabla\times\mathbf{\Psi} = \left[\left(\frac{1}{a\sqrt{(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}}\frac{\partial\Psi_3}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{a\sqrt{(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}}\frac{\partial\Psi_3}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{a\sqrt{(\cosh^2\xi_1-\cos^2\xi_2)}}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\xi_2}\right)\mathbf{e}_z\right]. \quad (40)$$

د) دستگاه مختصات استوانه‌ای سهموی

$$\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)\chi = \mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad (41)$$

$$\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)\eta = \mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\mathbf{\Psi}. \quad (42)$$

که در آن

$$\nabla\times\mathbf{\Psi} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\frac{\partial\Psi_3}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\frac{\partial\Psi_3}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\xi_2}\right)\mathbf{e}_z\right]. \quad (43)$$

آنگاه براساس تئوری توابع پتانسیل، معادلات (33) و (34) جواب به شکل توابع پتانسیل لگاریتمی دارند [13]. با استفاده از (33) و (34) می‌توان نشان داد $\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=0$ و $\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{P},t)=0$. در این صورت با استفاده از لم 4 می‌توان نوشت:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{P},t) = -\mathbf{e}_Z\;\chi(\mathbf{P},t)-\nabla\times[\mathbf{e}_Z\;\eta(\mathbf{P},t)]-\mathbf{a}(\mathbf{P},t) \quad (44)$$

که در آن $\mathbf{a}(\mathbf{P},t)$ یک تابع برداری غیرچرخشی دلخواه است. این رابطه اثبات این لم را کامل می‌کند.

توابع پتانسیل اسکالر برای معادلات حرکت در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای

قضیه بعدی توابع پتانسیل کامل برای حل معادلات حرکت در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای که در این مقاله معرفی شده‌اند را در اختیار قرار می‌دهد. این توابع برای حل معادلات حرکت یا انتشار امواج به صورت تحلیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه: توابع پتانسیل اسکالر الاستودینامیک در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای

فرض کنید $\mathbf{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}(\mathbf{P},t) = \nabla\phi(\mathbf{P},t)+\nabla\times[\mathbf{e}_z\;\psi(\mathbf{P},t)] + \nabla\left(\frac{\partial\gamma(\mathbf{P},t)}{\partial z}\right)-\mathbf{e}_z\;\nabla^2\gamma(\mathbf{P},t), \quad (45)$$

که در آن ϕ و ψ از کلاس $C^{3,2}$ و γ از کلاس $C^{4,2}$ روی $\mathsf{B}\times(0,t_0)$ بوده و همهٔ مشتقات آنها روی B پیوسته از نوع هولدر است. به علاوه

$$\Box_d\,\phi(\mathbf{P},t)=0,\; \Box_s\,\psi(\mathbf{P},t)=0,\; \Box_s\,\gamma(\mathbf{P},t)=0. \quad (46)$$

در این صورت $\mathbf{u}$ یک تابع تغییرمکان ارتجاعی است.

اثبات: با جایگزینی مستقیم $\mathbf{u}$ در معادلات (20) و توجه به روابط (15) تا (19) دیده می‌شود که $\mathbf{u}$ مطابق (45) یک تابع تغییرمکان ارتجاعی در هر یک از دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای ارائه شده، است.

قضیه: کامل بودن جواب (45)

فرض کنید $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ تابع تغییرمکان ارتجاعی برای هر حالت دلخواه روی $\mathsf{B}\times(0,t_0)$ باشد. همچنین فرض کنید $f(\mathbf{P})=u(\mathbf{P},\tau)$ و $\dot{f}(\mathbf{P})=\dot{u}(\mathbf{P},\tau)$ توابع پیوسته روی $\bar{\mathsf{B}}$ در لحظهٔ $\tau\in(0,t_0)$ باشد. در این صورت توابع اسکالر ϕ و ψ از کلاس $C^{3,2}$ و تابع اسکالر γ از کلاس $C^{4,2}$ روی $\mathsf{B}\times(0,t_0)$ وجود دارند به طوری که کلیه مشتقات آنها روی B پیوسته از نوع هولدر بوده و روابط (45) و (46) برقرارند.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{u}(\mathbf{P},t)$ تابع تغییرمکان ارتجاعی باشد. از آنجایی که توابع پتانسیل لامه (رابطه 23) و پواسون (رابطه 22) کامل هستند، اگر نشان داده شود که

به ازای هر سه تایی (Φ,χ,η) در (24) توابع اسکالر ϕ، ψ و γ وجود دارد به طوری که $\mathbf{u}$ مطابق (45) باشد، آنگاه $\mathbf{u}$ کامل است. بدین منظور کافیست که در (24) به جای ω و $\mathbf{e}_1$ به ترتیب تابع ثابت واحد و $\mathbf{e}_z$ قرار داده شود. در این صورت (24) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{u}(\mathbf{P},t)=\nabla\Phi(\mathbf{P},t)-\nabla\times[\mathbf{e}_z\ \chi(\mathbf{P},t)] -\nabla\times\nabla\times[\mathbf{e}_z\ \eta(\mathbf{P},t)]. \quad (47)$$

با استفاده از اتحاد

$$\nabla\times[\mathbf{e}_z\ \eta(\mathbf{P},t)]=-\mathbf{e}_z\times\nabla[\eta(\mathbf{P},t)]. \quad (48)$$

و تعریف ضرب خارجی در دستگاه‌های قائم، آخرین جمله در (47) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$-\nabla\times\nabla\times[\mathbf{e}_z\ \eta(\mathbf{P},t)]=\nabla\times\left(\mathbf{e}_z\times\nabla[\eta(\mathbf{P},t)]\right)= \nabla\times\left(\frac{1}{h_1}\mathbf{e}_2\frac{\partial\eta}{\partial\xi_1}-\frac{1}{h_2}\mathbf{e}_1\frac{\partial\eta}{\partial\xi_2}\right)=\mathbf{e}_1[-\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\eta}{\partial z\partial\xi_1}] +\mathbf{e}_2[-\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\eta}{\partial z\partial\xi_2}]+\mathbf{e}_z[\frac{\partial^2\eta}{h_1^2\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2\eta}{h_2^2\partial\xi_2^2}]. \quad (49)$$

به طوری که h_1 و h_2 ضرایب مقیاس در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای استاندارد، بیضوی و سهموی است. به راحتی می‌توان نشان داد که (49) معادل مجموع دو جمله آخر در (45) است اگر η را با $-\gamma$ جایگزین کنیم. بنابراین اگر سه تایی (Φ,χ,η) با $(\phi,-\psi,-\gamma)$ جایگزین شود و به جای ω و $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_z$ قرار داده شود آنگاه روابط (24) و (45) معادل هستند و بدین ترتیب اثبات کامل می‌باشد.

نتیجه گیری

از آنجایی که حل معادلات برداری موج به جز در دستگاه مختصات دکارتی مشکل می‌باشد، توابع پتانسیل اسکالر در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای استاندارد، بیضوی و سهموی ارائه شده است. اولین سوال پس از ارائه توابع پتانسیل مسئله کامل بودن آنها است که در اینجا بر اساس توابع پتانسیل پواسون، لامه و چادویک-ترابریج به این سوال پاسخ داده شده است.

مراجع

1 - Tran-Cong, T. (1995). “On the completeness and uniqueness of Papkovich-Neuber and the non-axissymetric Boussinesq.” Love and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates, *J. Elasticity*, Vol. 36, PP. 227-255.

2 - Fung, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

3 - Gurtin, M. E. (1972). *The linear theory of elasticity.* In S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. 2, Mechanics of Solids II, (Ed. Truesdell), Springer, Berlin, PP. 1-295.

4 - Achenbach, J. D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam.

5 - Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover, New York.

6 - Chadwick, P. and Trowbridge, E. A., (1967). “Elastic wave fields generated by scalar wave equations.” *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, PP. 1177-1187.

7 - Sternberg, E. (1960). “On the integration of the equation of motion in the classical theory of elasticity.” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 6, PP. 34-50.

8 - Eskandari-Ghadi, M., (2005). “A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media.” *J. of Elasticity*, Vol. 81, PP. 1-19.

9 - Eskandari-Ghadi, M. (2007). “Potential method for transversely isotropic media with axissymmetry.” *Journal of Faculty of Engineering*, Vol. 41, No. 6, PP. 675-681 (in Persian).

10 - Pao, Y. H. and Mow, C. C. (1971). *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane Russak, New York.

11 - Courant, R. and Hilbert, D., (1962). *Methods of mathematical physics*, Vol. II (Partial differential equations), Interscience Publishers.

12 - Hellwig, G., (1977). *Partial differential equations, an introduction*, B. G. Teubner Stuttgart.

13 - Kellogg, O. D. (1953). *Foundation of Potential Theory*, Dover, New York.