



A Robust Optimization Approach to Resources Allocation in Maintained Systems

A. H. Shokouhi & H. Shahriari

Amir H. Shokouhi, PhD student, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology
Hamid Shahriari, Assistance professor, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology

Keywords

Robust Optimization,
Availability;
Redundancy Optimization;
Maintenance Resources

ABSTRACT

Optimization of maintenance resources to maximize the system availability is a major concern in different manufacturing systems. Therefore, a lot of effort is put to construct optimization models to reach the maximum availability level and to reduce the costs of lack of availability. However, despite these efforts, data uncertainty in the real world problems was neglected in proposed models which results models with sophisticated nonlinear constraints. In this article the budget uncertainty model of optimization is considered and its counterpart in resources allocation for maintained systems is presented. The proposed model takes into account the degrees of conservativeness to introduce a robust model of optimization. This model is capable of maximizing the availability for the maintained system under certain conditions. The capability of the model in controlling the effects of uncertainty is investigated by means of simulation studies and reasonable results concluded.

© (نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید) شماره ۱، جلد ۲۱، ۱۳۸۹

(یادداشت فنی)

رویکرد بهینه‌سازی استوار در تخصیص منابع در سیستم‌های نگهداری و تعمیرات

امیرحسین شکوهی و حمید شهریاری

چکیده:

مساله بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات به منظور افزایش سطح دسترسی سیستم همواره مورد توجه پژوهش‌گران و محققان عرصه طراحی سیستم‌های مختلف صنعتی بوده است. بدین ترتیب تلاش‌های بسیار برای ساخت مدل‌های بهینه‌سازی جهت دستیابی به بیشترین سطح دسترسی و در نتیجه کاهش هزینه‌های ناشی از کمبود آن صورت گرفته است. این در حالی است

کلمات کلیدی

بهینه‌سازی استوار،
سطح دسترسی،
بهینه‌سازی اجزاء اضافی،
منابع نگهداری و تعمیرات

تاریخ وصول: ۸۸/۶/۲۲

تاریخ تصویب: ۸۸/۱۲/۱۸

امیرحسین شکوهی، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، Shokouhi@dena.kntu.ac.ir

دکتر حمید شهریاری، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hshahriari@kntu.ac.ir

$$\sum_{i=1}^n rec_i c_{rec_i} + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i cm_i \leq CM \quad (6)$$

که در آن rec_i میزان منابع تعمیرات اصلاحی، y_i نشان دهنده تعداد اجزاء زیر سیستم i ، c_{rec_i} هزینه منابع تعمیرات اصلاحی، cm_i هزینه تعمیرات اصلاحی در زیر سیستم i و $q_i(T)$ احتمال خرابی اجزاء زیر سیستم i است که با فرض نمایی بودن توزیع خرابی ها مقدار آن از معادله (۷) قابل محاسبه است.

$$q_i(T) = 1 - e^{-\lambda_i T} \quad (7)$$

کاسترو و کاوالکا [۱۲] به منظور نشان دادن نقش "منابع تعمیرات اصلاحی" بر روی سطح دسترسی از شاخص فشردگی I بهره گرفته اند که بیان کننده مقدار کاهش میانگین زمان تعمیرات در شرایطی است که ۱۰۰ درصد منابع بر روی جزء خاصی تمرکز یافته باشند. بدین ترتیب نسبت قابلیت اعتماد اجزاء زیر سیستم i را d_i از رابطه (۸) به دست می آید.

$$d_i = [(I-1)rec_i + 1] d_{li} \quad (8)$$

که d_{li} نسبت قابلیت اعتماد در زمانی است که از منابع تعمیرات اصلاحی هیچ بهره ای گرفته نشده است. بدین ترتیب با تلفیق معادلات (۲) و (۸) کاسترو و کاوالکا [۱۲] سطح دسترسی یک سیستم با اجزاء اضافی را به عنوان تابعی از تعداد این اجزاء و منابع تعمیرات اصلاحی در نظر گرفتند که از رابطه (۹) به دست می آید:

$$A_s = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1] d_{li}} \right)^{y_i} \right] \quad (9)$$

با توجه به توضیحات داده شده مدل پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\max A_s = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1] d_{li}} \right)^{y_i} \right]$$

$$s.to: \sum_{i=1}^n c_i y_i \leq C$$

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq W$$

$$\sum_{i=1}^n v_i y_i \leq V$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i c_{rec_i} + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i cm_i \leq CM$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i \leq 1$$

$$y_i \in N \quad \forall i$$

$$rec_i \geq 0 \quad \forall i$$

۲. مدل مساله بهینه سازی سطح دسترسی

کاسترو و کاوالکا [۱۲] در فرآیند تصمیم گیری اقتصادی و توجیه پذیری فنی، با بهره گیری از رویکرد تحلیل رابطه بین سطح دسترسی و قابلیت اعتماد از یک سو و رویکرد به کار بردن اجزاء اضافی در سیستم اصلی از سوی دیگر یک مدل بهینه سازی سطح دسترسی ارائه داده اند که این مدل در برگرفته های دستاوردهای محققانی چون ارتاس [۱۴] و وول [۱۵] می باشد. از آنجا که مدل نهایی ارائه شده توسط کاسترو و کاوالکا [۱۲] به عنوان مدل پایه در این مقاله مورد استفاده قرار می گیرد لذا در این بخش به منظور آشنایی بیشتر با این مدل به طور خلاصه به نحوه شکل گیری این مدل اشاره می شود. به منظور محاسبه سطح دسترسی کاسترو و کاوالکا [۱۲] از معادله (۱) بهره گرفته اند. که در آن A_i بیان گر سطح دسترسی اجزاء زیر سیستم i و y_i نشان دهنده تعداد اجزاء در زیر سیستم i می باشد.

$$A_s = \prod_{i=1}^n [1 - (1 - A_i)^{y_i}] \quad (1)$$

با توجه به آن که در مدل مذکور فرض شده است زمان بین دو خرابی متوالی از توزیع نمایی پیروی می کند، لذا خواهیم داشت:

$$A_s = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{1}{1 + d_i} \right)^{y_i} \right] \quad (2)$$

که d_i نسبت قابلیت اعتماد در زیر سیستم i می باشد و به صورت نسبت بین نرخ تعمیر μ و نرخ خرابی λ آن زیر سیستم تعریف می شود. معادله (۳) بیان کننده کل هزینه سیستم است که با جمع هزینه های اجزاء هر یک از زیر سیستم ها به دست آمده است و به صورت یک محدودیت در نظر گرفته می شود.

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i \leq C \quad (3)$$

به طریق مشابه، محدودیت های وزن و حجم کل سیستم نیز به صورت زیر معرفی شده اند.

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq W \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i y_i \leq V \quad (5)$$

که w_i ، v_i ، c_i به ترتیب میزان هزینه، وزن و حجم مربوط به اجزاء زیر سیستم i می باشد. کاسترو و کاوالکا [۱۲] هزینه تعمیرات اصلاحی سیستم برای زمان ثابت T را طبق محدودیت (۶) معرفی نموده اند.

۲-۲. مدل عدم قطعیت بودجه‌ای

همه شرایط مدل عدم قطعیت بازه‌ای برای مدل عدم قطعیت بودجه‌ای نیز صادق است، با این تفاوت که جمع عناصر نوسانی ξ_i^c نباید از یک کران بالا مثل Γ مربوط به آن بیشتر باشد.

$$\tilde{c}_i = c_i + \hat{c}_i \xi_i^c \quad \xi_i^c \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^c \leq \Gamma^c \quad (16)$$

$$\tilde{w}_i = w_i + \hat{w}_i \xi_i^w \quad \xi_i^w \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^w \leq \Gamma^w \quad (17)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + \hat{v}_i \xi_i^v \quad \xi_i^v \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^v \leq \Gamma^v \quad (18)$$

$$\tilde{m}_i = m_i + \hat{m}_i \xi_i^m \quad \xi_i^m \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^m \leq \Gamma^m \quad (19)$$

$$\tilde{c}^{rec}_i = c^{rec}_i + \hat{c}^{rec}_i \xi_i^{rec} \quad \xi_i^{rec} \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^{rec} \leq \Gamma^{rec} \quad (20)$$

در بهینه‌سازی استوار برای مساله مورد بررسی با عدم قطعیت‌های فوق به دنبال یافتن جوابی است که محدودیت‌های موجود را با توجه به عدم قطعیت‌های موجود ارضاء کرده و تابع هدف را در این حالت ماکزیمم کند.

۳. مدل بهینه‌سازی استوار سطح دسترسی

در این مقاله به منظور دستیابی به یک جواب استوار برای مدل پایه MRO¹، مدل استوار معادل آن که RMRO² گفته می‌شود ارائه می‌گردد. این مدل به دنبال بیشینه کردن مقدار تابع هدف با حضور محدودیت‌های استوار مساله MRO است. در ادامه برای لحاظ کردن عدم قطعیت داده‌ها در مساله مذکور از دو رویکرد اشاره شده در بهینه‌سازی استوار استفاده می‌کنیم.

۳-۱. مدل استوار برای عدم قطعیت بازه‌ای

در این حالت هدف کمینه‌کردن بیشترین مقدار تابع هدف است که اولین بار توسط سویستر [۱۶] ارائه شد. با توجه به این که در این روش به بهینه‌سازی بدترین حالت می‌پردازد، به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند.

برطبق این روش فرض می‌شود که بدترین حالت برای همه داده‌های غیرقطعی رخ می‌دهد، به عبارت دیگر در مساله مورد بررسی حصول بدترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که کلیه پارامترها حداکثر

آنچه در اینجا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و محوریت این مقاله بر آن پایه‌گذاری می‌شود، عدم قطعی بودن پارامترهای مدل پایه است.

بدین معنی که مدل معرفی شده در مجموعه روابط (۱۰) تنها در صورتی معتبر است که داده‌های آن به صورت قطعی معلوم باشند. حال آن که در شرایط واقعی بسیاری از پارامترهای مربوط به روابط (۳)، (۴)، (۵) و (۶) غیر قطعی می‌باشند. بدین ترتیب در این مقاله تلاش می‌شود برای رویارویی با این عدم قطعیت از یک رویکرد بهینه‌سازی تحت عنوان "بهینه‌سازی استوار" استفاده شود. جواب‌های بدست آمده از این روش بهینه‌سازی استوار به عنوان جواب‌های استوار شناخته می‌شوند. در ادبیات موضوع این عدم قطعیت به طور کلی به دو صورت عدم قطعیت بازه‌ای و عدم قطعیت بودجه‌ای تقسیم می‌گردند که در ادامه معرفی می‌شوند.

۲-۱. مدل عدم قطعیت بازه‌ای

فرض کنید که هزینه، وزن، حجم و هزینه‌ی تعمیر هر جزء و همچنین هزینه‌ی منابع تعمیر اصلاحی متغیرهای تصادفی مستقل هستند که به ترتیب با $\tilde{c}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i, \tilde{m}_i$ و \tilde{c}^{rec}_i نشان داده می‌شود و هر کدام از آن‌ها به ترتیب در بازه‌ی $[c_i, \hat{c}_i]$ ، $[w_i, \hat{w}_i]$ ، $[v_i, \hat{v}_i]$ ، $[m_i, \hat{m}_i]$ و $[c^{rec}_i, \hat{c}^{rec}_i]$ دارای یک توزیع متقارن هستند. J^c, J^w, J^v, J^m و J^{rec} را مجموعه‌ی‌هایی است که به ترتیب $\tilde{c}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i, \tilde{m}_i$ و \tilde{c}^{rec}_i برای آن‌ها غیرقطعی می‌باشد. بنابراین می‌توان میزان هر یک متغیرهای فوق را به شکل زیر نشان داد:

$$\tilde{c}_i = c_i + \hat{c}_i \xi_i^c \quad \xi_i^c \in [0, +1] \quad \forall i \quad (11)$$

$$\tilde{w}_i = w_i + \hat{w}_i \xi_i^w \quad \xi_i^w \in [0, +1] \quad \forall i \quad (12)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + \hat{v}_i \xi_i^v \quad \xi_i^v \in [0, +1] \quad \forall i \quad (13)$$

$$\tilde{m}_i = m_i + \hat{m}_i \xi_i^m \quad \xi_i^m \in [0, +1] \quad \forall i \quad (14)$$

$$\tilde{c}^{rec}_i = c^{rec}_i + \hat{c}^{rec}_i \xi_i^{rec} \quad \xi_i^{rec} \in [0, +1] \quad \forall i \quad (15)$$

که در آن $\xi_i^c, \xi_i^w, \xi_i^v, \xi_i^m$ و ξ_i^{rec} متغیرهای تصادفی مستقل بین صفر و یک هستند که نوسان در داده‌ها را نشان می‌دهند. به این حالت که در آن همه عناصر بردار نوسان ξ_i^c می‌توانند در بازه $[0, 1]$ تغییر کنند، مدل عدم قطعیت بازه‌ای می‌گویند.

¹ Maintenance Resources Optimization (MRO)

² Robust Maintenance Resources Optimization (RMRO)

۳-۲. بهینه‌سازی استوار با استفاده از مدل عدم قطعیت بودجه‌ای

برای مقابله با عیب روش سویستر [۱۶] که به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند، بن-تال و نمیروفسکی [۱۷، ۱۸ و ۱۹] و ال-قاوی [۲۰] و [۲۱] شیوه‌هایی ارائه کردند. روش‌های پیشنهادی آن‌ها خود باعث سخت‌تر شدن مساله استوار و عدم قابلیت اعمال آن بر روی مسایل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته می‌شود.

کولیس و یو [۲۲] برای مسایل بهینه‌سازی گسسته به طور خاص یک چارچوب بهینه‌سازی گسسته استوار ارائه کرده‌اند که به دنبال یافتن جوابی است که عملکرد بدترین وضعیت را تحت مجموعه‌ای از سناریوها برای داده‌ها کمینه کند. متأسفانه تحت رویکرد آن‌ها، مدل استوار معادل بسیاری از مسایل بهینه‌سازی گسسته، قابل حل در زمان چند جمله‌ای نیستند. از سوی دیگر یک روش بهینه‌سازی استوار برای مسایل برنامه‌ریزی خطی توسط برتسیمس و سیم [۲۳] و [۲۴] ارائه شد که از یک سو میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم می‌باشد و از سوی دیگر بر درجه سختی مساله نمی‌افزاید. این روش قابلیت اعمال آن بر روی مسایل بهینه‌سازی گسسته و همچنین بهینه‌سازی ترکیبی نیز می‌باشد.

عدم قطعیت در روش برتسیمس و سیم [۲۳] و [۲۴] بودجه‌ای است و فرض می‌شود که حداکثر به تعداد Γ تا از ضرایب محدودیت‌ها یا تابع هدف تغییر می‌کند. به Γ سطح حفاظت می‌گویند و یک عدد صحیح نامنفی کوچکتر یا مساوی تعداد داده‌های غیر قطعی در محدودیت‌ها یا تابع هدف مربوطه می‌باشد. بدین ترتیب هنگامی که حداکثر Γ تا از این ضرایب تغییر کند جواب بهینه استوار به دست آمده قطعاً بهینه خواهد ماند. از سوی دیگر در مواقعی که بیش از Γ تا از ضرایب تابع هدف تغییر کند باز جواب بهینه استوار، با احتمال بالایی موجه و نزدیک به بهینه باقی می‌ماند.

در این روش که تقریبی از بهینه‌سازی استوار با عدم قطعیت بازه‌ای است، با در نظر گرفتن روابط (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) و اعمال آن بر روی مساله MRO، مدل $RMRO_2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

مقدار خود را اختیار کنند بدین ترتیب برای $\tilde{c}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i, \tilde{c}_i$ و $cm_i, crec_i$ به ترتیب مقادیر $c_i + \hat{c}_i, w_i + \hat{w}_i, v_i + \hat{v}_i, c_i + \hat{c}_i$ در نظر می‌گرفته می‌شود و مساله‌ی MRO حل می‌گردد.

بر مبنای رویکرد عدم قطعیت بازه‌ای مجموع روابط (۲۱) که از آن با نام $RMRO_1$ یاد می‌شود، مدل بهینه‌سازی استوار مساله MRO در مجموع روابط (۱۰) را ارائه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \max \quad & A_s = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1]d_{ii}} \right)^{y_i} \right] \\ \text{sto:} \quad & C \geq \sum_{i=1}^n (c_i + \hat{c}_i) y_i \\ & \sum_{i=1}^n (w_i + \hat{w}_i) y_i \leq W \\ & \sum_{i=1}^n (v_i + \hat{v}_i) y_i \leq V \\ & \sum_{i=1}^n rec_i (crec_i + cr\hat{c}_i) + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i (cm_i + c\hat{m}_i) \leq CM \\ & \sum_{i=1}^n rec_i \leq 1 \\ & y_i \in N \quad \forall i \\ & rec_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned} \tag{21}$$

این رویکرد که محافظه‌کارانه‌ترین روش بهینه‌سازی استوار است، بسیار ساده می‌باشد و الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مساله MRO را می‌توان برای حل آن استفاده کرد؛ اما از آنجا که بدترین حالت در نظر گرفته می‌شود، به میزان زیادی از مقدار تابع هدف کاسته می‌گردد. در ادامه یک روش بهینه‌سازی استوار که میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است برای مساله MRO توضیح داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & A_s = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1]d_{ii}} \right)^{y_i} \right] \\ \text{sto:} \quad & \sum_{i=1}^n c_i y_i + \beta^c (\Gamma^c) \leq C \\ & \sum_{i=1}^n w_i y_i + \beta^w (\Gamma^w) \leq W \\ & \sum_{i=1}^n v_i y_i + \beta^v (\Gamma^v) \leq V \\ & \sum_{i=1}^n crec_i rec_i (+) + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i (cm_i + c\hat{m}_i) + \beta^{crec} (\Gamma^{crec}) + \beta^{cm} (\Gamma^{cm}) \leq CM \end{aligned} \tag{22}$$

$$\beta^c(\Gamma^c) = \max_{\{S^c \cup \{i^c\} | S^c \subseteq J^c, |S^c| = \lfloor \Gamma^c \rfloor, i^c \in J^c \setminus S^c\}} \left\{ \sum_{i \in S^c} \hat{c}_i y_i + (\Gamma^c - \lfloor \Gamma^c \rfloor) \hat{c}_{i^c} y_{i^c} \right\}$$

$$\beta^v(\Gamma^v) = \max_{\{S^v \cup \{i^v\} | S^v \subseteq J^v, |S^v| = \lfloor \Gamma^v \rfloor, i^v \in J^v \setminus S^v\}} \left\{ \sum_{i \in S^v} \hat{v}_i y_i + (\Gamma^v - \lfloor \Gamma^v \rfloor) \hat{v}_{i^v} y_{i^v} \right\}$$

$$\beta^w(\Gamma^w) = \max_{\{S^w \cup \{i^w\} | S^w \subseteq J^w, |S^w| = \lfloor \Gamma^w \rfloor, i^w \in J^w \setminus S^w\}} \left\{ \sum_{i \in S^w} \hat{w}_i y_i + (\Gamma^w - \lfloor \Gamma^w \rfloor) \hat{w}_{i^w} y_{i^w} \right\}$$

$$\beta^{crec}(\Gamma^{crec}) = \max_{\{S^{crec} \cup \{i^{crec}\} | S^{crec} \subseteq J^{crec}, |S^{crec}| = \lfloor \Gamma^{crec} \rfloor, i^{crec} \in J^{crec} \setminus S^{crec}\}} \left\{ \sum_{i \in S^{crec}} cr\hat{c}_i rec_i + (\Gamma^{crec} - \lfloor \Gamma^{crec} \rfloor) cr\hat{c}_{i^{crec}} rec_{i^{crec}} \right\}$$

$$\beta^{cm}(\Gamma^{cm}) = \max_{\{S^{cm} \cup \{i^{cm}\} | S^{cm} \subseteq J^{cm}, |S^{cm}| = \lfloor \Gamma^{cm} \rfloor, i^{cm} \in J^{cm} \setminus S^{cm}\}} \left\{ \sum_{i \in S^{cm}} q_i(T) cm\hat{m}_i y_i + (\Gamma^{cm} - \lfloor \Gamma^{cm} \rfloor) q_i(T) cm\hat{m}_{i^{cm}} y_{i^{cm}} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i \leq 1$$

$$y_i \in N \quad \forall i$$

$$rec_i \geq 0 \quad \forall i$$

که این مدل با مدل زیر معادل است:

$$\max \quad A_s = \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(\frac{1}{1 + [(T-1)rec_i + 1]d_{1i}} \right)^{y_i} \right]$$

$$s.to : \quad \sum_{i=1}^n c_i y_i + \sum_{i \in J^c} p_i^c + \omega^c \Gamma^c \leq C$$

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i + \sum_{i \in J^w} p_i^w + \omega^w \Gamma^w \leq W$$

$$\sum_{i=1}^n v_i y_i + \sum_{i \in J^v} p_i^v + \omega^v \Gamma^v \leq V$$

$$\sum_{i=1}^n crec_i y_i + \sum_{i=1}^n cm_i y_i + \sum_{i \in J^{crec}} p_i^{crec} + \sum_{i \in J^{cm}} p_i^{cm} + \omega^{cm} \Gamma^{cm} + \omega^{crec} \Gamma^{crec} \leq CM(T) \quad (23)$$

$$\omega^c + p_i^c \geq \hat{c}_i y_i \quad \forall i \in J^c$$

$$\omega^w + p_i^w \geq \hat{w}_i y_i \quad \forall i \in J^w$$

$$\omega^v + p_i^v \geq \hat{v}_i y_i \quad \forall i \in J^v$$

$$\omega^{crec} + p_i^{crec} \geq cr\hat{c}_i y_i \quad \forall i \in J^{crec}$$

$$\omega^{cm} + p_i^{cm} \geq cm\hat{m}_i y_i \quad \forall i \in J^{cm}$$

$$p_i^c \geq 0 \quad \forall i \in J^c$$

اثبات:

به منظور اثبات معادل بودن دو مدل (۲۲) و (۲۳) فرض کنید به ازای یک Γ^c و y^* داده شده، $\beta^c(y^*, \Gamma^c)$ به صورت زیر باشد:

$$\beta^c(y^*, \Gamma^c) = \max_{\{S^c \cup \{i^c\} | S^c \subseteq J^c, |S^c| = \lfloor \Gamma^c \rfloor, i^c \in J^c \setminus S^c\}} \sum_{i \in S^c} \hat{c}_i y_i^* \quad (24)$$

پرواضح است که $\beta^c(y^*, \Gamma^c)$ با جواب بهینه زیر برابر است:

$$\max \quad \beta^c(y^*, \Gamma^c) = \sum_{i \in J^c} \hat{c}_i y_i^* z_i^c \quad (25)$$

$$s.to : \quad \sum_{i \in J^c} z_i^c \leq \Gamma^c$$

$$0 \leq z_i^c \leq 1 \quad \forall i \in J^c$$

$$p_i^w \geq 0 \quad \forall i \in J^w$$

$$p_i^v \geq 0 \quad \forall i \in J^v$$

$$p_i^{crec} \geq 0 \quad \forall i \in J^{crec}$$

$$p_i^{cm} \geq 0 \quad \forall i \in J^{cm}$$

$$y_i \in N \quad \forall i$$

$$rec_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i \leq 1$$

$$\omega^c, \omega^w, \omega^v, \omega^{crec}, \omega^{cm} \geq 0$$

دوگان مساله (۲۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta^c (y^*, \Gamma^c) = \sum_{i \in J^c} p_i^c + \omega^c \Gamma^c \\ \text{s to :} \quad & \omega^c + p_i^c \geq \hat{c}_i y_i^* \quad (26) \\ & p_i^c \geq 0 \quad \forall i \in J^c \\ & \omega^c \geq 0 \end{aligned}$$

لذا بدیهی است که جواب بهینه (۲۴) با (۲۵) و آن نیز با (۲۶) برابر است و بدین ترتیب می‌توان برای محدودیت‌های مربوط به روابط

(۴)، (۵) و (۶) به همین صورت عمل نمود که با جایگزینی آن‌ها در مدل (۲۲)، مدل (۲۳) به دست خواهد آمد.

۴. نتایج تجربی

به منظور بررسی تجربی مساله MRO، مثال ارائه شده در کاسترو و کاولکا [۱۲] که در آن پارامترها قطعی در نظر گرفته شده‌اند تحت شرایط غیر قطعی بودن مجدداً در نظر گرفته شده است. در این نمونه مثال یک سیستم تولیدی متشکل از پنج زیر سیستم می‌باشد که هر زیر سیستم می‌تواند حاوی جزء یا اجزاء اضافی باشد که مشخصات این اجزاء در جدول ۱ ارائه شده است..

جدول ۱. مشخصات مربوط به زیرسیستم‌ها [۱۲]

Subsystem	MTBF	MTTR	Design Cost	Weight	Volume	Corrective maintenance cost	Corrective maintenance resources cost
۱	۵۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۵	۶۰	۷
۲	۵۵۰	۳۵	۵۵	۴۵	۵۰	۴۰	۳
۳	۶۰۰	۴۰	۵۵	۸۰	۷۰	۴۵	۴
۴	۷۵۰	۳۰	۴۰	۳۵	۳۵	۳۰	۲
۵	۵۰۰	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۵۰	۵

با آن که مقدار تابع هدف حاصل از حل مدل MRO بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده است اما به ازای تغییر کوچکی در پارامترها، جواب به دست آمد به طور کلی ناموجه خواهد بود. از طرف دیگر مقادیر بدست آمده برای مدل $RMRO_1$ همواره موجه می‌باشد ولی کاهش قابل ملاحظه‌ای در مقدار تابع هدف نسبت به مدل MRO دیده می‌شود.

این در حالی است که بسیاری از موارد عدم قطعیت موجود در داده‌ها به طور هم زمان رخ نمی‌دهند به همین علت در نظر گرفتن بدترین حالت برای آن‌ها در این گونه مسائل قطعاً بهترین راه ممکن نخواهد بود.

بنابراین به کمک مدل $RMRO_2$ و با در نظر گرفتن تعداد درجه‌ی محافظه‌کاری ۳ (از ۵) برای تمامی Γ ‌ها نتایجی به دست آمده است که گرچه مقدار تابع هدف آن نسبت به مدل MRO کاهش یافته است اما این مقدار اختلاف نسبت به تفاوت بین تابع هدف مدل‌های MRO و $RMRO_1$ به مراتب کمتر است. بدیهی است اختلاف اندک در تابع هدف به ازای پذیرش ریسک ناموجه بودن جواب حاصل از مدل $RMRO_1$ است.

به منظور محاسبه‌ی احتمال ناموجه بودن جواب حاصل از مدل $RMRO_1$ ، تابع توزیع داده‌های غیرقطعی یکنواخت فرض می‌شود و با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی به بررسی احتمال نقض هر یک از محدودیت‌ها پرداخته شده است که نتیجه در جدول ۴ ارائه می‌شود.

T برابر ۱۰۰ واحد (که هم واحد با $MTBF$ و $MTTR$ می‌باشد) فرض می‌شود و حدود محدودیت‌های سیستم به ترتیب عبارتند از $C=1000$ ، $W=1000$ ، $V=1000$ و $CM(T)=500$ می‌باشند و مقادیر تغییر در داده‌ها برای شرایط غیرقطعی، ۴۰٪ مقدار مشخص شده‌ی قطعی آن‌ها در جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود که این تغییرات در جدول ۲ ارائه شده است..

جدول ۲. میزان تغییرات داده‌های غیر قطعی

	\hat{c}_i	\hat{w}_i	\hat{v}_i	\hat{cm}_i	\hat{crec}_i
۱	۲۰	۲۰	۲۲	۲۴	۲.۸
۲	۲۲	۱۸	۲۰	۱۶	۱.۲
۳	۲۲	۳۲	۲۸	۱۸	۱.۶
۴	۲۰	۱۴	۱۴	۱۲	۰.۸
۵	۲۴	۲۸	۲۶	۲۰	۲

با قطعی در نظر گرفتن داده‌های جدول ۱ مدل MRO و غیرقطعی در نظر گرفتن همین داده‌ها توسط جدول ۲ مدل $RMRO_1$ (مدل ۲۱) و $RMRO_2$ (مدل ۲۳ درجه‌ی محافظه‌کاری ۳ از ۵) به کمک نرم‌افزار GAMS حل شده است که مقادیر متغیر تصمیم و جواب بهینه هر یک از مدل‌ها از قرار جدول ۳ می‌باشد.

¹ Mean Time Between Failure

² Mean Time To Repair

جدول ۳. نتایج حل مدل‌های MRO_1 و MRO_2

Subsystems	Redundancies	Corrective maintenance resources (% of all available resources)		
		MRO		
۱	۳	۳۴.۸	۱	۳
۲	۵	۰.۰	۲	۵
۳	۳	۲۴.۲	۳	۳
۴	۳	۱۲.۶	۴	۳
۵	۴	۰.۰	۵	۴
Availability		۹۹.۹۷	۰۷.۳۰	Availability
Feasibility		۰.۰۰	۱۰۰	Feasibility

جدول ۴. احتمال نقض محدودیت‌ها در مدل $RMRO_2$

Condition	Number	Probability %
(DC)۱	۱۵۳	۱.۵۳
(W)۲	۶۵	۰.۶۵
(V)۳	۵۴	۰.۵۴
(CREC & CM)۴	۱	۰.۰۱

منابع

[1] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Reliability Optimization of Redundant System*. SAE Tech Papers, Danvers, MA, USA 2002;1(1):1-9.

[2] Kumar, A., Pathak, R.M., Gupta, Y.P., *Genetic-Algorithm-Based Reliability Optimization for Computer Network Expansion*. IEEE Trans Reliab 1995;44(1): pp. 63-72.

[3] Painton, L., Campbell, J., *Genetic Algorithm in Optimization of System Reliability*. IEEE Trans Reliab 1995;44(2):172-8.

[4] Rubinstein, R.Y., Levitin, G., Lisnianski, A., *Ben-Haim H. Redundancy Optimization of Static Series-parallel Reliability Models Under Uncertainty*. IEEE Trans Reliab 1997;46(4):503-11.

[5] Levitin, G., *Redundancy Optimization for Multi-State System with Fixed Resource-Requirements and Unreliable Sources*. IEEE Trans Reliab 2001;50(1):52-9.

[6] Levitin, G., *Optimal Allocation of Elements in Linear Multi-State Sliding Window System*. Reliab Eng Syst Saf 2002;76:247-55.

[7] Coit, D.W., Smith, A.E., *Reliability Optimization of Series-Parallel System Using a Genetic Alorithm*. IEEE Trans Reliab 1996;45(2):254-66.

[8] Levitin, G., Lisnianski, A., Ben-Hain, H., Elmakis, D., *Redundancy Optimization for Multi-State System*. IEEE Trans Reliab 1998;47(2): 165-72.

[9] Lisnianski, A., Levitin, G., Ben-Hain, H., *Structure optimization of multistate system with time redundancy*. Reliab Eng Syst Saf 2000;67: 103-12.

[10] Levitin, G., Lisnianski, A., *Joint Redundancy and Maintenance Optimization for Multistate Series-Parallel systems*. Reliab Eng Syst Saf 1999;64: pp. 33-42.

[11] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Availability Optimization with Genetic Algorithm*. Int J Qual Reliab Manage 2003;20(7):847-63.

[12] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Maintenance Resources Optimization Applied to a Manufacturing System*. Reliab Eng Syst Saf 2005;91:413-20.

بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که در درجه‌ی محافظه‌کاری ۳، در بدترین حالت حدود ۲/۷ درصد امکان ناموجه بودن جواب به دست آمده از این روش وجود دارد لذا با توجه به میزان افزایش در تابع هدف، پذیرش این ریسک معقول به نظر می‌رسد. لازم به ذکر است که به منظور افزایش سطح دسترسی به دست آمده از مدل $RMRO_1$ تا سطح دسترسی حاصل از مدل $RMRO_2$ نیازمند به افزایشی در حدود ۲۴۰ واحد در مقدار CM هستیم. به عبارت دیگر باید میزان منابع مربوطه را به حدود ۱/۵ برابر حالت فعلی تغییر دهیم که مقدار قابل توجهی به نظر می‌رسد و توجیه اقتصادی ندارد.

۵. نتیجه‌گیری

همواره یکی از دغدغه‌های اصلی مشاوران صنعتی و کارشناسان طراحی سیستم‌ها، تخصیص بهینه منابع نگهداری و تعمیرات و تعیین تعداد اجزاء اضافی برای هر یک از اجزاء سیستم به منظور بالا بردن سطح دسترسی آن می‌باشد. با توجه به این که مساله با هزینه‌های گوناگونی نظیر هزینه طراحی، هزینه استفاده از منابع و غیره در ارتباط است و این هزینه‌ها اکثراً مقادیر غیر قطعی است، دستیابی به جواب بهینه استوار برای آن از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای مدل عدم قطعیت بودجه‌ای، به جواب بهینه استوار رسیدیم که درجه محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است و میزان جذابیت آن با استفاده از شبیه‌سازی تایید شد. اعمال نقش ارزش زمانی پول در مدل‌سازی مساله، توسعه‌ی روش‌های فرا ابتکاری به منظور حل این مساله و همچنین بررسی عدم قطعیت در MTBF و MTTR می‌توانند به عنوان مواردی برای مطالعات آتی مطرح گردند.

- [13] Dantzig, G. B., "Linear Programming Under Uncertainty". Mgmt. Sci. 197-206, 1955.
- [14] Ertas, A., The engineering design process. London:Wiley; 1993, P. 525.
- [15] Wohl, J.G., *System Operational Readiness and Equipment Dependability*. IEEE Trans Reliab 1966; R-15(1):1-6.
- [16] Soyster, A.L., "Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming", Oper. Res. 21, 1973, pp.1154-1157.
- [17] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.,: "Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data", Mathematical Programming, 88, 2000, pp. 411-424.
- [18] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., "Robust Solutions to Uncertain Programs", Operations Research Letters 25, 1999, pp. 1-13.
- [19] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.,: "Robust Convex Optimization", Mathematical Operations Research, 23, 1998, pp. 769-805.
- [20] El-Ghaoui, L., Lebret, H., "Robust Solutions to Least-Square Problems to Uncertain Data Matrices", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 18, 1997, pp. 1035-1064.
- [21] El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., "Robust solutions to Uncertain Semidefinite Programs", SIAM J. Optim. 9, 1998, pp. 33-52.
- [22] Kouvelis, P., Yu, G.,: "Robust Discrete Optimization and its Applications", Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA. 1997.
- [23] Bertsimas, D., Sym, M., "The Price of the Robustness", Operations Research, Vol(52)- 2004 , pp:35-53
- [24] Bertsimas, D., Sym, M., "Robust Discrete Optimization and Network Flows", Mathematical Programming, Vol(98)- 2002, pp49-71