

## کاربرد درخت دوجمله‌ای در محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک و قیمت اختیار معامله در بورس سهام

سید علی نبوی چاشمی\*، جابر قاسمی چالی\*\*،

\*. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بابل، استادیار گروه مدیریت بازرگانی، بابل، ایران (مسئول مکاتبات)

Email: Anabavichashmi2003@gmail.com

\*\* دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بابل، کارشناسی ارشد مدیریت بازرگانی (گرایش مالی)، بابل، ایران

Email: Gha3mi\_jabeer@yahoo.com

### چکیده

حوزه‌های فعالیت ابزارها و فرایندهای نوین مالی مواردی چون نوآوری در مهندسی ابزارهای مالی و مدیریت ریسک را در بر می‌گیرد. ابزارهای مشتقه و به‌طور خاص؛ قرارداد اختیار معامله سهام نیز بخشی از این نوآوری‌ها است. از بین روش‌های کمی برای محاسبه ارزش مشتقات و پارامترهای حساسیت ریسک اختیار معامله، مدل دوجمله‌ای به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش قیمت اختیار خرید و اختیار فروش و پارامترهای پنج‌گانه دلتا (Delta)، گاما (Gamma)، وگا (Vega)، تتا (Theta) و رو (Rho) برای ۳۷ شرکت فعال سه ماهه سوم سال ۱۳۹۱ توسط مدل دوجمله‌ای محاسبه شده است. ابتدا بر اساس قیمت‌های پایانی سه ماه چهارم سال ۱۳۹۱، نوسان‌پذیری سهام به صورت انحراف معیار بازده کسب شده توسط سهام هر یک از شرکت‌ها برآورد شده و قرارداد اختیار معامله با سررسید ۶ ماهه (انقضاء در پایان شهریور ۱۳۹۲) بر روی سهام این شرکت‌ها صادر گردیده است. با تحلیل خروجی‌های مدل و بررسی مسیر حرکت و تغییرات قیمت سهام و قیمت اختیار به کمک مدل دوجمله‌ای و نیز سنجش حساسیت قیمت اختیار به تغییرات (تغییر در قیمت سهام، دلتا، نوسان، زمان باقی مانده تا سررسید و نرخ بهره) توسط پارامترها، چگونگی مدیریت ریسک مواضع معاملاتی اتخاذ شده از سوی سرمایه‌گذاران بیان شده است.

کلمات کلیدی: اختیار خرید، اختیار فروش، مدل دوجمله‌ای، پارامترهای حساسیت ریسک (یونانی‌ها)

## مقدمه

پارامترهای ریسک اختیار معامله (یونانی‌ها) نیز استفاده می‌شود.

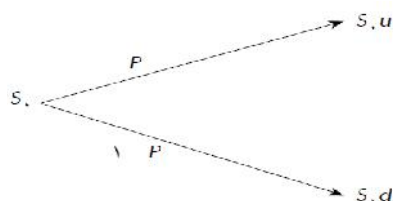
معامله گران در بازار اختیارات همواره در معرض ریسک تغییرات قیمت قرار دارند که اصطلاحاً به آن «ریسک بازار» می‌گویند. تغییر در قیمت دارایی پایه مهمترین متغیر در ریسک بازار است که اصطلاحاً به «ریسک جهت تغییرات» معروف است. دو ریسک دیگر نیز وجود دارند که عبارتند از «ریسک زمان» و «ریسک تغییر(نوسان) پذیری». ریسک زمان ناشی از گذشت زمان و نزدیک‌تر شدن اختیار به تاریخ انقضاست. ریسک تغییرپذیری ناشی از میزان تغییر در قیمت دارایی پایه است(درخشان، ۱۳۹۰، ۳۲۳). ماهیت مدیریت ریسک ایجاب می‌کند که مطالعات در زمینه مدیریت ریسک چند وجهی باشد، یعنی علاوه بر شناخت عملکرد اقتصادی و تجاری بنگاه، لازم است مدیران ریسک با مسائل آماری و ریاضی، روش‌ها و مدل‌های کنترل ریسک نیز آشنا باشند. اختیارات ابزارهای مناسبی برای مدیریت ریسک هستند اما خود این ابزارها بدون ریسک نیستند. در بازارهای تغییرپذیر که تغییر پذیری (نوسان‌پذیری) قیمت در آنها زیاد است، ارزش اختیارات به سرعت تغییر می‌کند، لذا مدیران ریسک باید به طور منظم ارزش اختیارات را بازنگری کرده و استراتژی‌های خود را با ملاحظه این تغییرات به‌روز کنند، زیرا چه بسا اختیاری که زمانی بسیار سودآور است در وقت دیگر شدیداً زیان ده باشد. تغییرپذیری مورد انتظار معامله گران از قیمت دارایی پایه، نقش بسیار موثری در ارزش زمانی اختیار ایفا می‌کند. اگر این اطمینان وجود داشته باشد که قیمت‌ها در آینده تغییر نخواهد کرد، ارزش زمانی تعریف نخواهد شد و اساساً انگیزه‌ای برای معامله گران وجود نخواهد داشت که به خرید و فروش اختیارات بپردازند. این احتمال که اختیاری ممکن است  $ITM$ <sup>۲</sup> (اختیار معامله با ارزش یا با قیمت) شود علت اصلی معامله آن اختیار است.

با توجه به مستندات مختصر ذکر شده پیرامون اهمیت تعیین قیمت اختیار معامله و نیز شناسایی و اندازه‌گیری ریسک‌های مرتبط مسأله پژوهش به تعیین قیمت تئوریک

سرمایه‌گذاران و متخصصان بازار سرمایه همواره به دنبال این می‌باشند که ریسک سرمایه گذاری خود را کاهش داده و بتوانند بازده مورد انتظار خود را کسب نمایند. یکی از بهترین گزینه‌های موجود در این رابطه، استفاده از ابزارهای مشتقه و به‌خصوص حق خرید یا فروش سهام (اختیار معامله) می‌باشد. با نگاهی به تعداد معاملات انجام شده بر روی ابزارهای مشتقه مشخص می‌گردد که در کشورهای آسیایی و آمریکای لاتین میزان رشد ابزارهای مشتقه به سرعت در حال افزایش می‌باشد (بهرامی نسب و جلالی، ۱۳۹۱). از موضوعات مورد علاقه تحلیل گران مالی و اقتصاددانان، ارزش گذاری و تحلیل نوسانات قیمت اوراق بهادار است که از آن جمله می‌توان به سهام، اوراق قرضه، اختیارات و دیگر ابزارهای مالی اشاره کرد. در سال‌های اخیر، بازارهای آتی و اوراق اختیار معامله، در دنیای مالی و سرمایه گذاری، اهمیت روزافزونی پیدا کرده است و اکنون به سطحی از نوآوریهای مالی رسیده‌ایم که ضروری است همه متخصصین در امور مالی از چگونگی کارکرد این بازارها، نحوه استفاده از آنها و همچنین ساز و کار تعیین قیمت در این بازارها آگاه باشند (John C. Hull, ۲۰۰۱، ۱).

در اوایل دهه ۱۹۷۰، «فیشر بلک»، «میرن شولز» و «رابرت مرتون» گام بزرگی در قیمت گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه کار آنها ارائه مدلی بود که که تحت عنوان «مدل بلک - شولز<sup>۱</sup>» معروف گشت. این مدل تاثیر زیادی در نحوه قیمت گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است (جان‌هال، ۱۳۸۸، ۴۱۵). با وجود مزایای این مدل مثل سادگی و داشتن فرم صریح برای قیمت اختیار معامله، به دلیل فرض‌های غیر واقع بینانه همواره مورد انتقاد قرار گرفته است (شاکران، ۱۳۹۱). مدل دوجمله‌ای از دیگر مدل‌های قیمت‌گذاری اختیارات است. از بین روشهای کمی محاسبه ارزش مشتقات وابسته به یک دارایی پایه، این روش به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد (جان‌هال، ۱۳۸۸، ۵۴۰). علاوه بر ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله، از این روش برای محاسبه

نقطه‌ی آغازین مدل دوجمله‌ای، شبکه بندی کردن ارزش-های آتی دارایی مورد نظر است. هنگام استفاده از مدل درخت دوجمله‌ای، از اصل ارزش گذاری تحت شرایط بی تفاوت نسبت به ریسک استفاده می‌شود. این اصل می‌گوید که ارزش گذاری مشتقاتی که وابسته به قیمت سهام هستند، با فرض اینکه در شرایط بی تفاوت نسبت به ریسک هستیم، صورت می‌گیرد (جان‌هال، ۱۳۸۸، ۵۴۰). واقع بینانه‌تر آن است که فرض کنیم، حرکت‌های قیمت سهام در فاصله‌های زمانی کوتاه مدت به صورت دو شاخه-ای می‌باشد. در مرحله اول، طول عمر اختیار معامله مذکور را به مقدار زیادی فاصله زمانی کوتاه مدت با طول  $\Delta t$  تقسیم می‌کنیم. قیمت اولیه سهم  $S_0$  است. در هر مرحله زمانی ممکن است دو نوع قیمت سهم وجود داشته باشد؛ یعنی در صورت افزایش، قیمت در  $u$  و در صورت کاهش، قیمت در  $d$  ضرب می‌شود؛ به طور کلی  $u > 1$  و  $d < 1$  است. فرض می‌کنیم که در هر فاصله زمانی، قیمت اولیه سهام از  $S_0$  به یکی از دو مقدار  $S_0 u$  (حرکت رو به پایین) و یا  $S_0 d$  (حرکت رو به بالا) می‌رسد. این حالت در شکل ۱ آمده است. احتمال حرکت به سمت بالا برابر با « $p$ » و احتمال حرکت رو به پایین « $1-p$ » می‌باشد.



شکل ۱: تغییرات قیمت سهام در زمان  $t$  در مدل درخت دوجمله‌ای  
منبع: (جان‌هال، ۱۳۸۸، ۵۴۱)

پارامترهای  $p$ ،  $u$  و  $d$  می‌بایستی مقادیر صحیح میانگین و واریانس تغییرات قیمت سهام طی فاصله زمانی را در محیط بی تفاوت نسبت به ریسک بدست دهند. با آگاهی از ارزش‌های محتمل آتی دارایی، شرایط حدی معامله بدست می‌آید. نکته‌ای که در این عبارت نهفته است این است که اگر پرتفوی ما به طور کامل پوشش داده شود، بدون ریسک خواهد بود و بنابراین تنها چیزی در حدود نرخ بهره بدون ریسک بازده خواهد داشت و مسئله‌ی مهم بدست آوردن نسبت پوشش این پرتفوی می‌باشد (افشار، ۱۳۷۸). بازده مورد انتظار یک سهم، نرخ بهره بدون ریسک یا « $r$ » است. بنابراین قیمت مورد

اختیارات سهام در بورس اوراق بهادار تهران توسط درخت دوجمله‌ای و اندازه‌گیری و تحلیل پارامترهای ریسک اختیار معامله (یونانی‌ها)، اختصاص می‌یابد.

### مبانی نظری پژوهش

۱- قرارداد اختیار معامله: اختیار معامله نوعی اوراق مشتقه است که به دارنده‌ی آن حق خرید (فروش) دارایی خاصی را به صورت صریح و یا ضمنی، تا تاریخ مشخص و به قیمت توافقی اعطا می‌نماید (افشار، ۱۳۷۸). اختیارهای سهام از معروف‌ترین نوع اختیارهاست که دارنده‌ی آن حق خرید یا فروش سهم مشخصی را به قیمت توافقی در تاریخ معینی یا قبل از آن به دست می‌آورد. (راعی و پویان فر، ۱۳۸۹، ۵۵۲). به طور کلی می‌توان اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد؛ «اختیار خرید<sup>۱</sup>» و «اختیار فروش<sup>۲</sup>». دارنده اختیار خرید می‌تواند (نه اینکه ملزم باشد) تعداد معینی سهم را در خلال مدتی معین و با قیمتی معین خریداری نماید. سررسید مدت ذکر شده را در اصطلاح تاریخ سررسید می‌نامند. همچنین قیمت معین ذکر شده را قیمت توافقی می‌نامند. دارنده اختیار فروش، طبعاً دارای حق فروش ورقه‌ی بهادار مورد نظر خواهد بود (اسلامی و سرافراز، ۱۳۷۵). اختیار خرید و فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شوند. قرارداد «اختیار اروپایی» فقط در تاریخ سررسید قابلیت اعمال دارد، در حالی که قرار داد «اختیار آمریکایی» در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است (جان‌هال، ۱۳۸۸، ۳۴).

۲- مدل دو جمله‌ای: با استفاده از مدل‌های دوجمله‌ای یا درخت‌های دو جمله‌ای<sup>۳</sup> می‌توان اختیارات را قیمت گذاری کرد. این مدل را معمولاً به صورت نمودار ترسیم می‌کنند. درخت دو جمله‌ای نموداری است که مسیرهای ممکن را برای تغییرات قیمت دارایی پایه تا پایان عمر اختیار نشان می‌دهد. این نمودارها تغییرات قیمت دارایی پایه مانند سهام، کالا و نظایر آن را در خلال مدت زمان باقی مانده تا انقضای اختیارات نشان می‌دهند (درخشان، ۴۰۹، ۱۳۹۰).

از  $a$  به عنوان «فاکتور رشد» یاد می‌شود.

۳- یونانی‌ها: متغیرهایی چون مدت زمان باقی مانده تا انقضای اختیار، قیمت توافقی، درجه تغییرپذیری قیمت دارایی پایه (نوسان) و نرخ بهره بر قیمت اختیارات تاثیر می‌گذارند. اگر تغییر قیمت دارایی پایه را نیز به این مجموعه اضافه کنیم می‌توان نتیجه گرفت که طراحی استراتژی‌های مناسب در بازار اختیارات مستلزم آن است که میزان تغییر قیمت اختیارات نسبت به تغییر در متغیرهای فوق‌الذکر به دقت محاسبه شود. تغییر در قیمت اختیارات به ازای یک واحد تغییر در هر یک از متغیرهای این مجموعه را اصطلاحاً «حساسیت» می‌گویند (درخشان، ۳۱۷، ۱۳۹۰). نظر به اینکه حساسیت‌ها را با حروف یونانی نشان می‌دهند، به یونانی‌ها<sup>۱</sup> نیز معروفند. محاسبه حساسیت‌ها از ارکان اصلی در طراحی استراتژی‌های معامله اختیارات است و چون قیمت دارایی پایه تغییر می‌کند پس این حساسیت‌ها مرتباً در تغییرند. پارامترهای حساسیت ریسک ابعاد مختلفی از ریسک موضع معاملاتی اختیار را اندازه‌گیری می‌کند و هدف معامله‌گر مدیریت این پارامترها است. به بررسی کمی این تغییرات و تاثیرات آن‌ها، اصطلاحاً محاسبه حساسیت‌ها یا یونانی‌ها گویند. مهم‌ترین یونانی‌ها در بررسی اختیارات عبارتند از: «دلتا»، «گاما»، «وگا»، «تتا» و «رو». این یونانی‌ها در جدول ۱ تعریف شده‌اند که در این پژوهش به محاسبه‌ی آنها خواهیم پرداخت.

انتظار سهم در پایان فاصله زمانی  $\Delta t$  برابر با  $Se^{r\Delta t}$  خواهد شد که در آن  $S$  قیمت سهم در آغاز دوره‌ی زمانی ( $\Delta t$ ) است. بنابراین می‌توان گفت که:

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd \quad (۱) \text{ رابطه}$$

انحراف معیار تغییر نسبی (درصد تغییر) قیمت سهم در یک دوره کوتاه مدت  $\Delta t$  برابر با  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  و واریانس تغییر نسبی قیمت هم برابر با  $\sigma^2 t$  خواهد بود. از آنجایی که واریانس متغیری مانند  $Q$  به صورت  $E(Q^2) - (E(Q))^2$  تعریف شده است که در آن  $E$  ارزش مورد انتظار است، بنابراین می‌توان گفت که:

رابطه (۲)

$$\sigma^2 t = p u^2 + (1-p) d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

رابطه‌های ۱ و ۲ دو شرط را بر متغیرهای  $u$ ،  $p$  و  $d$  تحمیل می‌کنند. شرط سومی که توسط کاکس، راس و رابینستین استفاده می‌شد عبارت است از:

$$u = \frac{1}{d} \quad (۳) \text{ رابطه}$$

اگر  $\Delta t$  کوچک باشد، سه شرط مزبور عبارتند از:

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad (۴) \text{ رابطه}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (۵) \text{ رابطه}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (۶) \text{ رابطه}$$

$$a = e^{r\Delta t} \quad (۷) \text{ رابطه}$$

جدول ۱: تعریف یونانی‌ها		
یونانی‌ها	موضوع ریسک	فرمول
دلتا (Delta)	تغییر در قیمت دارایی پایه	$\Delta = \frac{\text{تغییر در قیمت اختیار}}{\text{تغییر در قیمت دارایی پایه}}$
گاما (Gamma)	تغییر در دلتا	$\gamma = \frac{\text{تغییر در دلتا}}{\text{تغییر در قیمت دارایی پایه}}$
وگا (Vega)	تغییر در نوسان پذیری دارایی پایه	$v = \frac{\text{تغییر در قیمت اختیار}}{\text{تغییر در نوسان پذیری دارایی پایه}}$
تتا (Theta)	تغییر در مدت زمان باقی مانده تا سررسید	$\theta = \frac{\text{تغییر در قیمت اختیار}}{\text{مدت زمان باقی مانده تا سررسید}}$
رو (Rho)	تغییر در نرخ بهره	$\rho = \frac{\text{تغییر در قیمت اختیار}}{\text{تغییر در نرخ بهره}}$

### پیشینه پژوهش

جلوداری ممقانی و پیکر (۱۳۹۱) با استفاده از روش گیلز، موسوم به مونت کارلوی نوسانی، به محاسبه ارزش اختیار و حساسیت‌های آن پرداختند. از مزایای این روش، کاربرد همزمان روش وابسته به مسیر برای شبیه سازی مسیر و روش نسبت درست نمایی برای برآورد تابع عایدی است. ایشان در این مقاله تعمیمی از روش مونت کارلوی نوسانی موسوم به روش آلاگانگو<sup>۱</sup> را معرفی و محاسبات ارزش اختیار و حساسیت‌های آن را با این روش نیز انجام دادند. نتایج حاصله نشان می‌دهد که استفاده از روش آلاگانگو در صورت امکان، به نتایج بهتری می‌انجامد.

خضری پور قرایی و ستار دباغی (۱۳۹۱) یک روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی صریح برای حل معادله-ی غیرخطی بلک شولز ارائه دادند. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که برای موارد غیرخطی، یعنی ارزش گذاری اختیار معامله با وجود تغییر قیمت، روش عددی تفاضلات متناهی صریح، جواب عددی قابل قبولی را فراهم می‌آورد و لذا می‌توان نتیجه گرفت که در ارزش گذاری اختیار معاملات باید اثر بازارهای غیرنقدی در نظر گرفته شود، زیرا آنها منجر به افزایش قابل توجهی در ارزش اختیار معامله می‌شوند.

سلیمانی سروستانی و ابراهیمی (۱۳۹۱) روش درخت دوجمله‌ای برای قیمت گذاری اختیارات آسیایی در مدل پرش-انتشار را بررسی و هم ارزی آن با روش تفاضلی صریح را نشان دادند. در این مقاله، همگرایی روش درخت دوجمله‌ای برای اختیارات آسیایی با استفاده از تجزیه و تحلیل عددی و مفهوم راه حل ویسکوزیته به اثبات رسید.

شاکران (۱۳۹۱) روش عددی جدیدی برای ارزش-گذاری اختیارمعاملات آمریکایی نوشته شده (صادر شده بر) روی دارایی که پویایی آن از مدل تلاطم تصادفی هستون<sup>۲</sup> پیروی می‌کند معرفی نمود. در این مقاله سطح اجرای زودرس اختیار آمریکایی به کمک الگوریتم حداقل مربعات مونت- کارلو<sup>۳</sup> (LSM) محاسبه می‌شود. این روش ساده

چیزی به جز تکنیک مونت-کارلو به همراه یک رگرسیون خطی ساده نیاز ندارد. آزمون‌های عددی نشان دهنده‌ی صحت و دقت روش عددی جدید معرفی شده در این مقاله هستند. این روش الگوریتم LSM ارائه شده توسط لانگ استف و شوارتز<sup>۴</sup> [۱۴] را با کاهش زمان محاسباتی و تورش قیمت گذاری بهبود می‌بخشد.

هال و وایت<sup>۵</sup> (۱۹۹۳) نشان دادند که روش‌های دوجمله‌ای و سه جمله‌ای می‌توانند برای ارزش گذاری انواع مختلفی از اختیارات با بازده‌های وابسته به مسیر، توسعه یابند (اختیار معامله وابسته به مسیر قراردادی است که ارزش آن بستگی به مسیری دارد که متغیر پایه آن را طی می‌کند). آنها روشی از استفاده از درخت دوجمله‌ای CRR<sup>۶</sup> را برای ارزش گذاری اختیار معاملات وابسته به مسیر صادره بر سهام، ارز، شاخص سهام و قراردادهای آتی توسعه دادند که می‌تواند برای ارزش گذاری اوراق بهادار با پشتوانه تسهیلات رهنی نیز استفاده شود. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که روش معرفی شده برای ارزش گذاری اختیارات آسیایی دقیق تر از تکنیک‌های تخمین عددی معرفی شده برای تعیین ارزش اختیارات و نیز بسیار سریعتر از روش شبیه سازی مونت کارلو است. همچنین این روش می‌تواند برای ارزش گذاری اختیارمعاملات اروپایی و آمریکایی نیز استفاده شود [۱۳].

رابینستین<sup>۷</sup> (۲۰۰۰) در مقاله‌ای اظهار داشت که مدل دوجمله‌ای قیمت گذاری اختیارات یک ابزار آموزشی با ارزش برای تشریح اصول ارزش گذاری مشتقات و یک ابزار کاربردی مهم در عمل است. همچنین دیگر تکنیک‌های تخمین عددی مانند روش شبکه‌ای سه جمله‌ای یا متد فینیت دیفرنس<sup>۸</sup> در عمل به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند و اغلب به نظر می‌رسد که برای مشتقات پیچیده‌تر مناسب هستند. در این مقاله ایشان ارتباط بین مدل دو جمله‌ای و مدل صریح فینیت دیفرنس (که خود شامل مدل سه جمله‌ای است) را بررسی کردند و نشان دادند که در

قرارداد آتی شاخص S&P ۵۰۰ بخش قابل توجهی از ریسک‌های باقی‌مانده را توضیح دهد [۱۵].

برادی و جین<sup>۳</sup> (۲۰۰۸) در مقاله‌ای عنوان داشتند که نوسان‌پذیری متغیری کلیدی در مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات و مدیریت ریسک است و عدم قطعیت ناشی از نوسانات منجر به افزایش ابزارهای مشتقه وابسته به نوسانات شده است. برای قیمت‌گذاری قراردادهای مشتقه اعم از اختیار معامله و سوآپ، مدلی برای فرایند نوسان‌پذیری نیاز است. ایشان در این مقاله مدل کاملی برای قیمت‌گذاری و مدیریت ریسک این قرارداد را بر اساس مدل مجذور تلاطم تصادفی هستون<sup>۴</sup> که شامل حالت‌های مختلف یونانی‌های استاندارد و چند پارامتر جدید از فرایند نوسان‌پذیری است، توسعه دادند. به علاوه آنها در این مقاله روشی برای ایجاد پوشش بهینه‌ی واریانس و نوسان قرارداد با استفاده از یک مجموعه‌ی محدود از اختیارات ارائه نمودند [۱۶].

**پرسش‌ها، متغیرها و مفروضات پژوهش:** پس از مطالعه مبانی نظری و ادبیات موضوعی تحقیق، پرسش‌های ویژه تحقیق بدین شرح بیان می‌گردد:

**پرسش اول:** چگونه مدیران ریسک می‌توانند به کمک اختیارات، دارایی پایه (سهام) را در مقابل ریسک تغییرات قیمت پوشش دهند؟

**پرسش دوم:** تغییرات عوامل موثر در تعیین قیمت اختیار، بر قیمت اختیار معامله سهام شرکت‌های بورس چگونه و به چه میزان تاثیر می‌گذارد؟

مقادیر قیمت سهام، نوسان‌پذیری، نرخ بازده بدون ریسک، قیمت توافقی و مدت زمان قرارداد به عنوان متغیر مستقل وارد مدل شده تا مقادیر قیمت اختیار و پارامترهای پنج‌گانه حساسیت ریسک (یونانی‌ها) به عنوان متغیرهای وابسته‌ی پژوهش، از مدل استخراج و سپس تحلیل گردند. با توجه به سروکار داشتن با مدل، وجود مفروضاتی که موجب تسهیل در به کارگیری و درک مدل شود لازم به نظر می‌رسد که عبارتند از:

حقیقت مدل دوجمله‌ای می‌تواند به عنوان یک حالت خاص از مدل صریح فینیت دیفرنس در نظر گرفته شود [۱۷]. ریس و ویستاپ<sup>۱</sup> (۲۰۰۱) در مقاله‌ای عنوان داشتند که نظریه‌پردازان اغلب فرض می‌کنند که توابع بسیار مهم و مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله، ارزش تئوریکی اختیار را استخراج می‌کنند ولی برای مشارکت کنندگان بازار اغلب اینگونه نیست. به عقیده ایشان آنچه که مشارکت کنندگان بازار نیاز دارند مدلی است که می‌تواند پارامترهای یونانی را بدست دهد تا آنها بتوانند ریسک‌های مختلفی را که اختیارات در معرض آنها قرار دارند اندازه‌گیری و پوشش دهند. ایشان نشان دادند که روابط ریاضی متقابلی میان حساسیت اختیارات با پارامترهای مختلف وجود دارد که استفاده از این روابط نه تنها به ارزش‌های واقعی‌تر منجر می‌شوند، بلکه صرفه جویی زیادی در زمان و تلاش لازم برای تعیین قیمت اختیارات توسط روش‌های عددی قیمت‌گذاری می‌شود [۱۸].

ادرینگتون و گان<sup>۲</sup> (۲۰۰۷) در مقاله‌ای اظهار داشتند که در چارچوب اصلی مدل بلک شولز، تعدیل مداوم و پیوسته پوشش ریسک دلتای اختیار معامله در مقابل سهام پایه یک موقعیت کاملاً بدون ریسک ایجاد می‌کند اما در دنیای واقعی پوشش ریسک دلتا کماکان در معرض ریسک قرار دارد، زیرا تعدیل مجدد تنها می‌تواند در فواصل گسسته انجام شود، نوسان‌پذیری با تغییر زمان به طور تصادفی تغییر می‌کند و دارایی پایه از توزیع لگاریتم نرمال پیروی نمی‌کند. تعدیل مجدد مجزا پارامترهای گاما و وگا را نیز دچار تغییر می‌سازد. اگرچه دلتا، گاما و وگا از پارامترهای مدیریت ریسک اختیارات هستند ولی کماکان بخشی از ریسک بدون پوشش باقی می‌ماند. ایشان بررسی نمودند که فاکتورهای ریسک اختیار معامله اندازه‌گیری شده بوسیله‌ی مشتقات مرتبه‌ی دوم و سوم تابع قیمت-گذاری اختیار، می‌تواند این ریسک باقی‌مانده را پوشش دهند. نتیجه کار آنها نشان می‌دهد که این فاکتورهای ریسک حداقل می‌توانند برای اختیار معاملات صادر شده بر

صرفاً جنبه وصفی دارد، لذا داده‌ها در طول زمان گردآوری شده تا رابطه بین متغیرها در طول زمان سنجیده شود. برای گردآوری اطلاعات و داده‌های مربوط به مبنای نظری تحقیق از متون تخصصی فارسی و لاتین مرتبط با موضوع مورد مطالعه به ویژه کتاب مبنای مهندسی مالی و مدیریت ریسک (جان‌هال، ۱۳۸۸) استفاده می‌شود و برای گردآوری قیمت‌های پایانی سهام از بانک‌های اطلاعاتی شرکت‌های پذیرفته شده در بورس، آرشو آمار معاملات و گزارشات منتشر شده توسط اداره آمار و اطلاعات بورس اوراق بهادار تهران استفاده خواهد شد. تجزیه و تحلیل خروجی‌ها و نیز رسم و تحلیل نمودارهای مرتبط، به کمک نرم‌افزار محاسبه قیمت اختیار معامله یعنی نرم‌افزار DerivaGem و نیز برنامه Excel صورت می‌گیرد.

قیمت‌های تئوریک اختیار در پژوهش حاضر بر مبنای مطالعه‌ی اطلاعات قیمت سهام سال ۱۳۹۱ محاسبه می‌شود. جامعه آماری تحقیق را شرکت‌هایی تشکیل می‌دهند که براساس گزارش اداره آمار و اطلاعات بورس، اسامی آنها در فهرست ۵۰ شرکت فعال تر بورس اوراق بهادار تهران در سه ماهه سوم سال ۱۳۹۱ قرار گرفته باشد. نتایج پژوهش‌های قبلی نویسندگان این مقاله نشان داده است که نوسان زیاد قیمت دارایی باعث ارزشمندتر شدن اختیار معامله آن دارایی خواهد شد، زیرا نوسان بیشتر شانس افزایش قیمت دارایی را بالا خواهد برد و احتمال سود بیشتری را برای نگه دارنده‌ی اختیار معامله در پی خواهد داشت (نبوی و قاسمی، ۱۳۹۲، ۹۶). در نتیجه قیمت اختیار معامله به ازای افزایش درجه نوسان‌پذیری قیمت دارایی پایه، افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه در این پژوهش، نرخ بازده بدون ریسک معادل ۲۰٪ در نظر گرفته می‌شود، شرکت‌هایی که انحراف معیار بازده کسب شده توسط سهم آن‌ها (نوسان‌پذیری) در طول یک سال ۲۰٪ و بیشتر از ۲۰٪ محاسبه شده باشد به عنوان شرکت‌های نمونه آماری انتخاب می‌شوند. با توجه به محاسبات انجام شده، نوسان ۳۷ شرکت ۲۰٪ و یا بیشتر از ۲۰٪ می‌باشد که به عنوان شرکت‌های نمونه آماری می‌باشند. اسامی این شرکت‌ها به همراه قیمت اختیار خرید و قیمت اختیار فروش در جدول ۲ آمده است.

الف) S: آخرین قیمت پایانی روزانه‌ی سهام در قلمرو زمانی مطالعه، یعنی آخرین قیمت اسفند ۱۳۹۱ معادل S. در نظر گرفته می‌شود.

ب) K: استراتژی قیمت‌گذاری اولیه اختیار معامله‌ی سهام در این پژوهش به صورت ATM<sup>۱</sup> است و قیمت اعمال یا توافقی (K) برابر با قیمت دارایی پایه یا S. در نظر گرفته می‌شود.

ج) I: نرخ بهره بدون ریسک ۲۰٪ فرض می‌شود، یعنی سرمایه‌گذار در طی دوره قرارداد اختیار فروش، می‌تواند ۲۰٪ بازده را بدون تقبل ریسک بدست آورد. در اختیار فروش تبعی عرضه شده در بورس اوراق بهادار تهران نیز نرخ ۲۰٪ به عنوان حداقل بازده مورد انتظار در نظر گرفته می‌شود.

د) مدت قرارداد: برای قیمت‌گذاری اختیار معامله سهام فرض می‌شود که اختیار به صورت ۶ ماهه بر روی سهام صادر می‌شود. طول عمر اختیار به شش فاصله‌ی زمانی، به طول هر فاصله یک ماه، تقسیم می‌شود. نوع اختیار نیز اروپایی در نظر گرفته می‌شود که فقط در تاریخ سررسید قابل اعمال است.

### روش شناسی پژوهش: انتخاب روش تحقیق بستگی

به هدف و ماهیت و امکانات اجرایی آن دارد. تحقیق حاضر با توجه به ماهیت آن، از دیدگاه هدف در قالب تحقیقات کاربردی قرار می‌گیرد و انتظار می‌رود که نتیجه‌ی تحقیق به توسعه دانش کاربردی در یک زمینه خاص منجر شود. از دیدگاه روش تحقیق، با توجه به ماهیت موضوع تحقیق و از آن جایی که تحقیق حاضر قصد آزمون فرض را نداشته و تنها به بررسی آن چه که هست پرداخته و به توصیف عینی یک موضوع می‌پردازد. روش مورد استفاده توصیفی خواهد بود. در این تحقیق، پژوهشگر سعی دارد تا آن چه را که هست، بدون دخالت یا استنتاج ذهنی گزارش دهد و نتایج عینی از واقعیت بگیرد و الزاماً در پی کشف و توضیح روابط، همبستگی‌ها و آزمون فرض‌ها و پیش بینی رویدادها نیست، بلکه توجه وی بیشتر در جهت بررسی و توصیف موقعیت‌ها براساس اطلاعاتی است که

## یافته‌های پژوهش

۲ آمده است. تحلیل خروجی‌ها بین شرکت‌ها مشترک است و فقط مقدار عددی خروجی برای شرکت‌ها متفاوت است. در ادامه خروجی‌های مربوط به یک شرکت تحلیل می‌شود.

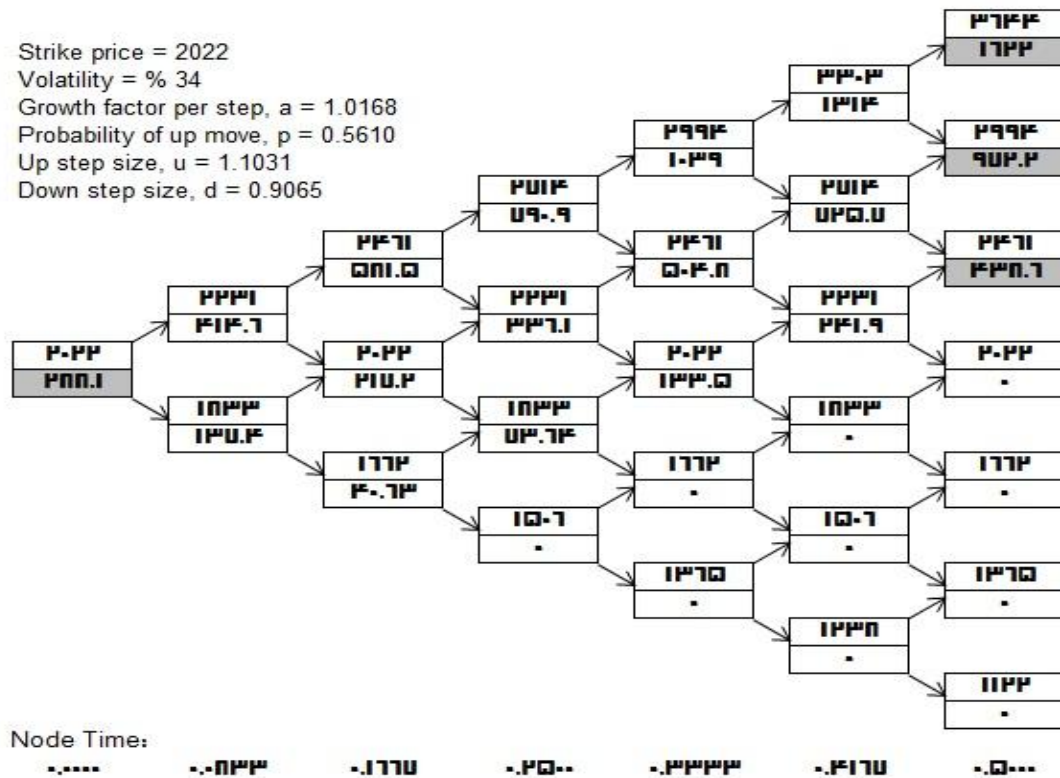
قیمت سهام ( $S_t$ )، میزان نوسان به درصد ( $\sigma$ )، قیمت اختیار خرید ( $V_C$ ) و قیمت اختیار فروش ( $V_P$ ) که بر اساس مدل درخت دوجمله‌ای محاسبه شده‌اند، در جدول

جدول ۲: قیمت سهام ( $S_t$ )، نوسان ( $\sigma$ )، قیمت اختیار خرید ( $V_C$ ) و قیمت اختیار فروش ( $V_P$ ) ۳۷ شرکت نمونه آماری											
	$V_P$	$V_C$		$S_t$	نماد		$V_P$	$V_C$		$S_t$	نماد
۱	۳۴۲/۱۵	۹۱۵/۹۸	۳۸	۶۰۳۰	فاسمین	۲۰	۹۵/۶۴	۲۸۸/۱۰	۳۴	۲۰۲۲	وساخت
۲	۲۳۹/۶۳	۶۹۸/۹۸	۳۵	۴۸۲۷	سدور	۲۱	۲۰/۴۸	۵۴/۸۳	۳۸	۳۶۱	وملت
۳	۱۴۰۳/۴۴	۳۴۱۷/۴۶	۴۲	۲۱۱۶۴	کسرا	۲۲	۱۰۵/۳۱	۲۸۹/۶۴	۳۷	۱۹۳۷	بترانس
۴	۳۹۰/۵۲	۱۰۱۹/۰۷	۳۹	۶۶۰۵	کفرا	۲۳	۶۱/۳۶	۱۴۶/۳۴	۴۳	۸۹۳	ویپترو
۵	۲۵۴/۹۷	۶۲۰/۸۷	۴۲	۳۸۴۵	وغدیر	۲۴	۴۳/۳۳	۱۵۸/۶۷	۲۹	۱۲۱۲	سفارس
۶	۱۲۱/۲۲	۲۲۱/۵۲	۶۲	۱۰۵۴	پردیس	۲۵	۱۲۰/۹۹	۲۸۲/۸۶	۴۴	۱۷۰۱	وبهمن
۷	۱۵/۱۳	۷۳/۴۷	۲۴	۶۱۳	خپارس	۲۶	۱۴۰/۱۹	۴۳۶/۹۱	۳۳	۳۱۱۸	کچینی
۸	۲۰۳/۳۳	۶۱۲/۴۳	۳۴	۴۲۹۹	فولاد	۲۷	۹۳۶/۲۱	۱۲۲۵/۸۸	۱۴۳	۳۰۴۴	غادر
۹	۸۳/۷۵	۱۷۹/۴۸	۴۹	۱۰۰۶	خساپا	۲۸	۱۲۰/۷۳	۲۵۴/۸۱	۵۰	۱۴۰۹	وسپه
۱۰	۱۶۷/۵۳	۵۲۲/۱۰	۳۳	۳۷۲۶	کساوه	۲۹	۶۶/۹۲	۱۷۰/۴۶	۴۰	۱۰۸۸	وصنعت
۱۱	۲۴۹/۴۸	۴۹۸/۲۳	۵۴	۲۶۱۴	کپشیر	۳۰	۲۲۳/۶۷	۵۴۴/۶۵	۴۲	۳۳۷۳	حفاری
۱۲	۱۷/۳۹	۵۶/۲۲	۳۲	۴۰۸	خاذین	۳۱	۲۵/۵۶	۷۴/۵۷	۳۵	۵۱۵	ولغدر
۱۳	۱۸۶/۰۷	۴۲۶/۸۳	۴۵	۲۵۳۰	رتکو	۳۲	۱۲۳/۲۹	۲۷۷/۷۴	۴۶	۱۶۲۳	وبشهر
۱۴	۶۰/۲۰	۱۴۹/۸۴	۴۱	۹۴۲	خودرو	۳۳	۱۸۴/۴۲	۴۶۹/۷۱	۴۰	۲۹۹۸	فادر
۱۵	۶۱/۳۹	۲۷۸/۹۳	۲۵	۲۲۸۶	اخبر	۳۴	۵۶/۱۱	۱۵۰/۲۳	۳۸	۹۸۹	کهرام
۱۶	۱۶۲/۳۹	۴۱۳/۶۲	۴۰	۲۶۴۰	کسعدی	۳۵	۴۹۹/۵۲	۱۴۵۷/۰۵	۳۵	۱۰۰۶۲	پاسا
۱۷	۲۵/۲۳	۱۳۱/۶۲	۲۳	۱۱۱۸	ثاباد	۳۶	۶۰/۵۴	۱۶۲/۰۸	۳۸	۱۰۶۷	فباهنر
۱۸	۴۹/۷۶	۱۴۰/۸۳	۳۶	۹۵۷	ولساپا	۳۷	۷۶/۵۲	۲۸۰/۱۷	۲۹	۲۱۴۰	وتوشه
۱۹							۷۲/۷۴	۲۰۰/۰۷	۳۷	۱۳۳۸	ثمسکن

تا سررسید قرارداد) بر ۱۲ (تعداد ماه‌های سال) بدست می‌آید. مقدار « $p = ۰.۵۶۱۰$ » احتمال افزایش قیمت سهام، ( $u = ۱.۱۰۳۱$  Up step size) میزان افزایش قیمت سهام در هر گام و ( $d = ۰.$  Down step size) میزان کاهش قیمت سهام در هر گام است. فاکتور رشد نیز با ( $a = ۱.۰۱۶۸$  Growth factor per step) نشان داده شده است. این مقادیر توسط نرم افزار و با توجه به رابطه‌های بخش ۲-۲ محاسبه شده اند. ( $\text{Volatility} =$ ) ۳۴٪ میزان نوسان پذیری را نشان می‌دهد.

نمودار درخت دوجمله‌ای اختیار خرید شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران: نمودار زیر مربوط به شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران با نماد وساخت است و فرایند حرکت قیمت سهام و به تبع آن فرایند تغییرات قیمت اختیار خرید را نشان می‌دهد. در هر خانه نمودار، اعداد بالایی قیمت سهام و اعداد پایینی قیمت اختیار خرید را نشان می‌دهد. اعداد زیر هر نمودار (Time Node) زمان باقی مانده تا سررسید (تقسیم T بر ۱۲) را نشان می‌دهد. برای مثال عدد ۰/۲۵ از تقسیم ۳ (زمان باقی مانده





شکل ۲: نمودار درخت دوجمله‌ای اختیار خرید شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران

کاهش یافته و به صفر می‌رسد؛ یعنی قرارداد اعمال نمی‌شود. مطابق خانه اول شکل ۲، قیمت اولیه سهم ۲۰۲۲ ریال و قیمت هر برگ قرارداد اختیار خرید این شرکت معادل «۲۸۸/۱» ریال است و سرمایه‌گذاری که انتظار افزایش قیمت سهم مزبور را در آینده دارد، جهت پوشش ریسک باید برای هر برگ قرارداد پوششی اختیار خرید این مبلغ را بپردازد. خریدار برگه‌ی اختیار خرید انتظار افزایش قیمت سهم در آینده را دارد، لذا در صورتی قرارداد را اعمال می‌نماید که قیمت سهم در آینده بیشتر از قیمت مورد توافق «۲۰۲۲» ریال باشد. در خانه‌های گوشه‌ی پایینی نمودار که ارزش اختیار خرید صفر است قرارداد اعمال نمی‌شود. در زمان سررسید در صورت پیش بینی درست دارنده برگه اختیار خرید یعنی در صورتی که در زمان سررسید قرارداد، قیمت سهم فقط روند افزایشی را طی نماید، در این صورت دارنده برگه اختیار خرید قرارداد را اعمال می‌نماید و بر اساس قرارداد اختیار خرید، سهامی

سرمایه‌گذاری که برای پوشش ریسک، برگه اختیار خرید سهامی را می‌خرد انتظار افزایش قیمت سهم مزبور را در آینده دارد. مطابق نمودار، قیمت اولیه سهم نماد وساخت ۲۰۲۲ ریال (خانه اول) است. در هر مرحله زمانی ممکن است قیمت افزایش یابد، ثابت بماند یا کاهش یابد. برای نمونه، در مرحله اول، احتمال وجود دو قیمت سهم یعنی در صورت افزایش، قیمت «۲۲۳۱» و در صورت کاهش، قیمت «۱۸۳۳» و در مرحله بعد از آن، سه قیمت محتمل الوقوع یعنی «۲۴۶۱»، «۲۰۲۲» و «۱۶۶۲» ریال وجود دارد. درخت قیمت در این حالت ترکیب مجدد می‌گردد یعنی قیمتی که پس از یک افزایش و کاهش حاصل می‌شود، همان قیمتی را به‌دست می‌دهد که پس از یک کاهش و افزایش اتفاق می‌افتد. نمودار درخت دوجمله‌ای برای اختیار خرید نشان می‌دهد که با افزایش قیمت سهم، قیمت اختیار خرید نیز افزایش می‌یابد. با کاهش قیمت سهم نیز قیمت قرارداد اختیار خرید

قیمت اختیار خرید (۲۸۸ ریال) است، لذا به جای \* می-توان مقدار (۲۸۸) را قرار داد.

**نمودار درخت دوجمله‌ای اختیار فروش شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران:** شکل ۳ مربوط به شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران با نماد وساخت است و فرایند حرکت قیمت سهام و به تبع آن فرایند تغییرات قیمت اختیار فروش را نشان می‌دهد. در هر خانه نمودار، اعداد بالایی قیمت سهام و اعداد پایینی قیمت اختیار فروش را نشان می‌دهد. قیمت هر برگ قرارداد اختیار فروش سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران ۹۶ ریال (۹۵/۶۴ ریال) است؛ یعنی سرمایه‌گذاری که انتظار کاهش قیمت سهام این شرکت را در آینده دارد، جهت پوشش ریسک باید برای هر برگ قرارداد اختیار فروش ۹۶ ریال بپردازد. قیمت اولیه سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران ۲۰۲۲ ریال (خانه اول) است. نمودار درخت دوجمله‌ای برای اختیار فروش نشان می‌دهد که با افزایش قیمت سهام، قیمت اختیار فروش کاهش می‌یابد. با افزایش ادامه‌دار قیمت سهام، قیمت قرارداد اختیار فروش کاهش یافته و به صفر می‌رسد (خانه‌های گوشه‌ی بالایی سمت راست)؛ یعنی قرارداد اعمال نمی‌شود. در صورت پیش‌بینی درست دارنده برگه اختیارفروش یعنی در صورتی که در طول دوره ۶ ماهه قرارداد، قیمت سهام فقط روند کاهشی را طی نماید و به مقدار «۱۱۲۲» ریال برسد، در این صورت دارنده برگه اختیارفروش قرارداد را اعمال می‌کند و بر اساس قرارداد اختیار فروش، سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران را که در پایان ماه ششم قیمت آن در بازار «۱۱۲۲» ریال است، به قیمت اعمال یا توافقی «۲۰۲۲» ریال به فروش می‌رساند. هرچه پیش-بینی کاهش قیمت از سوی سرمایه‌گذار کمتر تحقق یابد سود کمتری نصیب وی خواهد شد. سود (زیان) خریدار اختیار فروش از تفاوت بین قیمت توافقی با مجموع قیمت سهام در زمان سررسید و قیمت اختیار فروش قابل محاسبه است.

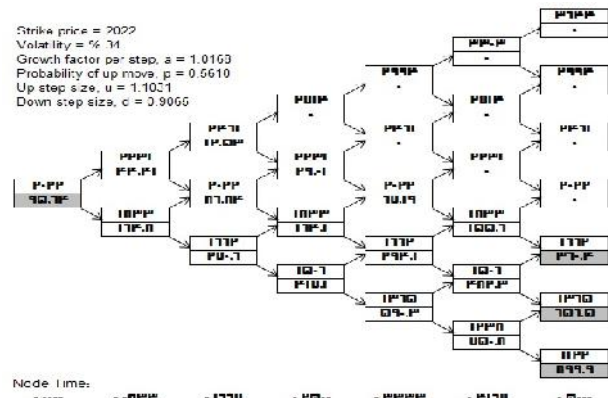
را که در پایان ماه ششم قیمت آن «۳۶۴۴» ریال است را به قیمت اعمال یا توافقی «۲۰۲۲» ریال خریداری می-نماید. هرچه پیش بینی افزایش قیمت خریدار برگه کمتر تحقق یابد، سود کمتری نصیب وی خواهد شد. در صورت عدم تحقق پیش بینی افزایش قیمت، یعنی در صورت کاهش متوالی قیمت سهام، دارنده برگه اختیار خرید قرارداد را اعمال نخواهد کرد؛ زیرا دلیلی وجود ندارد سهامی که در بازار قیمت آن کمتر از «۲۰۲۲» ریال است، به قیمت اعمال قرارداد خریداری شود. در واقع در این حالت ارزش برگه اختیار خرید به صفر می‌رسد و سرمایه-گذار حداکثر به میزان قیمت خرید برگه اختیار خرید یعنی «۲۸۸/۱» ریال برای هر برگه قرارداد، متحمل زیان می‌شود. سود (زیان) خریدار اختیار خرید، اختلاف بین قیمت سهام در زمان سررسید با مجموع قیمت اعمال و قیمت اختیار خرید در زمان صفر است. عایدی خرید اختیار خرید سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران به ازای قیمت‌های محتمل سهام در زمان سررسید، در جدول ۳ محاسبه شده است.

جدول ۳: محاسبات سود (زیان) اختیار خرید سهام با احتمال افزایش و کاهش قیمت سهام  
قیمت اختیار خرید سهام: ۲۸۸ ریال  
قیمت اعمال: ۲۰۲۲ ریال

ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
قیمت سهام در سررسید	۳۶۴۳	۲۹۹۴	۲۴۶۱	۲۰۲۲	۱۶۶۲	۱۳۶۵	۱۱۲۲
سود (زیان) هر برگه	۱۳۲۳	۶۸۴	۱۵۱	(۲۸۸)	*	*	*

در خانه‌های ۵، ۶ و ۷ که مقادیر قیمت سهام در خانه‌های پایینی گوشه‌ی سمت راست نمودار و در حالت کاهش قیمت سهام آمده است، زیان اختیار خرید با \* نشان داده شده است. یعنی در صورت اعمال قرارداد، زیان دارنده‌ی اختیار خرید بیشتر از مبلغ پرداختی برای آن (۲۸۸ ریال) خواهد بود، لذا قرارداد اعمال نمی‌شود زیرا در صورتی که قرارداد اعمال شود میزان زیان از ۲۸۸ ریال بیشتر می‌شود. در این صورت زیان، حداکثر به میزان

**تحلیل مقادیر یونانی‌ها برای اختیار خرید و اختیار فروش نماد و ساخت:** در این قسمت مقادیر پارامترهای پنج‌گانه سنجش حساسیت ریسک یا یونانی‌ها برای شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران به همراه نمودارهای مربوط تحلیل خواهد شد. این تحلیل برای سایر شرکت‌ها یکسان است و فقط مقادیر خروجی‌ها متفاوت است. جدول ۵ مقادیر یونانی‌ها را برای اختیار خرید و اختیار فروش این شرکت نشان می‌دهد. در ادامه مقادیر یونانی‌ها به همراه نمودارهای مربوط برای نماد و ساخت تحلیل خواهد شد.



شکل ۳: نمودار درخت دوجمله‌ای اختیار فروش شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران

عایدی اختیار فروش سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران به ازای قیمت‌های محتمل سهام در زمان سررسید، در جدول ۴ محاسبه شده است.

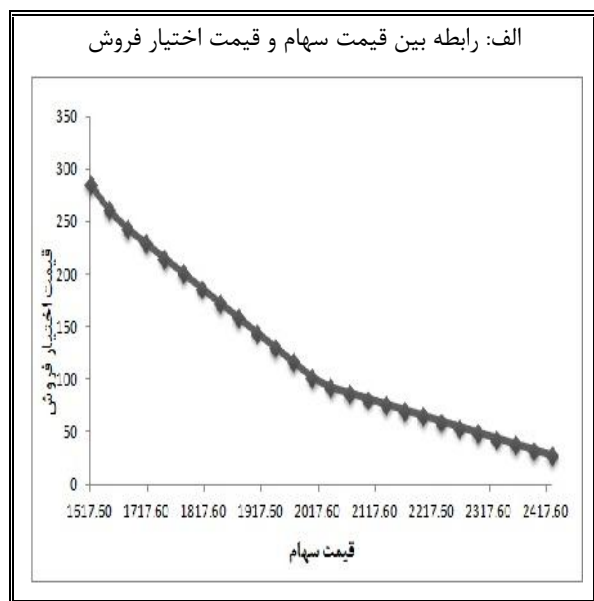
جدول ۵: مقادیر یونانی‌ها برای اختیار خرید و اختیار فروش		
پارامتر	اختیار خرید	اختیار فروش
دلتا (Delta)	۰.۶۹۷۲۸۳۴۳	- ۰.۳۰۲۷۱۶۶
گاما (Gamma)	۰.۰۰۰۸۵۲۲۹	۰.۰۰۰۸۵۲۲۹
وگا (Vega)	۴.۷۴۴۹۴۹۴۹	۴.۷۴۴۹۴۹۴۹
تتا (Theta)	- ۱.۱۶۳۹۹۰۸	- ۰.۱۴۴۵۸۴۸
رو (Rho)	۵.۶۳۰۹۶۷۴۱	- ۳.۴۹۴۱۰۷۲

جدول ۴: محاسبات سود (زیان) اختیار فروش سهام با احتمال افزایش و کاهش قیمت سهام قیمت اعمال: ۲۰۲۲ ریال قیمت اختیار فروش سهام: ۹۶ ریال							
ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
قیمت سهام در سررسید	۳۶۴۳	۲۹۹۴	۲۴۶۱	۲۰۲۲	۱۶۶۲	۱۳۶۵	۱۱۲۲
سود (زیان) هر برگه	*	*	*	(۹۶)	۲۶۵	۵۶۱	۸۰۴

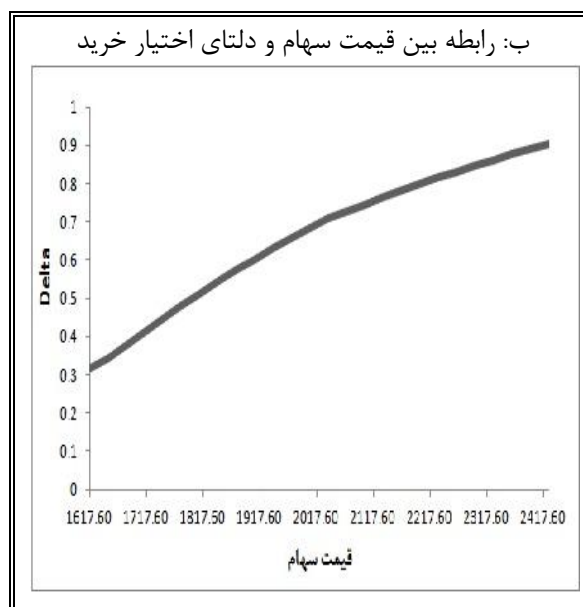
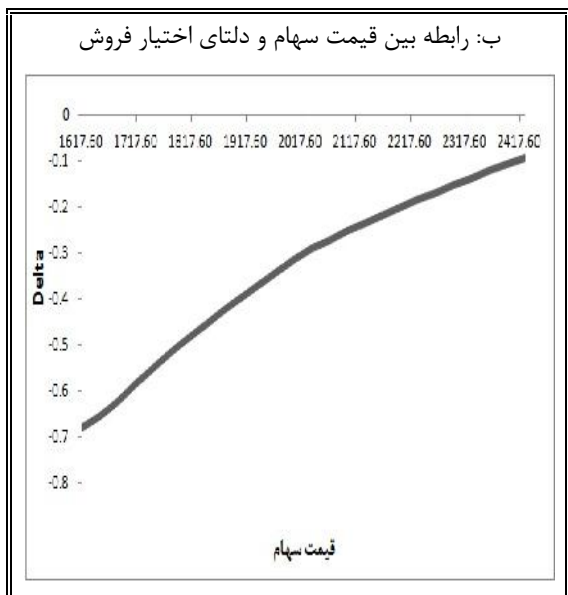
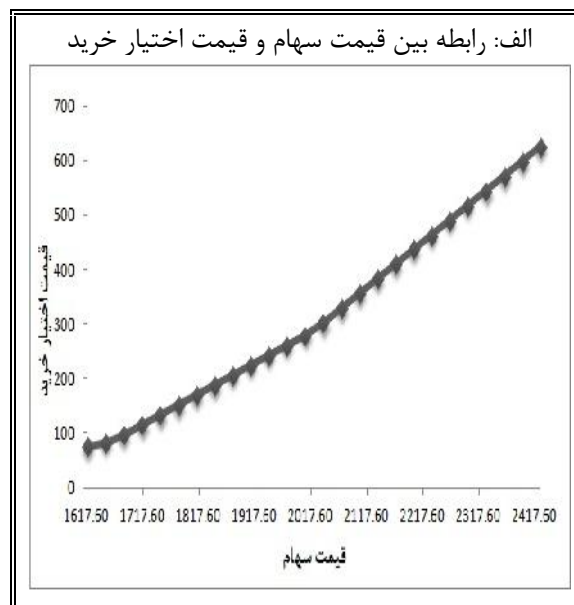
**تحلیل دلتای اختیار خرید و فروش:** دلتای یک اختیار معامله عبارت است از نسبت تغییرات قیمت اختیار معامله سهام، به تغییر قیمت سهام پایه آن. در واقع دلتا شیب منحنی در نقطه تلاقی قیمت اختیار معامله با قیمت سهام است. دلتای اختیار خرید مثبت است (۰.۶۹۷۲۸۳۴۳) و این به معنی رابطه مستقیم بین قیمت اختیار خرید با قیمت سهام است. این رابطه در قسمت «الف» شکل ۴ نشان داده شده است. مقدار دلتا، شیب نقطه تلاقی قیمت سهام ۲۰۲۲ ریالی و قیمت اختیار خرید ۲۸۸ ریالی است. با افزایش قیمت سهام، مقدار دلتای اختیار خرید افزایش می‌یابد. این رابطه در قسمت «ب» شکل ۴ نشان داده شده است. به ازای قیمت سهام ۲۰۲۲ ریال، دلتای اختیار خرید سهام بر مقدار ۰/۶۹ واقع می‌شود. وقتی که می-

در خانه‌های ۱، ۲ و ۳ که مقادیر قیمت سهام در خانه‌های بالایی گوشه‌ی سمت راست نمودار و در حالت افزایش قیمت سهام آمده است، زیان اختیار فروش با \* نشان داده شده است. یعنی در صورت اعمال قرارداد، زیان دارنده‌ی اختیار فروش بیشتر از مبلغ پرداختی برای آن (۹۶ ریال) خواهد بود، لذا قرارداد اعمال نمی‌شود. در صورتی که قرارداد اعمال شود میزان زیان از ۹۶ ریال بیشتر می‌شود. در این صورت زیان، حداکثر به میزان قیمت اختیار فروش (۹۶ ریال) است، لذا به جای \* می‌توان مقدار (۹۶) را قرار داد.

۲۰۲۲ ریالی و قیمت اختیار فروش ۹۶ ریالی است. با افزایش قیمت سهام، مقدار دلتای اختیار فروش کاهش می‌یابد. این رابطه در قسمت «ب» شکل ۵ نشان داده شده است. علامت منفی فقط جهت رابطه را نشان می‌دهد. به ازای قیمت سهام ۲۰۲۲ ریال، دلتای اختیار فروش سهام بر مقدار  $0/30$  - واقع می‌شود.



گوییم دلتای یک اختیار خرید صادره بر روی سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران  $0/69$  است، یعنی زمانی که قیمت سهام یک درصد تغییر می‌کند، قیمت اختیار خرید،  $0/69$  درصد تغییر می‌کند.

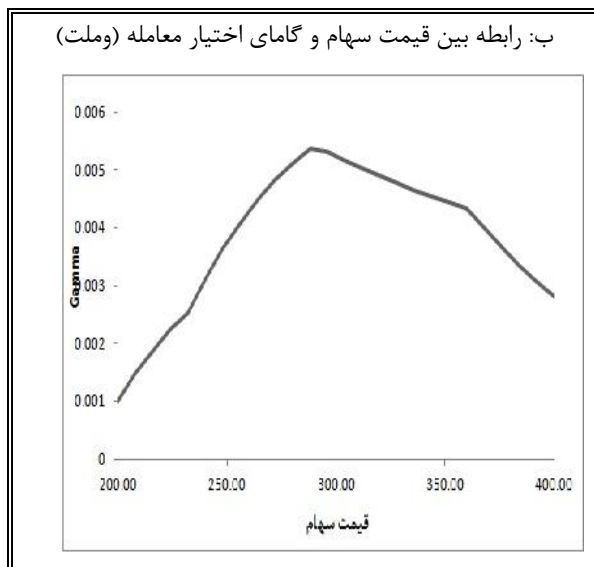
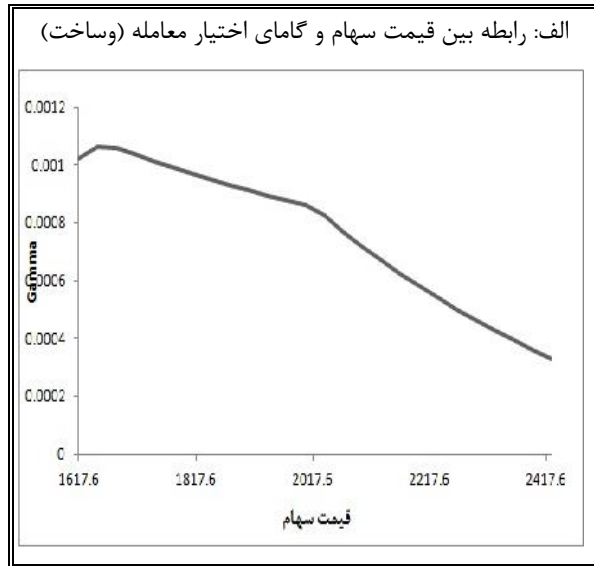


شکل ۴: نمودارهای مربوط به دلتای اختیار خرید

شکل ۵: نمودارهای مربوط به دلتای اختیار فروش  
وقتی که می‌گوییم دلتای یک اختیار فروش صادره بر روی سهام شرکت سرمایه‌گذاری ساختمان ایران  $0/30$  -

دلتای اختیار فروش منفی است ( $0.3027166$  -) و این به معنی رابطه معکوس بین قیمت اختیار فروش با قیمت سهام است. این رابطه در قسمت «الف» شکل ۵ نشان داده شده است. مقدار دلتا، شیب نقطه تلاقی قیمت سهام

دلته، تعداد دفعات نسبتاً کمتری برای تغییر در ترکیب پرتفوی، تعدیل در پرتفوی و انجام پوشش ریسک لازم است.



شکل ۶: نمودارهای مربوط به گامای اختیار معامله

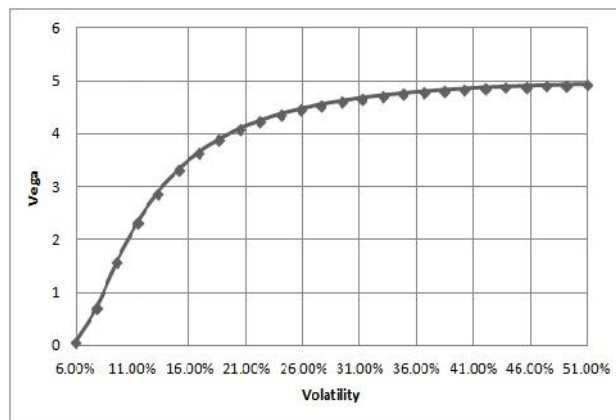
تحلیل وگای اختیار معامله: وگای یک پرتفوی متشکل از اختیارمعاملات صادره بر سهام، نسبت تغییر ارزش آن پرتفوی را به میزان نوسان‌پذیری سهام اندازه‌گیری می‌کند. سرمایه‌گذار با آگاهی از مقدار پارامتر سنجش حساسیت ریسک وگای، از میزان تغییر در ارزش پرتفوی

است، یعنی زمانی که قیمت سهام یک درصد تغییر می‌کند، قیمت اختیار فروش، ۰/۳۰- درصد تغییر می‌کند.

تحلیل گامای اختیار معامله: اکثر معامله‌گران از برنامه‌ها و طرح‌های پوشش ریسک پیچیده‌ای استفاده می‌کنند. استفاده از این طرح‌ها مستلزم محاسبه و اندازه‌گیری مقادیر دلته، گاما و وگا می‌باشد. هدف از پوشش ریسک دلته آن است که تا جایی که امکان دارد ارزش موضع معاملاتی مؤسسه مالی را تقریباً بدون تغییر نگه داریم. گامای یک پرتفوی متشکل از اختیار معاملات صادره بر دارایی پایه عبارت است از نسبت تغییر دلتای پرتفوی با توجه به قیمت دارایی پایه. پوشش ریسک دلته شامل ایجاد موضع معاملاتی بی تفاوت نسبت به دلته است. هنگامی که یک موضع معاملاتی اختیار معامله به صورت بی تفاوت نسبت به دلته اتخاذ شد، گام دوم بررسی گاماست. در واقع گاما مقدار تحذب منحنی رابطه بین قیمت اختیار معامله و قیمت دارایی پایه (سهام) را اندازه می‌گیرد. تحذب نشان‌دهنده خمیدگی است. هرچه گاما کمتر باشد، تحذب کمتر است و با افزایش گاما، تحذب بیشتر می‌شود. مقدار گامای اختیار معامله سهام نماد وساخت به میزان (۰.۰۰۰۸۵۲۲۹) محاسبه شده است. برای مقایسه‌ی بهتر میزان تحذب، نمودار گامای شرکت سرمایه‌گذاری ملت با نماد وملت که میزان گامای آن در این پژوهش (۰.۰۰۴۳۰۹۹) محاسبه شده است نیز رسم می‌شود. در قسمت «الف» شکل ۶، به ازای قیمت سهام ۲۰۲۲ ریال برای نماد وساخت، گامای اختیار معامله بر مقدار ۰/۰۰۰۸۵ واقع می‌شود و در قسمت «ب» برای نماد وملت، به ازای قیمت سهام ۳۶۱ ریال (جدول ۲) مقدار گاما بر مقدار ۰/۰۰۴۳ واقع می‌شود. میزان گامای اختیار معامله نماد وملت بیشتر است و در نتیجه میزان تحذب یا خمیدگی نمودار آن بیشتر است. هر چه گاما کوچکتر باشد مفهومش این است که دلته به تدریج تغییر می‌کند و برای ایجاد و نگهداری یک پرتفوی بی تفاوت نسبت به

کاهش زمان باقی‌مانده تا سررسید (T) با فرض ثابت ماندن بقیه عوامل، از ارزش اختیار معامله کاسته می‌شود.

خود که متشکل از سهام و اختیار فروش سهام است در ازای نوسانات قیمت سهام مطلع خواهد شد. با افزایش نوسان سهام، قیمت اختیار معامله افزایش می‌یابد و بسته به اینکه اختیار معامله سهام چه نسبتی از پرتفوی سرمایه‌گذار را تشکیل می‌دهد، موجب تغییر ارزش پرتفوی خواهد شد و نیز بسته به اینکه این نوسانات چه تأثیری بر روی قیمت خود سهام می‌گذارد، تغییر در ارزش پرتفوی قابل محاسبه خواهد بود. همان‌طور که در شکل ۷ مشخص است، به ازای نوسان ۳۴٪ برای سهام نماد وساخت، مقدار وگای اختیار معامله بر مقدار ۴/۷۴ واقع می‌شود.

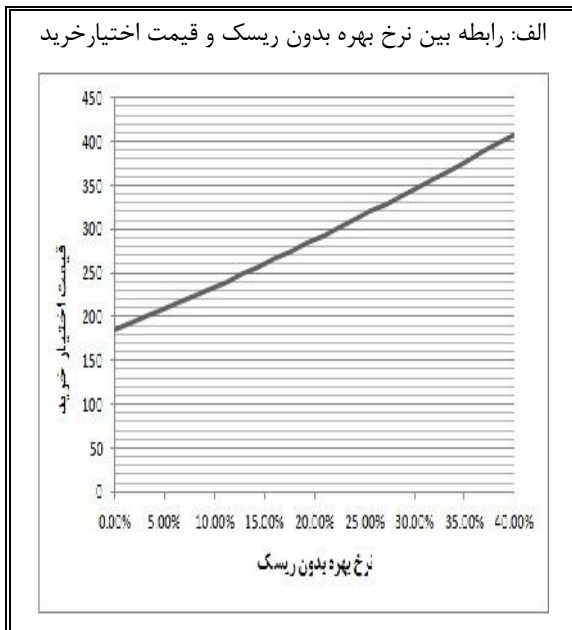
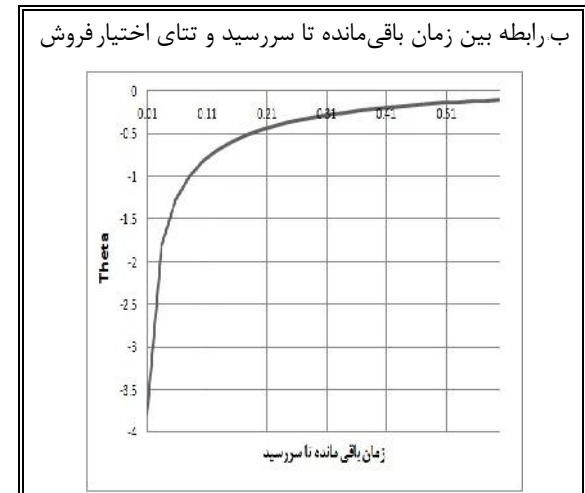
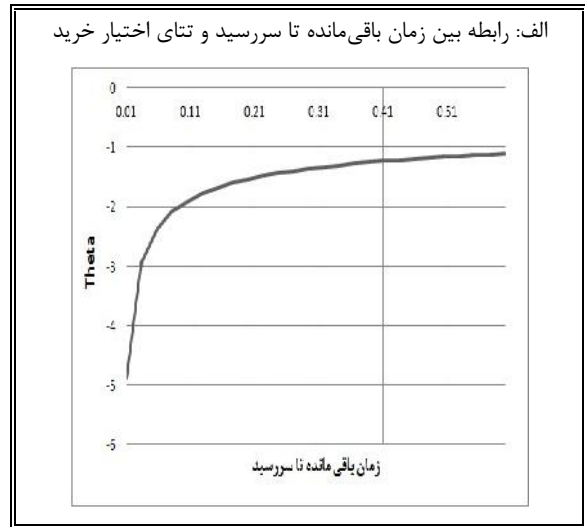


شکل ۷: نمودار وگای اختیار معامله

با افزایش نوسان، وگای اختیار معامله افزایش می‌یابد. با توجه به افزایش قیمت اختیار معامله در اثر افزایش میزان نوسان، پارامتر وگا سرمایه‌گذار را متوجه میزان تغییر در ارزش پرتفوی متشکل از سهام و اختیار معامله سهام می‌سازد. هرچه میزان وگا بیشتر باشد، سرمایه‌گذار تغییر بیشتری در ارزش پرتفوی خود انتظار خواهد داشت.

**تحلیل تنای اختیار خرید و فروش:** تتا عبارت است از نسبت تغییر ارزش پرتفوی با توجه به گذشت زمان، در صورتی که سایر عوامل ثابت بماند. معمولاً مقدار تتا برای اختیار معامله منفی است. علت این موضوع آن است که با

تحلیل روو (Rho) اختیار خرید و فروش: هرچه نرخ بهره بالاتر باشد، ارزش اختیار خرید بالاتر خواهد بود. قسمت «الف» شکل ۹، رابطه مستقیم میان تغییر نرخ بهره بدون ریسک و قیمت اختیار خرید را نشان می‌دهد. به ازای نرخ بهره بدون ریسک ۲۰٪ (از مفروضات پژوهش)، قیمت اختیار خرید بر مقدار ۲۸۸ ریال واقع می‌شود. پارامتر روو اختیار خرید، رابطه‌ی مستقیم قسمت «الف» را می‌سازد. همان‌گونه که در قسمت «ب» نمایان است، با افزایش نرخ بهره بدون ریسک، مقدار پارامتر روو اختیار خرید افزایش می‌یابد. در این شکل مقادیر دور نمودار، نرخ بهره بدون ریسک و مقادیر داخل نمودار، روو اختیار خرید را نشان می‌دهد. به کمک این شکل می‌توان میزان حساسیت پارامتر روو اختیار خرید و در نتیجه حساسیت قیمت اختیار خرید به تغییرات جزئی در نرخ بهره بدون ریسک را مشاهده نمود. همان‌گونه که در قسمت «ب» مشخص است، با افزایش نرخ بهره بدون ریسک و رسیدن به مقدار ۲۰٪، مقدار روو اختیار خرید بین مقادیر راداری ۵ و ۶ قرار می‌گیرد.



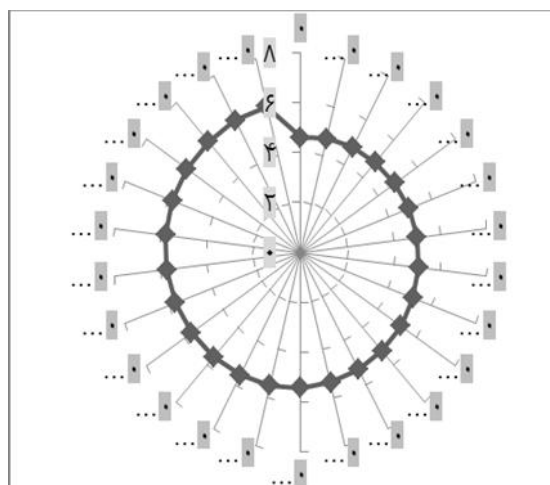
شکل ۸: نمودارهای مربوط به تنای اختیار خرید و فروش

تتا یک نوع پارامتر پوشش ریسک مشابه دلتا نیست. در مورد قیمت آتی سهام عدم قطعیت وجود دارد، لیکن در مورد زمان گذشته عدم اطمینان وجود ندارد. منطقی است که تغییرات قیمت سهام را پوشش دهیم ولی نمی‌توان تأثیر گذشت زمان را پوشش داد. با وجود این، اکثر معامله‌گران تتا را به عنوان آماره توصیفی مناسب برای یک پرتفوی در نظر می‌گیرند؛ زیرا در یک پرتفوی، تتا تقریبی برای گاما است. همان‌گونه که در شکل ۸ مشخص است، به ازای در مدت زمان ۶ ماه باقی‌مانده تا سررسید (۰/۵ سال)، تنای اختیار خرید بر ۱/۱۶ - و تنای اختیار فروش بر ۰/۱۶ - واقع می‌شود. در واقع می‌توان حساسیت قیمت اختیارات را نسبت به کاهش مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیار به دست آورد. کاهش زمان باقی‌مانده تا سررسید، ارزش اختیار معامله را کاهش می‌دهد.



اختیار فروش کاهش می‌یابد. در این شکل مقادیر دور نمودار، نرخ بهره بدون ریسک و مقادیر داخل نمودار روو اختیار فروش را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در قسمت «ب» مشخص است، با افزایش نرخ بهره بدون ریسک و رسیدن به مقدار ۲۰٪، مقدار روو اختیار فروش بین مقادیر راداری ۳- و ۴- (۳/۴۹)، مقدار Rho اختیار فروش نماد وساخت در جدول ۵) قرار می‌گیرد. به کمک نمودار قسمت «ب» می‌توان میزان حساسیت پارامتر روو اختیار فروش و در نتیجه حساسیت قیمت اختیار فروش به تغییرات جزئی در نرخ بهره بدون ریسک را مشاهده نمود.

ب: رابطه بین نرخ بهره بدون ریسک و روو اختیار خرید

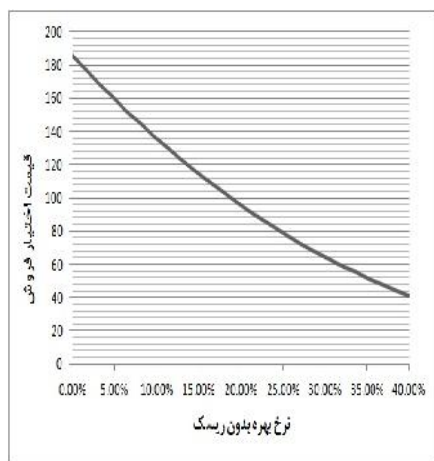


شکل ۹: نمودارهای مربوط به روو اختیار خرید

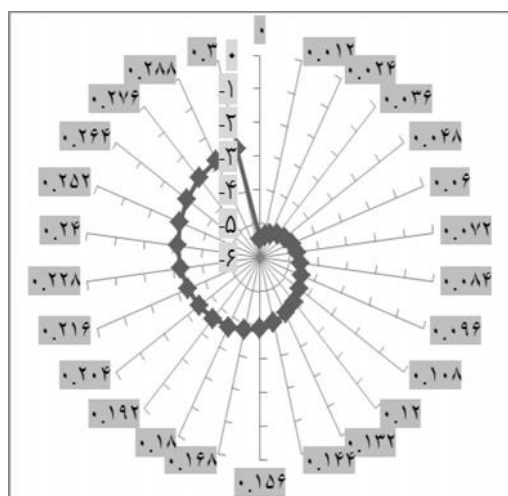
با افزایش نرخ بهره (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) در قسمت «ب»، مقادیر روو اختیار خرید که حساسیت پرتفوی متشکل از سهام و اختیار خرید سهام را به تغییرات نرخ بهره اندازه‌گیری می‌کند روی مقادیر راداری بالاتری قرار می‌گیرد و این به مفهوم حساسیت بیشتر پرتفوی به تغییرات جزئی در نرخ بهره است و نشان دهنده تغییر و تعدیل بیشتر در ترکیب پرتفوی جهت پوشش ریسک است. آنچه که در ریسک نوسانات نرخ بهره مهم است، شناسایی و اندازه‌گیری میزان حساسیت پرتفوی به این نوسانات براساس پارامتر روو است.

با افزایش نرخ بهره در اقتصاد، نرخ رشد مورد انتظار قیمت سهام نیز می‌تواند افزایش یابد. از طرف دیگر، افزایش نرخ بهره، موجب کاهش ارزش فعلی جریان نقدی دارندگان اختیار فروش خواهد شد. تأثیر همزمان این دو پدیده، باعث می‌شود تا قیمت اختیارفروش با افزایش نرخ بهره کاهش یابد. قسمت «الف» شکل ۱۰، رابطه معکوس میان تغییر نرخ بهره بدون ریسک و قیمت اختیار فروش را نشان می‌دهد. به ازای نرخ بهره بدون ریسک ۲۰٪، قیمت اختیار فروش بر مقدار ۹۶ ریال واقع می‌شود. پارامتر روو اختیار فروش رابطه‌ی معکوس قسمت «الف» را می‌سجد. همان‌گونه که در قسمت «ب» نمایان است، با افزایش نرخ بهره بدون ریسک، مقدار پارامتر روو

الف: رابطه بین نرخ بهره بدون ریسک و قیمت اختیار فروش



ب: رابطه بین نرخ بهره بدون ریسک و روو اختیار فروش



شکل ۱۰: نمودارهای مربوط به روو اختیار فروش



بیشتر برای دارنده‌ی اختیار خرید یا فروش وجود خواهد داشت و آگاهی از اندازه‌ی وگا برای شناسایی محدوده‌ی سود و زیان و نیز احتمال کسب سود به ازای نوسانات مختلف و تغییر در ارزش پرتفوی برای سرمایه‌گذار اختیار معامله مهم خواهد بود. دلتا و وگای اندازه‌گیری شده در این تحقیق این موضوع را به اثبات می‌رساند. گاما نسبت تغییر دلتای معرفی شده را به تغییرات قیمت سهام می‌سنجد. سرمایه‌گذاران و معامله‌گران با اندازه‌گیری پارامتر گاما، میزان نیاز به تغییر و تعدیل در ترکیب پرتفوی خود را که متشکل از سهام و اختیار معامله سهام است را برای بی‌تفاوت نگه داشتن موضع معاملاتی نسبت به این تغییرات تعیین می‌کنند. هر چه مقدار گاما کمتر باشد، سرمایه‌گذار به این موضوع پی می‌برد که دفعات نیاز به تغییر در اندازه و ترکیب پرتفوی کمتر است و با افزایش گاما، نیاز به این تغییر شدیدتر می‌شود. همچنین میزان حساسیت قیمت اختیارات نسبت به کاهش مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیار توسط تنا اندازه‌گیری شده است.

وقتی سرمایه‌گذاری با انتظار افزایش قیمت و با هدف پوشش ریسک، برگه‌ی اختیار خرید را خریداری می‌نماید، طبیعتاً بهایی را باید برای خرید برگه‌ی اختیار خرید بپردازد که این قیمت در این پژوهش محاسبه گردید. از دیدگاه خریدار، هرچه قیمت پرداختی کمتر باشد مطلوبتر است زیرا پوشش ریسک با هزینه‌ی کمتری صورت گرفته است. همان‌طور که تحلیل‌ها نشان می‌دهد، رابطه میان تغییرات قیمت اختیار خرید و نرخ بهره بدون ریسک مستقیم است. افزایش نرخ بهره به افزایش قیمت برگه‌ی اختیار خرید منجر می‌شود، یعنی هزینه پوشش ریسک افزایش می‌یابد که از دیدگاه خریدار اختیار خرید نامطلوب است. پارامتر روو اختیار خرید سرمایه‌گذار را متوجه میزان حساسیت قیمت قرارداد اختیار خرید به نوسانات نرخ بهره می‌نماید. با افزایش نرخ بهره مقادیر روو اختیار خرید که حساسیت پرتفوی متشکل از سهام و اختیار خرید آن سهام را به تغییرات نرخ بهره اندازه‌گیری می‌کند افزایش می‌یابد و این به مفهوم حساسیت بیشتر پرتفوی به تغییرات جزئی در نرخ بهره است و نشان دهنده تغییر و

با افزایش نرخ بهره (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) مقادیر روو که حساسیت پرتفوی متشکل از سهام و اختیار فروش آن سهام را به تغییرات نرخ بهره اندازه‌گیری می‌کند روی رادارهای بالاتر ولی با مقادیر کمتر قرار می‌گیرد. علامت منفی فقط جهت معکوس رابطه را نشان می‌دهد.

### نتیجه‌گیری و بحث

اگرچه بازار اختیارمعامله سهام و مراحل رسم شده در نمودار درخت دوجمله‌ای، برآوردی قطعی از قیمت آتی دارایی مورد نظر ارائه نمی‌دهد، ولی اطلاعات مربوط به عدم ثبات قیمت سهام را ارائه می‌نماید. قیمت اختیار معامله سهام بستگی به انتظارات بازار از نوسان پذیری قیمت‌های آتی سهام دارد و اطلاعات مفیدی در مورد ثبات یا عدم ثبات قیمت سهام در اختیار قرار می‌دهد. همواره ارتباط مهمی بین قیمت‌های نقدی سهم و قیمت‌های اختیار معامله‌ی آن سهم وجود دارد. زیرا قیمت سهامی که اختیار معامله روی آن‌ها صادر می‌شود، می‌تواند با دقت بیشتری ارزش واقعی آن سهم را نشان دهد. نتایج نشان داده است که اگر قیمت اوراق بهادار به طور معکوس حرکت کند، دارنده‌ی اختیار معامله اوراق بهادار بیش از مبلغ پرداخت شده برای اختیار ضرر نمی‌کند. منظور از حرکت معکوس قیمت سهام، حرکت قیمت سهام برخلاف پیش بینی یا انتظار سرمایه‌گذار است. با تغییر قیمت سهام، قیمت اختیار خرید و اختیارفروش تغییر می‌یابد. قیمت اختیار خرید با افزایش قیمت سهام، افزایش و قیمت اختیارفروش کاهش می‌یابد. این رابطه توسط دلتا سنجد می‌شود. دلتای اختیار معامله با سنجد حساسیت قیمت اختیار به تغییر قیمت سهام، خریدار اختیار را از میزان تغییر در سود یا زیان سرمایه‌گذاری خود و حداکثر زیان ناشی از اعمال نشدن قرارداد اختیار یاری می‌کند. نوسان‌پذیری قیمت سهام به‌عنوان ابزاری برای نشان دادن درجه عدم اطمینان نسبت به تغییرات آتی بازده سهام بر روی قیمت اختیار خرید و اختیار فروش تاثیر مستقیم دارد. میزان این تاثیر به کمک پارامتر وگا سنجد می‌شود. با افزایش نوسان، شانس کسب سود

تعدیل بیشتر در ترکیب پرتفوی جهت پوشش ریسک توسط سرمایه‌گذار، در برابر افزایش نرخ بهره بدون ریسک است. برعکس؛ قیمت هر برگه اختیار فروش می‌تواند نشان‌دهنده ریسکی باشد که صادرکننده این برگه می‌پذیرد. برای پذیرش این ریسک، صادرکننده‌ی این برگه قیمت بالاتری را مطالبه می‌نماید و این قیمت، همان قیمت برگه اختیار فروش است. تحلیل خروجی‌ها نشان می‌دهد که رابطه بین تغییرات قیمت اختیار فروش و نرخ بهره معکوس است. افزایش نرخ بهره منجر به کاهش قیمت برگه اختیار فروش می‌شود و کاهش قیمت اختیار فروش به معنای کاهش جایزه پذیرش ریسک است که از سوی صادرکننده یا فروشنده اختیار فروش نامطلوب است. مقادیر روو اختیار فروش با نشان دادن حساسیت قیمت اختیار فروش به نوسانات نرخ بهره بدون ریسک، سرمایه‌گذار را متوجه میزان تغییر در ترکیب پرتفوی خود می‌سازد.

به‌کارگیری اختیار معامله به عنوان ابزاری برای مدیریت ریسک و ایجاد سودآوری، می‌تواند به رونق بورس کمک کند. اگرچه با به‌کارگیری اختیار فروش، بورس اوراق بهادار در این مسیر قرار گرفته است، ولی شناسایی روش‌های پوشش ریسک توسط این ابزار مالی حائز اهمیت است که در این پژوهش به این موضوع پرداخته شده است. اگرچه عدم وجود بازار ثانویه برای این اوراق و الزام داشتن سهام پایه به هنگام معامله این اوراق، محدودیت‌هایی را در بورس اوراق کشورمان برای معامله‌ی این اوراق ایجاد می‌کند، ولی به نظر می‌رسد با رفع محدودیت‌ها و اتخاذ تمهیدات لازم بتوان از این ابزار برای حمایت از قیمت سهام شرکت‌ها استفاده نمود.

## مراجع و منابع:

- کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان، conf. semnan. ac. ir
- (۱۱) نبوی چاشمی، سیدعلی و قاسمی چالی، جابر (۱۳۹۲)، تعیین قیمت قرارداد اختیار معامله سهام در بورس اوراق بهادار تهران توسط مدل درخت دوجمله‌ای و سنجش حساسیت قیمت اختیار معامله به قیمت سهام و نوسانات آن بر اساس پارامترهای دلتا و وگا، فصلنامه علمی - پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری، ویژه‌نامه اولین کنفرانس ملی مهندسی مالی ایران، صص ۷۹-۱۰۲.
- John C. Hull (۲۰۰۱), *Fundamentals of Futures And Option Markets, Fourth Edition*.
- John hull, Alan white (۱۹۹۳), *Efficient Procedures for Valuing European and American Path-dependent Options, The Journal of Derivatives, Vol. ۱, No. ۱: pp. ۲۱-۳۱*.
- Longstaff FA, Schwartz ES (۲۰۰۱) *Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach, Rev Financ Stud ۱۴: pp. ۱۱۳-۱۴۷*.
- Louis H. Ederington, Wei Guan (۲۰۰۷), *Higher Order Greeks, The Journal of Derivatives, Vol. ۱۴, No. ۳: pp. ۷-۳۴*.
- Mark Broadie, Ashish Jain (۲۰۰۸), *Pricing and Hedging Volatility Derivatives, The Journal of Derivatives, Vol. ۱۵, No. ۳: pp. ۷-۲۴*.
- Mark Rubinstein (۲۰۰۰), *On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Models, The Journal of Derivatives, Vol. ۸, No. ۲: pp. ۴۷-۵۰*.
- Oliver Reiss, Uwe Wystup (۲۰۰۱), *Computing Option Price Sensitivities Using Homogeneity and Other Tricks, The Journal of Derivatives, Vol. ۹, No. ۲: pp. ۴۱-۵۳*.
- (۱) اسلامی بیدگلی، غلامرضا و سرافراز اردکانی، حسین، (۱۳۷۵)، تئوری قیمت گذاری اختیار معامله، مجله تحقیقات مالی دانشگاه تهران، سال سوم، شماره ۱۱ و ۱۲، صص ۱۴۸-۱۷۶.
- (۲) افشار طونیانی مصطفی، (۱۳۷۸)، بررسی روشهای ارزشیابی اختیار معامله و پیشنهاد مدل مناسب برای بازار سرمایه ایران، رساله کارشناسی ارشد، اصفهان، دانشکده علوم اداری و اقتصاد.
- (۳) بهرامی نسب، علی و جلالی، فاطمه (۱۳۹۱)، مقایسه تطبیقی مدل‌های ارزش‌گذاری ابزارهای مالی مشتقه، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان، conf. semnan. ac. ir
- (۴) جان‌هال (۱۳۸۸)، مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، ترجمه سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران، شرکت کارگزاری مفید، چاپ دوم.
- (۵) جلوداری ممقانی، محمد و پیکر، جمیله (۱۳۹۱)، کاربرد شبیه‌سازی مونت کارلو در محاسبه یونانی‌ها، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان.
- (۶) خضری پور قزایی، رشید و ستار دباغی، صفا (۱۳۹۱)، یک روش عددی برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات اروپایی در بازارهای غیرنقدی، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان.
- (۷) درخشان، مسعود (۱۳۹۰)، مشتقات و مدیریت ریسک در بازارهای نفت، تهران، موسسه مطالعات بین‌المللی انرژی، چاپ دوم.
- (۸) راعی رضا، پویان فر احمد، (۱۳۸۹)، مدیریت سرمایه گذاری پیشرفته، تهران، انتشارات سمت، چاپ سوم.
- (۹) سلیمانی سروستانی، خدیجه و ابراهیمی، سید کاظم (۱۳۹۱)، روش درخت دوجمله‌ای برای اختیارات آسیایی در مدل پرش-انتشار، سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، دانشگاه سمنان.
- (۱۰) شاکران، زهرا (۱۳۹۱)، ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی، سومین