جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

بهینه سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم Big Bang-Big Crunch

علیرضا علی نژاد

استادیار دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران
پست الکترونیکی: alinezhad@qiau.ac.ir

چکیده

سرمایه‌گذاری نقش تعیین کننده‌ای در رشد اقتصادی دارد. یکی از اهداف اساسی کشورها، دستیابی به رشد اقتصادی و توسعه ی پایدار می‌باشد. امروزه حجم قابل توجهی از کار مدیران سرمایه گذاری و همچنین به طور عموم سرمایه گذاران، ساختن پورتفوی کارآمدی از دارایی هاست که اهداف تقاضا را برآورده سازد. در این تحقیق از مدل میانگین–واریانس مارکویتز به همراه محدودیت‌های عدد صحیح و همچنین یک رویکرد فرا ابتکاری جدید به نام الگوریتم Big Bang-Big Crunch برای تشکیل سبد سهام بهره گرفته شده است. الگوریتم مورد استفاده در این تحقیق با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری نظیر الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی، ژنتیک و... با استفاده از داده‌های سهام شاخص‌های بورس هنگ کنگ، ایران و ژاپن مقایسه شده است و نتایج، حاکی از رقابتی بودن این الگوریتم برای حل مسأله بهینه‌سازی سبد سهام دارند.

واژگان کلیدی: مدل میانگین- واریانس مارکویتز، مسأله بهینه سازی سبد سهام، الگوریتم Big Bang-Big runch، محدودیت‌های عدد صحیح، مرز کارا

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

مقدمه

مدیریت سرمایه گذاری دو مبحث اصلی «تجزیه و تحلیل اوراق بهادار» و «مدیریت پرتفوی» را شامل می شود. تجزیه و تحلیل اوراق بهادار، دربرگیرنده تخمین مزایای تک تک سرمایه گذاری‌ها است در حالی که مدیریت پرتفوی، شامل تجزیه و تحلیل ترکیب سرمایه گذاری‌ها و مدیریت و نگهداری مجموعه ای از سرمایه گذاریها است. در دهه اخیر، روند مباحث سرمایه گذاری از شیوه های انتخاب سهام (تجزیه و تحلیل اوراق بهادار) به سمت مدیریت پورتفوی تغییر جهت داده است. مسأله بهینه سازی سبد سهام[۱] جزئی از مهم‌ترین مسائل در حوزه علوم مالی بوده و تاکنون مطالعات زیادی روی آن انجام گرفته است. فرمول بندی اولیه این مسأله عبارتست از انتخاب یک سبد سهام از دارایی‌ها که ریسک را با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی برای رسیدن به سطح معینی از بازده کمینه می‌نماید. به طور کلی سرمایه‌گذاران ترجیح می‌دهند به جای سرمایه گذاری در یک دارایی (یا سهام) در سبد سهامی از آن‌ها سرمایه گذاری نموده تا بدین به وسیله با تنوع بخشیدن به سرمایه‌گذاری‌ها، ریسک را بدون اثر منفی روی بازده مورد انتظار محدودتر نمایند. این مسأله برای اولین بار توسط مارکویتز فرمول بندی شد. PO در شکل اولیه خود بسیاری از جنبه‌های غیر قابل اغماض دنیای واقعی را در حل مسأله در نظر نمی‌گیرد (مانند حداکثر اندازه سبد سهام، حداقل دارایی قابل معامله، هزینه معاملات، اولویت دارایی‌ها، هزینه مدیریت و...) و استفاده از آن در عمل بسیار ساده و پیش پا افتاده به نظر می‌آید. با این وجود می‌توان با افزودن محدودیت‌هایی به مسأله اولیه برخی از جنبه‌های مطرح شده را مدل نمود که در این صورت مسأله به سمت PO محدود سوق پیدا کرده که یک مسأله NP-Complete می‌باشد.

در برخی موارد ویژگی‌های مسأله از جمله اندازه آن یا نیازمندی‌های دنیای واقعی مانند محدودیت در زمان محاسبات یا دقت تخمین پارامترها موجب می‌شوند تا روش‌های دقیق برای حل مسائل بزرگ PO قابل استفاده نباشند، بنابراین در این‌گونه موارد محققین تمایل دارند از الگوریتم‌های تقریبی و سریع به خصوص روش‌های فرا ابتکاری و ترکیبی بهره جویند. از الگوریتم‌های فرا ابتکاری استفاده شده برای حل این مسأله می‌توان به شبیه سازی تبریدی[۲]، آستانه پذیرش[۳]، جستجوی ممنوعه[۴]، الگوریتم ژنتیک[۵]، الگوریتم بهینه سازی دسته پرندگان[۶] و شبکه‌های عصبی اشاره نمود.

هدف این مقاله استفاده از الگوریتم BB-BC به عنوان یک رویکرد فرا ابتکاری جدید برای حل مسأله PO با محدودیت‌های عدد صحیح و مقایسه کارایی این روش در برابر سایر روش‌ها از منظر شاخص‌های محاسباتی با استفاده از سه مسأله معیار مربوط به شاخص‌های بورس بازارهای هنگ کنگ، ایران و ژاپن می‌باشد.

پیشینه تحقیق

با توجه به جذابیت مسأله بهینه سازی سبد سهام برای محققان، انواع مختلفی از این مسأله فرموله شد. کونو و یامازاکی[۲۵]مدل برنامه ریزی خطی پیشنهاد دادند که در آن بازده از توزیع نرمال چند متغیره تبعیت می‌کرد. برخی از محققان با افزودن محدودیت‌های کاربردی نظیر هزینه معاملاتی[۱۸] نقد شوندگی[۲۲]بازگشت سرمایه[۶]و... به مدل اولیه مارکویتز موجب نزدیک شدن آن به محدودیت‌های دنیای واقعی شده‌اند. اگرچه افزودن برخی از این محدودیت‌ها موجب پیچیدگی مسأله شده و حل آن را حتی برای مثال‌های کوچک نیز دشوار می‌سازد.

چنگ و همکاران[۵] الگوریتم‌های ژنتیک، شبیه سازی تبریدی و جستجوی ممنوعه را برای حل این مسأله با محدودیت‌های عدد صحیح پیشنهاد دادند. فرناندز و گومز[۱۰] الگوریتمی بر مبنای شبکه عصبی پیشنهاد نمودند. تولو و رولی در سال ۲۰۰۷مروری بر کاربرد

---

۱ Portfolio Optimization (PO)

۲ Simulated Annealing(SA)
۳ Threshold Accepting(TA)
۴ Tabu Search(TS)
۵ Genetic Algorithm(GA)
۶ Particle Swarm Optimization(PSO)

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

الگوریتم‌های فرا ابتکاری در حل مسأله بهینه سازی سبد سهام شامل الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی[۶]، آستانه پذیرش[۸]، جستجوی ممنوعه، الگوریتم ژنتیک و کلونی مورچگان[۲] داشته‌اند و کورا[۷] الگوریتم اجتماع پرندگان را برای حل این مسأله پیشنهاد نمود.

الگوریتم BB-BC برای اولین بار توسط عثمان و اوسین در سال ۲۰۰۶ ارائه شد. آلاتاس (۲۰۱۱) این الگوریتم را تحت عنوان Uniform Big Bang–Chaotic Big Crunch (UBB–CBC) توسعه داد و برای توابع هدف بنچمارک آن را با BB-BC مقایسه نمود. حسنسبی و کاظم‌زاده (۲۰۱۲) برای طراحی کدبیس قاب‌های فلزی از این الگوریتم بهره گرفته‌اند. در این مطالعه نشان داده شده است این روش می‌تواند به عنوان روشی قابل توجه در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها برای بهینه‌سازی مطرح گردد. کمپ و فارا (۲۰۱۳) از BB-BC در طراحی قاب های بتن مسلح استفاده نمودند. در تحقیق دیگری که توسط کوباسار و همکاران (۲۰۱۱) انجام شده از BB-BC به همراه مدل‌های فازی جهت استفاده از مدل سیستم معکوس به عنوان یک کنترل کننده استفاده شده است.
لازم بذکر است که در خصوص مطالعات مالی مرور ادبیاتی در خصوص این الگوریتم وجود نداشته و تحقیق حاضر جزء اولین مطالعات در حوزه کاربرد این الگوریتم در مسائل مالی می‌باشد.

مدل‌سازی مساله بهینه سازی سبد سهام

در شکل اولیه مسأله بهینه سازی سبد سهام، ما به دنبال سبدی از سهام (دارایی) هستیم که ریسک را در سطح مشخصی از بازده کمینه کند. در مدل‌سازی مطرح شده توسط مارکویتز ریسک به عنوان واریانس بازده سهام موجود در سبد اندازه گیری می‌شود[۲۱]. این مدل به شکل زیر می‌باشد:

$$Min\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pm_{ij}x_i x_j \qquad (۱)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{N} r_i x_i = r_p \qquad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (۳)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N \quad x_i \geq 0 \qquad (۴)$$

N تعداد کل دارایی‌های موجود و x_i نسبت پول سرمایه گذاری شده در دارایی i ام می‌باشد. برای هر دارایی نرخ بازده با متغیر تصادفی R_i نمایش داده می‌شود که میانگین آن r_i بوده و نشان‌دهنده بازده مورد انتظار دارایی i ام می‌باشد.
σ_{ij} کوواریانس بازده مورد انتظار دو دارایی i و j است. تابع هدف این مسأله واریانس بوده و با σ_p^2 نمایش داده می‌شود($\pm_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pm_{ij}x_i x_j$). بازده مورد انتظار پرتفولیو عبارتست از $\sum_{i=1}^{N} r_i x_i$ و r_p میانگین بازده مورد نیاز سبد را نمایش می‌دهد. محدودیت (۳) موجب می‌شود تا مجموع وزن دارایی‌ها یک شده و کل بودجه سرمایه گذار سرمایه گذاری شود.
با تعریف ضریب ناسازگاری ریسک λ ($ª \in [0,1]$) می‌توان محدودیت (۲) را به تابع هدف برد که با این تغییر مدل به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Max}\,(1-ª)\sum_{i=1}^{N} r_i x_i - ª\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\pm_{ij}x_i x_j \qquad (۵)$$

Subject to:

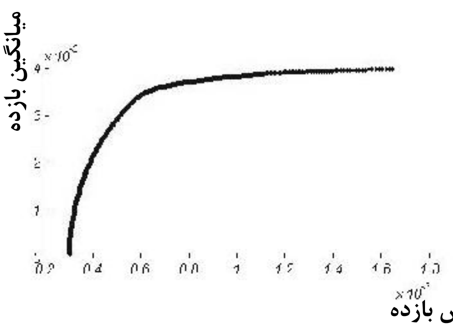
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (۶)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N \quad x_i \geq 0 \qquad (۷)$$

این مسأله یکی از انواع مسائل چند هدفه می‌باشد. عموماً این‌گونه مسائل چندین جواب بهینه متفاوت با یکدیگر دارند. با حل مسأله برای مجموعه‌ای از مقادیر λ می‌توان

جواب‌های مربوط به حالات بین این دو حالت حدی را بدست آورده و مرز کارای غیر محدود مارکویتز را ترسیم نمود. لازم به ذکر است که هر نقطه روی مرز کارا یک جواب بهینه می‌باشد بنابراین سرمایه گذار می‌تواند با توجه به نیازمندی‌های مشخص، ریسک و یا بازده مدنظر خود را انتخاب نماید. این مرز کارای محدود از حل بهینه پارتو تشکیل می‌شود بدین معنی که هیچ جوابی امکان بهتر شدن روی یک معیار را بدون بدتر شدن روی معیار دیگر نخواهد داشت.

برای مدل‌سازی مطرح شده (معادلات۷-۵) مرز کارا یک منحنی بوده که نشان‌دهنده رابطه جایگزینی بین ریسک و بازده می‌باشد. شکل (۱) مرز کارا را برای مجموعه داده‌های شاخص Nikkei (شاخص بورس ژاپن) با در نظر گرفتن ۲۰۰۰ مقدار مختلف برای λ نمایش می‌دهد که به این مرز کارا، مرز کارای استاندارد می‌گویند[۱۰].



شکل (۱): نمونه‌ای از مرز کارای استاندارد مربوط به مجموعه داده های شاخص Nikkei

مسأله بهینه سازی سبد سهام با محدودیت‌های عدد صحیح شامل دو محدودیت ذیل بعلاوه محدودیت‌های مسأله اصلی می‌باشد:

الف) تعداد دارایی‌های موجود در سبد سرمایه گذاری معمولاً محدود به یک مقدار مشخص می‌باشد. می‌توان با تعریف متغیر دودویی z_i این محدودیت را به شکل ذیل نوشت :

z_i $$\sum_{i=۱}^{N} z_i = k \qquad (۸)$$ ر غیر

اي سبد

را تسهیل نموده و موجب کاهش هزینه‌های آن می‌گردد.

ب) محدودیت دوم حداقل نسبت (ε_i) و حداکثر نسبتی(δ_i)که دارایی i ام می‌تواند در سبد داشته باشد را تعیین می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$£_i z_i \le x_i \le ¢_i z_i \qquad (۹)$$

که در آن $۰ \le \varepsilon_i \le \delta_i \le ۱$ و ($i=۱, ۲, ..., N$) می‌باشد.

با تعریف دو محدودیت فوق می‌توان مسأله بهینه سازی سبد سهام با محدودیت‌های عدد صحیح را به صورت ذیل نوشت:

$$\text{Max } (۱-ª)\sum_{i=۱}^{N} r_i x_i - ª \sum_{i=۱}^{N}\sum_{j=۱}^{N} ±_{ij} x_i x_j \qquad (۱۰)$$

subject to:

$$\sum_{i=۱}^{N} x_i = ۱ \qquad (۱۱)$$

$$\sum_{i=۱}^{N} z_i = k \qquad (۱۲)$$

$$£_i z_i \le x_i \le ¢_i z_i \quad i=۱, ۲, ..., N \qquad (۱۳)$$

$$z_i = \{۰,۱\} \quad i=۱, ۲, ..., N \qquad (۱۴)$$

با اضافه کردن محدودیت‌های عدد صحیح، شکل مرز کارا تغییر کرده و به صورت منحنی غیر پیوسته در می‌آید که به آن مرز کارای محدود (مرز کارای عمومی) گفته می‌شود. در این حالت روش‌های سنتی برنامه ریزی درجه دوم قادر به حل این مسأله نمی‌باشد[۱۱]. مدل تعریف شده (معادلات۱۴-۱۰) یک برنامه ریزی ترکیبی عدد صحیح درجه دوم بوده و الگوریتم کارایی برای حل آن وجود ندارد بنابراین این تحقیق، الگوریتم BB-BC را به عنوان یک رویکرد تکاملی فرا ابتکاری جدید برای حل این مسأله مورد استفاده قرار می‌دهد که به طور خلاصه از گام های اصلی زیر تشکیل شده است:

۱-تولید N جواب اولیه به صورت تصادفی با توجه به محدودیت‌های فضای جستجو.

۲-محاسبه تابع تناسب برای همه جواب‌ها.

۳-پیدا کردن مرکز چگال از رابطه زیر و یا انتخاب عضو با بهترین مقدار تناسب به عنوان مرکز چگال.

$$\vec{x}^c = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{f^i} \vec{x}^i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{f^i}}$$

۴-محاسبه جواب‌های جدید حول مرکز چگال با استفاده از توزیع نرمال که مقدار انحراف استاندارد آن با افزایش تعداد تکرارها کاهش می‌یابد که به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$x^{new} = x^c + lr/k$$

که در این رابطه x^c مرکز چگال، l حد بالای پارامتر، r عدد تصادفی نرمال و k گام تکرار است. بنابراین نقطه جدید x^{new} در داخل حد بالا و حد پایین خود خواهد بود.

۵-برگشت به گام ۲ تازمانی که شرط پایان الگوریتم تحقق یابد.

مدلسازیBB-BC برای حل PO

۱-تولید جواب اولیه

گام ۱- از بین کل دارایی‌های موجود (N)، k دارایی به صورت تصادفی انتخاب می‌شود. مجموعه دارایی‌های انتخاب شده را با S نمایش می‌دهیم و مقادیر x و z آنها را بصورت زیر تعیین می‌نماییم:

$$z_i = 1 \quad \forall i \in S \tag{۱۵}$$

$$z_i = 0 \quad \forall i \notin S$$

$$x_i = 0 \quad \forall i \notin S$$

گام ۲- به کلیه دارایی‌های مجموعه S مقدار ε متناظر با آن را اختصاص می‌دهیم و مقدار باقیمانده از کل سرمایه (r) را محاسبه می‌کنیم، بنابراین:

$$x_i = \varepsilon_i \quad \forall i \in S \tag{۱۶}$$

$$r = 1 - \sum_{\forall i \in S} \varepsilon_i$$

گام ۳- برای هر دارایی مجموعه S مقدار تصادفی c بین ۰ و ۱ تولید می‌شود و مقادیر x را به صورت زیر بروز می‌نماییم:

$$x_i = \varepsilon_i + \frac{c_i}{\sum_{\forall i \in S} c_i} . r \quad \forall i \in S \tag{۱۷}$$

گام ۴- باتوجه به حد بالای x ها بایستی $x_i \le \delta_i$ باشد بنابراین تمامی x هایی که از حد بالای خود تجاوز کرده‌اند را برابر با حد بالای خود قرار می‌دهیم. اگر S′ مجموعه دارایی‌هایی که مقدار حد بالای خود را گرفته و S″ مجموعه دارایی‌هایی که در بین حدود بالا و پایین هستند را نشان دهند. مقادیر x ها مجددا به صورت زیر بروز رسانی می‌گردد.

$$x_i = \delta_i \quad \forall i \in S' \tag{۱۸}$$

$$r = 1 - \left(\sum_{\forall i \in S''} \varepsilon_i + \sum_{\forall i \in S'} \delta_i\right)$$

$$x_i = \varepsilon_i + \frac{c_i}{\sum_{\forall i \in S''} c_i} . r \quad \forall i \in S''$$

با توجه به تعدیلات فوق کلیه جواب‌های تولید شده در این مرحله شدنی بوده و کلیه محدودیت‌های مسأله را ارضا می‌نمایند. به همین شیوه M جواب اولیه تولید می‌گردد.

در نهایت بایستی برای کلیه دارایی‌ها نسبت v_i محاسبه شود:

$$v_i = \frac{r_i}{sd_i} \qquad i = ۱, ۲, ..., N \qquad (۱۹)$$

در رابطه فوق r_i میانگین بازدهی و sd_i انحراف استاندارد بازده دارایی i ام می‌باشند. این نسبت میزان کیفیت دارایی را نشان می‌دهد. بطور کلی هرچه بازدهی دارایی بیشتر و انحراف استاندارد آن کمتر باشد آن دارایی از نظر سرمایه گذار گزینه مناسب‌تری برای سرمایه‌گذاری می‌باشد.

۲-محاسبه تابع تناسب

تابع تناسب در این الگوریتم همان تابع هدف بوده و با استفاده از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$f_i = (۱ - a)\sum_{i=۱}^{N} r_i x_i - a \sum_{i=۱}^{N}\sum_{j=۱}^{N} \pm_{ij} x_i x_j \qquad (۲۰)$$

۳-پیدا کردن مرکز چگال

سناریو اول: می‌توان بهترین پرتفولیو از منظر مقدار تابع تناسب را به عنوان مرکز چگال در نظر گرفت.

سناریو دوم: در این سناریو از یک رویه احتمالی ابتکاری استفاده می‌شود.

گام ۱- γ٪ از کل پرتفولیوهایی که بهترین مقادیر تابع تناسب را دارند انتخاب می‌گردند، این مجموعه را با B نمایش می‌دهیم. به فرض $\gamma = 10$ باشد بنابراین از بین ۳۰ پرتفولیو تشکیل شده سه پرتفولیو A، B و C را که بهترین مقادیر تابع تناسب را دارند برمی گزینیم.

Port A	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
Port B	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
Port C	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

f_A، f_B و f_C به ترتیب مقدار تابع تناسب آن‌ها را نمایش می‌دهد. شکل زیر هر یک از پرتفولیوها را نشان می‌دهد (N=۱۰ و k=۳). شماره‌های تیره دارایی‌هایی از پرتفولیو هستند که مقدار گرفته‌اند.

گام ۲- به دارایی‌های موجود در هر پرتفولیو احتمالی متناسب با مقدار تابع تناسب آن پرتفولیو برای انتخاب شدن در مرکز چگال تخصیص می‌دهیم. احتمال انتخاب کل دارایی پرتفولیو i ام با Pi نمایش داده می‌شود.

$$f_{min} = \min\{f_i\} \ , i = 1, ..., M \qquad (۲۱)$$

$$P_i = \frac{f_i - f_{min}}{\sum_{\forall i \in S} f_i - N f_{min}}$$

بنابراین احتمال انتخاب دارایی j ام در مرکز چگال (P_j) به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$P_j = \frac{\sum_{\forall j | z_{ij}=1} \frac{P_i}{N}}{\sum_i P_i} \qquad (۲۲)$$

طبق تعریف فوق برای دارایی‌هایی که در بیش از یک پرتفولیو وجود دارند (دارایی پنجم در پرتفولیو A و B) احتمال حضور دارایی در مرکز چگال، مجموع احتمال نسبی پرتفولیوهای A و B می باشد.

حال k دارایی از بین کل دارایی‌ها به صورت تصادفی و با استفاده از تابع احتمال P نرمالایز شده برای حضور در مرکز چگال انتخاب می‌گردد، مجموعه این دارایی‌ها C نامیده می‌شود. مقدار z دارایی‌های منتخب را برابر با ۱ قرار داده و برای بقیه دارایی‌ها صفر قرار می‌دهیم.

همانگونه که از رویه فوق پیداست دارایی‌هایی که در پرتفولیوهایی با تابع تناسب بیشتر هستند شانس بیشتری برای حضور در مرکز چگال دارند همچنین دارایی‌هایی که در بیش از یک پرتفولیو هستند نیز شانس مضاعفی برای حضور در مرکز چگال پیدا می‌کنند.

گام ۳- در این مرحله بایستی مقدار x های مرکز چگال را تعیین نماییم. چنانچه دارایی‌ای تنها در یک پرتفولیو ظاهر شود مقدار x آن همان مقدار در پرتفولیو می‌باشد اما در صورتی که دارایی‌ای در بیش از یک پرتفولیو وجود داشته باشد به ترتیب ذیل عمل می‌کنیم:

پرتفولیوهایی که شامل x مورد نظر می‌باشند به ترتیب صعودی مقدار تابع تناسب مرتب می‌کنیم و مقدار تابع تناسب جدید را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_i = f_i - f_{min} + 1 \qquad (۲۳)$$

در رابطه فوق f'_i مقدار تابع تناسب جدید، f_i مقدار تابع تناسب قبلی و f_{min} کمترین مقدار تابع تناسب می‌باشد.

حال x_i به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_i = \frac{\sum_{\forall j \in B} \frac{1}{f'_{ij}} x_{ij}}{\sum_{\forall j \in B} \frac{1}{f'_{ij}}} \qquad (۲۴)$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود سیگماها بر روی j بسته شده که بیانگر پرتفولیوهای شامل x_i می‌باشد.

۴-رویه تعدیل

در این رویه مقادیر x بدست آمده از گام قبلی تعدیل شده تا مجموع آن‌ها برابر با یک گردد. نحوه این تعدیلات به شرح ذیل می‌باشد:

$$x_i = \varepsilon_i \quad if\ x_i \le \varepsilon_i \qquad (۲۵)$$

$$x_i = \delta_i \quad if\ x_i \ge \delta_i$$

چنانچه مجموع x های مرحله قبل را که مقادیر حد بالا و یا پایین خود را گرفته‌اند X بنامیم خواهیم داشت:

$$x_i = \frac{x_i}{\sum_{\forall i} x_i}(1 - X) \quad if\ \varepsilon_i < x_i < \delta_i \qquad (۲۶)$$

با اجرای رویه فوق مجموع مقادیر x ها برابر با یک شده و محدودیت کف و سقف نیز همواره برقرار خواهد بود.
در مرحله کد نویسی هر دو سناریو کد شده و سناریو برتر برای حل انتخاب شده است.

۵-محاسبه جواب‌های جدید

برای تولید جواب‌های جدید بایستی در وهله اول، k دارایی ای که در پرتفولیوی جدید هستند مشخص شوند. بدین منظور دو نوع تابع احتمالی بصورت زیر تعریف شده است.

$$P^I(u,t) = \frac{2(u - \alpha t)}{k(k+1) - 2k\alpha t} \qquad u = 1, 2, \dots, k \qquad (۲۷)$$

$$P^{II}(u,t) = \frac{(1-\alpha^t)\alpha^{ut}}{\alpha^t - \alpha^{t(k+1)}} \qquad u = 1, 2, \dots, k$$

برای تشکیل پرتفولیو جدید با استفاده از تابع احتمال منتخب فوق عددی به تصادف تعیین می‌شود که نشان‌دهنده تعداد دارایی‌های مشترک پرتفولیو جدید با مرکز چگال خواهد بود.

به فرض قصد تولید پرتفولیو جدید A را داریم. در ابتدا فرض می‌کنیم این پرتفولیو از نظر نوع دارایی‌های انتخاب شده کاملاً مشابه مرکز چگال می‌باشد. در مرحله بعد *k را با استفاده از تابع احتمال فوق تولید می‌نماییم(k ≤ *k). حال برای تشکیل پرتفولیوی جدید باید m=k-k* دارایی را از پرتفولیو A حذف نموده و m دارایی جدید به پرتفولیو اضافه نماییم. بدین منظور عدد تصادفی r را بین صفر و یک تولید می‌کنیم. اگر r<۰.۵ باشد یکی از دارایی‌ها پرتفولیو A رابه تصادف حذف نموده و دارایی دیگری که در پرتفولیو وجود ندارد را به تصادف انتخاب نموده و به سبد اضافه می‌نماییم. چنانچه r ≥ ۰.۵ باشد، دارایی که کمترین مقدار v را از بین دارایی‌های موجود در پرتفولیو دارد حذف و یک دارایی از بین دارایی‌های انتخاب نشده که مقدار v آن از میانگین مقادیر v دارایی‌های فعلی پرتفولیو بیشتر است به تصادف به پرتفولیو A اضافه می‌گردد. این روند ادامه پیدا می‌کند تا m دارایی جدید جایگزین m دارایی قبلی در پرتفولیو A شوند.
مقدار z دارایی‌های حذف شده برابر صفر و مقدار z دارایی‌های اضافه شده را برابر یک قرار می‌دهیم. به این ترتیب محدودیت عدد صحیح مسأله همواره برقرار خواهد بود.حال نوبت به تعیین مقادیر x دارایی‌های انتخاب شده در پرتفولیو می‌رسد. برای هر دارایی موجود در پرتفولیو جدید A دو وضعیت وجود دارد. وضعیت اول: دارایی در مرکز چگال نیز حضور دارد.

وضعیت دوم: دارایی در مرکز چگال نیز حضور ندارد.
برای وضعیت اول مقدار x به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$x_{Ai} = x_{ci} + \frac{r\beta(\delta_i - \varepsilon_i)}{c} \quad (۲۸)$$

که در رابطه فوق x_{ci} مقدار دارایی i ام در مرکزچگال است. r عدد تصادفی نرمال بوده که مقدار انحراف استاندارد آن با افزایش تعداد تکرارها کاهش می‌یابد. β یک عدد ثابت بوده که محدود کننده فضای جستجو است. x_{Ai} نیز مقدار دارایی i ام را در پرتفولیو جدید A را نمایش می‌دهد.

حال اگر $x_{Ai} \geq \delta_i$ باشد آن را مساوی δ_i قرار می‌دهیم، اگر $x_{Ai} \leq \varepsilon_i$ باشد آن را مساوی ε_i قرار می‌دهیم و اگر $\varepsilon_i < x_{Ai} < \delta_i$ مقدار x_{Ai} تغییری نخواهد کرد. مقدار باقیمانده از کل دارایی (w) را محاسبه می‌نماییم.

$$w = 1 - \sum_{\forall i \in S, A} x_{Ai} \quad (۲۹)$$

حال مقدار w را به دارایی‌های وضعیت دوم تخصیص می‌دهیم. برای کلیه x هایی که در وضعیت دوم هستند عدد تصادفی c بین صفر و یک تولید می‌شود و بصورت زیر مقدار باقیمانده از کل سرمایه تخصیص پیدا می‌کند.

$$x_i = \varepsilon_i + \frac{c_i}{\sum_{\forall i \in A} c_i} \cdot \left(w - \sum_{\forall i \in A} \varepsilon_i\right) \quad \forall i \in A \quad (۳۰)$$

با توجه به تعدیلات فوق کلیه محدودیت‌ها ارضا خواهند شد.

پس از این مرحله مجددا مرکز چگال محاسبه شده و الگوریتم تکرار می‌شود تا شرط پایان آن تحقق یابد. شرط پایان در الگوریتم مذکور رسیدن به تعداد تکرار مشخص خواهد بود.

نتایج محاسباتی

الگوریتم ارائه شده در این تحقیق با چهار الگوریتم ژنتیک، جستجوی ممنوعه، شبیه سازی تبریدی و اجتماع پرندگان مقایسه شده است. داده‌های تست مورد استفاده برای بازار هنگ کنگ و ژاپن در مطالعات مشابه نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این داده‌ها مربوط به قیمت‌های هفتگی سهام از مارس ۱۹۹۲ تا سپتامبر ۱۹۹۷ مربوط به شاخص‌های Hang Seng هنگ کنگ، Nikkei ژاپن و قیمت‌های روزانه سهام مربوط به فروردین ۸۸ تا اسفند ۹۰ شاخص TEPIX ایران می‌باشد. برای هر مجموعه داده تعداد دارایی‌ها (N) به ترتیب برابر ۳۱، ۲۱۵ و ۹۰ سهم می‌باشد که نماینده مجموعه داده‌های با حجم کم، زیاد و متوسط می‌باشند.

در کلیه محاسبات $k=۱۰$، $\varepsilon_i = 0.01$، $\delta_i = 1$ برای $(i=1, 2, \ldots, N)$ لحاظ شده است. ۵۱ مقدار مختلف برای λ با $\Delta\lambda = 0.02$ $(\lambda = 0, 0.02, 0.04, \ldots, 0.98, 1)$ در نظر گرفته شده است. سایر الگوریتم‌های مورد مقایسه نیز از همین داده‌ها استفاده می‌کنند. لازم بذکر است مشخصات سیستم مورد استفاده برای اجرای این الگوریتم Core ۲ Dou, ۲.۱۶ GHz computer with ۳ GB of memory بوده و از نرم افزار MATLAB ۷.۱۰.۰ برای اجرای الگوریتم بهره گرفته شده است. تعداد اجرای BB-BC، ۱۰۰۰ اجرا و تعداد M=۱۰۰ در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به الگوریتم‌های GA، SA، TS وPSO از مقاله کورا[۷] استخراج گردیده‌اند.

در این مطالعه برای مقایسه الگوریتم ها سه نوع خطا تعریف شده که عبارتند از: میانگین فاصله اقلیدسی[۱]، خطای واریانس بازده[۲] و خطای میانگین بازده[۳] که به صورت زیر بدست می‌آیند.

اگر (v_i^s, r_i^s) $(i=1, 2, \ldots, 2000)$ واریانس و میانگین بازده روی مرز کارای استاندارد باشند و (v_j^h, r_j^h) $(j=1, 2, \ldots, 51)$ واریانس و میانگین بازده یک نقطه روی مرز بدست آمده از الگوریتم ابتکاری باشد و $(v_{i_j}^s, r_{i_j}^s)$ یک نقطه روی مرز کارای استاندارد باشد که کمترین فاصله اقلیدسی را نسبت به نقطه (v_j^h, r_j^h) دارد، i_j بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$i_j = \arg\min_{i=1,2,\ldots,2000} \left(\sqrt{(v_i^s - v_j^h)^2 + (r_i^s - r_j^h)^2}\right)$$
$$j = 1, 2, \ldots, 51$$

---

[۱] Mean Euclidean distance

[۲] Variance of return error

[۳] Mean return error

بنابراین میانگین فاصله اقلیدسی، خطای واریانس بازده و خطای میانگین بازده به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{Mean Euclidean distance} = \left(\sum_{j=1}^{51}\left(\sqrt{(v_{i_j}^s - v_j^h)^2 + (r_{i_j}^s - r_j^h)^2}\right)\times \frac{1}{51}\right)$$

$$\text{Variance of return error} = \left(\sum_{j=1}^{51} 100\left|\frac{(v_{i_j}^s - v_j^h)}{v_j^h}\right|\right)\times \frac{1}{51}$$

$$\text{Mean return error} = \left(\sum_{j=1}^{51} 100\left|\frac{(r_{i_j}^s - r_j^h)}{r_j^h}\right|\right)\times \frac{1}{51}$$

با اجرای الگوریتم BB-BC برای داده‌های مربوط به شاخص‌های مختلف به مرز کارای عمومی تعریف شده دست می‌یابیم. با بدست آوردن نقاط مرز کارای عمومی قادر به محاسبه معیارهای خطا خواهیم بود.

جدول۱-مقایسه الگوریتم های فراابتکاری از منظر شاخص های محاسباتی

	GA	TSA	SA	PSO	BB-BC
Hang Seng					
Mean Euclidian distance	۰.۰۰۰۴	۰.۰۰۰۴	۰.۰۰۰۴	۰.۰۰۰۴۹	۰.۰۰۰۰۰
Variance of return error (%)	۱.۶۴۴۱	۱.۶۵۷۸	۱.۶۶۲۸	۲.۲۴۲۱	۱.۵۰۶۹
Mean return error (%)	۰.۶۰۷۲	۰.۶۱۰۷	۰.۶۲۳۸	۰.۷۴۲۷	۰.۵۸۳۳
Nikkei					
Mean Euclidian distance	۰.۰۰۰۹۳	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱۹	۰.۰۰۰۰۰
Variance of return error (%)	۱.۲۰۵۶	۱.۲۴۳۱	۱.۲۰۱۷	۲.۴۲۷۴	۱.۹۵۰۱
Mean return error (%)	۵.۳۲۶۶	۰.۴۲۰۷	۰.۴۱۲۶	۰.۷۹۹۷	۰.۴۵۷۷

همان‌گونه که مشاهده می‌شود الگوریتم BB-BC با توجه به خطای میانگین فاصله اقلیدسی نسبت به سایر الگوریتم‌ها برتری داشته و خطای آن تقریباً برابر صفر می‌باشد. همچنین در داده‌های مربوط به شاخص هنگ سنگ، واریانس بازده الگوریتمBB-BC نسبت به سایر الگوریتم‌ها کمتر می‌باشد. در حالیکه برای خطای واریانس بازده در مجموعه داده Nikkei و خطای میانگین بازده در هر دو مجموعه داده‌ها هیچ یک از الگوریتم‌ها به یکدیگر برتری ندارند. الگوریتم BB-BC برای شاخص Hang Seng عملکرد بهتری نسبت به سایر شاخص‌ها دارد که این مسأله با حجم داده‌های کمتر این بازار مرتبط می‌باشد بنابراین می‌توان این روش را برای بازارهای کوچک تر توصیه نمود.

زمان رسیدن به حل نزدیک به بهینه

یکی دیگر از معیارهای مقایسه الگوریتم‌های فرا ابتکاری زمان مورد نیاز برای رسیدن به جواب می‌باشد. در جدول زیر این زمان‌ها آورده شده است (بدون احتساب زمان تولید جواب اولیه).

جدول۲-مقایسه زمان حل GAوBB-BC

الگوریتم	متوسط زمان مورد نیاز برای حل (ثانیه)		
	Hang Seng	Nikkei	TEPIX

BB-BC	۳۸	۴۱۲	۱۱۲
GA	۹۴	۱۲۱۶	۳۲۷

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود زمان اجرای الگوریتم BB-BC بسیار کمتر از GA بوده که این برتری برای مجموعه داده‌های بزرگ خود را بیشتر نشان می‌دهد.

درصد مشارکت

برای مقایسه بهتر الگوریتم‌ها با الهام از مطالعه فرنانـدز و گومز[۱۰]، مرزهای کارای بدست آمـده از دو روش رقیـب را ادغام کرده و جـواب‌هـای تحـت تسـلط را از آن حـذف می‌کنیم. مرز بدست آمده بهترین جواب‌های حاصـل از دو الگوریتم را مشخص می‌کند. برای مقایسه الگـوریتم BB-BC، الگوریتم ژنتیک به عنوان الگوریتم رقیـب مطـرح در نظر گرفته شده است.

درصد مشارکت الگوریتم BB-BC برای سـه بـازار هنـگ کنگ، ژاپن و ایران به ترتیـب ۸۸٪، ۹۱٪ و ۹۳٪ و درصـد مشارکت الگوریتم ژنتیک برای سه بـازار بـه ترتیـب برابـر ۱۲٪، ۹٪ و ۷٪ می‌باشد.

با توجه به معیار درصد مشـارکت همانگونـه کـه ملاحظـه می‌گردد الگوریتم BB-BC عملکرد بسیار بهتری نسـبت به GA داشته و قادر به تخمین نقاط بیشتری از مرز کـارا است.

نتیجه گیری

در این تحقیق بـرای اولـین بـار از الگـوریتم BB-BC در حوزه مسائل مالی و برای حـل مسـأله بهینـه‌سـازی سـبد سهام استفاده شد.

این الگوریتم در شکل اولیه خود برای حل مسائل پیوسـته مناسب بوده کـه یکـی از نـوآوری‌هـای ایـن تحقیـق بکـار گرفتن این الگـوریتم در حـل مسـائل گسسـته مـی‌باشـد. همچنین از جمله سایر نوآوری‌های این تحقیق می‌توان به تعریف توابع احتمـالی گسسـته متناسـب بـا کـاربرد ایـن الگوریتم برای حل مسأله بهینه سـازی سـبد سـهام اشـاره نمود. با استفاده از این توابع با پیش رفتن تعـداد اجراهـای الگوریتم تعداد دارایی‌های مشترک بـا مرکـز چگـال طبـق یک رویه احتمـالی افـزایش پیـدا کـرده و احتمـال تعـداد دارایی‌های مشترک اندک به مرور کمتر و کمتر می‌شود.

در ادامه این الگوریتم با الگوریتم GA، SA، TS و PSO که از شناخته شده‌ترین الگوریتم‌های فرا ابتکـاری بـوده از ابعاد مختلف مقایسه شده است. همچنـین ایـن مقایسـات باتوجه به داده‌های واقعی سه بـازار هنـگ کنـگ (بـازار بـا حجم کوچک)، ایران (حجم متوسط) و ژاپن (حجم بزرگ) صورت پذیرفته است.

الگـوریتم BB-BC بـر روی معیارهـایی میـانگین فاصـله اقلیدسی، واریانس خطای بازده، میانگین خطـای بـازده در بازار کوچک هنگ کنگ برتری کاملی بر الگوریتم ژنتیـک، بهینـه‌سـازی دسـته پرنـدگان، شـبیه سـازی تبریـدی و جستجوی ممنوعه نشان داد و می‌توان نتیجه گرفـت ایـن الگوریتم برای کلیه سرمایه گذاران اعـم از ریسـک گریـز و ریسک پذیر در بازارهای کوچک قابل توصیه می‌باشد. لازم بذکر است که سه خطای فوق فاصـله مـرز کـارای بدسـت آمده را از مرز کارای عمومی می‌سـنجند کـه طبـق نتـایج حاصله برای کلیه سرمایه گذاران با مقادیر λ های مختلـف جـواب‌هـای حاصـل از ایـن الگـوریتم نسـبت بـه سـایر الگوریتم‌ها فاصله کمتری با مرز کـارای عمـومی دارنـد. در خصوص بازار ژاپن نیز این برتری نسبت به معیار میـانگین فاصله اقلیدسی وجود دارد که با توجه به مقدار تقریباً برابر با صفر این خطا به این مفهوم بوده نقـاط بدسـت آمـده از این الگوریتم تقریباً منطبق بـا نقـاط مـرز کـارای عمـومی می‌باشند.

در خصوص زمان حل این الگوریتم نیز همانگونه کـه بیـان شد نیاز به زمانی در حدود ۳۰٪ زمان مورد نیاز GA برای حل مسأله می‌باشد که این مسأله به سـوآرم محـور بـودن این الگوریتم باز می‌گردد. علیرغم پیشـرفت سیسـتم‌هـای کامپیوتری مسأله زمان حل در مجموعـه داده‌هـای بـزرگ مسأله مهمی بوده که این الگوریتم در خصوص معیار زمان نیز برتری منطقی بر GA دارد.

درخصوص معیار درصد مشارکت نیز در هر سه بازار کمتـر از ۱۲٪ نقاط بدست آمده متعلق به الگـوریتم GA بـوده و مابقی مربوط به الگوریتم BB-BC می‌باشد. بـا توجـه بـه

این مسأله به صورت عـام بـه سـرمایه گـذاران طیـف‌هـای مختلف می‌توان استفاده از این روش را توصیه نمود.

پیشنهادات

با توجه به عملکرد مناسـب الگـوریتم BB-BC پیشـنهاد می‌شود در سایر مسائل مالی نیز عملکرد آن سنجیده شود. از جمله مزایای این روش نسبت به سایر الگوریتم‌های فـرا ابتکاری می توان به سادگی آن اشاره نمود. کـه اسـتفاده و کاربرد آن را در عمل نیز سهل الوصول می‌سازد. همچنـین از ترکیب این الگوریتم با سایر الگوریتم‌ها نیز می‌تـوان بـه عنوان روش‌های جدید بهره گرفـت. مطمئنـاً مزایـای ایـن روش‌ها در کنار یکدیگر به تولید روشی قابل اتکا تر نسبت به استفاده از الگوریتم‌ها به صورت تکی می انجامد.

از جمله ساير موارد پيشنهادي مي‌توان تركيب اين روش را با روش‌هاي بهينه سازي قطعي را در نظر گرفت. به اين شكل كه با استفاده از الگوريتم BB-BC سبد سهام تشكيل شده و نوع سهام موجود در سبد انتخاب گردد سپس با توجه به اين كه محدوديت كارديناليتي از بين رفته مي‌توان با استفاده از روش‌هاي قطعي بهينه سازي نسبت سهام موجود در سبد را بهينه نمود.

منابع و مراجع:

۱.Alatas, B. (۲۰۱۱). Uniform Big Bang–Chaotic Big Crunch optimization. ***Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation***, ۱۶(۹), ۳۶۹۶–۳۷۰۳.

۲.Anione, S., Loraschi, A., & Tettamanzi, A. (۱۹۹۳). A genetic approach to portfolio selection. ***Neural Network World***, ۶, ۵۹۷-۶۰۴.

۳.Bars, I., Chen, S.-H., Steinhardt, P. J., & Turok, N. (۲۰۱۲). Antigravity and the big crunch/big bang transition. ***Physics Letters B***, ۷۱۵(۱–۳), ۲۷۸–۲۸۱.

۴.Camp, C. V, & Huq, F. (۲۰۱۳). CO۲ and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang-big crunch algorithm. ***Engineering Structures***, ۴۸(۰), ۳۶۳–۳۷۲.

۵.Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J., & Sharaiha, Y. (۲۰۰۰). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. ***Computers and Operations Research***, ۲۷, ۱۲۷۱-۱۳۰۲.

۶.Crama, Y., & Schyns, M. (۲۰۰۳). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. ***European Journal of operational research,*** ۱۵۰, ۵۴۶-۵۷۱.

۷.Cura, T. (۲۰۰۹). Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. ***Nonlinear Analysis: Real World Applications,*** ۱۰, ۲۳۹۶-۲۴۰۶.

۸.Dueck, G., & Winker, P. (۱۹۹۲). New concepts and algorithms for portfolio choice. ***Applied Stochastic Models and Data Analysis***, ۸, ۱۵۹-۱۷۸.

۹.Erol,o.k& Eksin,I. (۲۰۰۵). A new optimization method: Big Bang–Big Crunch. ***Advances in Engineering Software*** ۳۷ (۲۰۰۶) ۱۰۶–۱۱۱

۱۰.Fernández, A., & Gómez, S. (۲۰۰۷). Portfolio selection using neural networks. ***Computers & operations research,*** ۳۴, ۱۱۷۷-۱۱۹۱.

۱۱.Fieldsend, J. E., Matatko, J., & Peng, M. (۲۰۰۴). Cardinality constrained portfolio optimisation. ***Intelligent Data Engineering and Automated Learning***–*IDEAL* ۲۰۰۴, ۷۸۸-۷۹۳.

۱۲.Grazia Speranza, M. (۱۹۹۶). A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market. ***Computers & operations research,*** ۲۳, ۴۳۳-۴۴۱.

۱۳.Hasançebi, O., & Kazemzadeh Azad, S. (۲۰۱۲). An exponential big bang-big crunch algorithm for discrete design optimization of steel frames. ***Computers & Structures***, ۱۱۰–۱۱۱(۰), ۱۶۷–۱۷۹.

۱۴.Jansen, R., & Van Dijk, R. (۲۰۰۲). Optimal benchmark tracking with small portfolios. ***The Journal of Portfolio Management,*** ۲۸, ۳۳-۳۹.

۱۵.Kallberg, J. G., & Ziemba, W. T. (۱۹۸۳). Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. ***Management Science***, ۱۲۵۷-۱۲۷۶.

۱۶.Kaveh, A., & Talatahari, S. (۲۰۱۰). Optimal design of Schwedler and ribbed domes via hybrid Big Bang–Big Crunch algorithm. ***Journal of Constructional Steel Research***, ۶۶(۳), ۴۱۲–۴۱۹.

۱۷.Kennedy, J., & Eberhart, R. (۱۹۹۵). **Particle swarm optimization**. IEEE.

۱۸.Konno, H., & Wijayanayake, A. (۲۰۰۱). Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints. ***Mathematical Programming***, ۸۹, ۲۳۳-۲۵۰.

۱۹.Lin, D., Wang, S., & Yan, H. (۲۰۰۱). A multiobjective genetic algorithm for portfolio selection. ***Proceedings of ICOTA***, ۱۵-۱۷.

۲۰.Loraschi, A., & Tettamanzi, A. (۱۹۹۶). An evolutionary algorithm for portfolio selection within a downside risk framework. ***Forecasting Financial Markets, Series in Financial Economics and Quantitative Analysis***, ۲۷۵-۲۸۵.

۲۱.Markowitz Harry, M. (۱۹۵۲). Portfolio selection. ***Journal of Finance,*** ۷, ۷۷-۹۱.

۲۲.Tobin, J. (۱۹۵۸). Liquidity preference as behavior towards risk. ***The Review of Economic Studies***, ۲۵, ۶۵-۸۶.

۲۳.Wang, S., Chen, J., Wee, H., & Wang, K. (۲۰۰۶). Non-linear stochastic optimization using genetic algorithm for portfolio selection. ***International Journal of Operations Research***, ۳, ۱۶-۲۲.

۲۴.Xia, Y., Liu, B., Wang, S., & Lai, K. (۲۰۰۰). **A model for portfolio selection with order of expected returns. *Computers & operations research,*** ۲۷, ۴۰۹-۴۲۲.

۲۵.Yamakazi, H., & Konno, H. (۱۹۹۱). Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. ***Management Science***, ۳۷, ۵۱۹-۵۳۱.

۲۶.Young, M. R. (۱۹۹۸). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. ***Management Science***, ۶۷۳-۶۸۳