

فرمول‌بندی المان محدود مسائل تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک بر مبنای مدل وارهدگی ماکسول تعمیم یافته

حسین اشرفی^۱ و مهرداد فرید^۲

قطب علمی محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز
(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۱/۳۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۰/۱۵)

چکیده

هدف مقاله حاضر توسعه یک فرمول‌بندی محاسباتی المان محدود نموی-انطباقی بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای شبه‌استاتیک تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک می‌باشد. از مدل تعمیم یافته ماکسول برای مدل‌سازی توابع وارهدگی معادلات متشکله ویسکوالاستیک بهره گرفته شده که در قالب دو تابع وارهدگی کلی در اتساع (پاسخ حجمی) و برش (پاسخ انحرافی) نشان داده می‌شود. در این فرمول‌بندی، توابع وارهدگی به وسیله حاصل جمع سری‌های توابع نمایی کاهشی با زمان بیان می‌شوند. بر اساس اعمال اصل کار مجازی، یک فرمول‌بندی مؤثر المان‌های محدود با یک فرآیند نموسازی در معادلات وارهدگی ویسکوالاستیک بدست آمده است. به منظور تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک نیز، بر اساس شرایط سینماتیکی و هندسی اجزای در حال تماس، از رهیافت لاگرانژ الحاقی انطباقی استفاده گردیده است. همگرایی مناسب نتایج حاصل از مثال‌های عددی با نتایج حل تحلیلی نشانگر قابلیت‌های کاربردی بالای مدل المان‌های محدود ارائه شده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات وارهدگی ویسکوالاستیک، مسائل تماسی، حل نموی-انطباقی، رهیافت لاگرانژ الحاقی

A Finite Element Formulation of Contact Problems for Viscoelastic Structures, Based on the Generalized Maxwell Relaxation Model

H. Ashrafi and M. Farid

Center of Excellence in Computational Mechanics, Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Shiraz Univ.

ABSTRACT

The objective of this study is to develop a general finite element formulation associated with an incremental adaptive procedure established for the calculation of contact pressure distributions in viscoelastic structures. A generalized Maxwell model has been used to model the viscoelastic constitutive equations in which bulk and shear relaxation functions are represented by sum of a series of decaying exponential functions of time. Based on the principle of virtual work, an effective finite element formulation, associated with an incremental relaxation procedure, has been developed. The viscoelastic contact behavior has been studied through an improved augmented Lagrangian approach, based on kinematical conditions of contact bodies. The proper convergence caused by the numerical examples with those obtained from analytical results shows the applicability of presented finite element formulation.

Key Words: Relaxation Viscoelastic Equations, Contact Problems, Incremental Adaptive Procedure, Augmented Lagrangian Approach

۱-کارشناس ارشد: ashrafi@shirazu.ac.ir

۲-استادیار (نویسنده پاسخگو): farid@succ.shiraz.ac.ir

۱- مقدمه

مسائل مقدار مرزی در برگیرنده تماس یکی از مهمترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک، سازه و همچنین در کاربردهای علوم فضایی، علوم پزشکی و محیط زیست می‌باشند. این نوع مسائل در برهمکنش‌های مکانیکی سامانه‌های فیزیکی به دلیل نامشخص بودن ناحیه تماسی به عنوان مسائل مقدار مرزی غیرخطی شناخته می‌شوند و به الگوریتم‌های حل خاصی نیاز دارند. در این برهمکنش‌ها بسته به کاربرد سیستم فیزیکی ممکن است رفتار اصطکاکی، پاسخ گذرای نواحی مشترک، کوپلینگ ترمومکانیکی، برهمکنش با روانسازها یا لایه‌های میانجی سیال با پیکره هدف و تزویج آسیب سایشی نیز مورد تحلیل قرار گیرند. اغلب مسائل مرتبط با مکانیک تماس به دلیل طبیعت غیرخطی و پیچیده تماس در فرآیندهای طراحی مرسوم با فرضیات خاصی بطور تقریبی حل می‌شدند. اما امروزه مکانیسم‌های تماس را می‌توان با گسترش تکنولوژی کامپیوترهای مدرن با بکارگیری ابزاری به نام مکانیک محاسباتی شبیه‌سازی نمود.

مسائل کلاسیک چرخ دنده‌ها، یاتاقان‌ها و بادامک‌ها، تماس تایر با جاده، شکل دهی مواد، اتصال اعضای ساختاری سازه‌ها به وسیله پیچ و مهره یا پدیده ضربه اتومبیل‌ها از سطوح کاربرد تحلیل‌های تماسی در فرآیندهای طراحی مهندسی مکانیک می‌باشند. در برخی از این موارد هم نیاز به تأمل بیشتری در معادلات متشکله غیرالاستیک و گاهی نیز تغییرشکل‌های کراندار وجود دارد. از سوی دیگر به دلیل رفتار ویسکوالاستیک سازه‌های مهندسی - پاسخ خزشی و وارهدگی تنشی - لزوم تحلیل برهمکنش‌های مکانیکی ناشی از تماس و ضربه در طراحی سازه‌هایی ایمن بسیار احساس می‌گردد.

در واقع هر پدیده در طبیعت به کمک قوانین فیزیک بر حسب معادلات جبری، دیفرانسیلی و یا انتگرالی قابل توصیف می‌باشد. مطالعه پدیده‌های فیزیکی توسط محققان علوم مهندسی در دو راستای اصلی مدل‌سازی و فرمول‌بندی پدیده‌ها و تحلیل عددی مدل ریاضی معطوف می‌باشد. اگرچه استخراج معادلات حاکمه اکثر مسائل مهندسی دشوار نمی‌باشد ولی حل آن‌ها با روش‌های تحلیلی دقیق بسیار دشوار و در مواردی هم غیرممکن

است. در سال‌های اخیر شاخه‌های متفاوتی را می‌توان به دلیل تنوع کاربردی گسترده مسائل تماسی در مکانیک محاسباتی از یکدیگر متمایز نمود که مهمترین آن‌ها عبارتند از: روش‌های تفاضل محدود، روش‌های المان‌های مرزی، روش‌های بدون المان، روش‌های المان‌های گسسته، روش سیستم‌های چندپیکره و روش‌های المان‌های محدود [۱-۲]. بطور کلی در منابع دو نوع فرمول‌بندی اصلی نیز برای حل مسائل تماسی مورد استفاده قرار گرفته است: فرمول‌بندی‌های نامساوی تغییراتی و تساوی تغییراتی. از نامساوی‌های تغییراتی که بیانگر اصل کار مجازی به شکل نامساوی می‌باشد در فرمول‌بندی نوع اول استفاده می‌شود. ولی اغلب برای حل مسائل تماسی در کاربردهای عملی از فرمول‌بندی‌های تساوی تغییراتی استفاده می‌شود. در فرمول‌بندی نوع دوم هم از برابری‌های تغییراتی منتجه از اصل کار مجازی استفاده می‌شود [۳].

ادن^۱ و کیکوچی^۲ [۴] مسائل تماسی بدون اصطکاک را با استفاده از نامساوی‌های تغییراتی فرمول‌بندی کردند و در خصوص وجود و یکتایی حل خود نیز با ارائه مثال‌های عددی بحث نمودند. سیمو^۳ و لارسن^۴ [۵] نیز برای نخستین مرتبه از رهیافت لاگرانژ الحاقی برای تحلیل مسائل تماسی با قابلیت بهنگام‌سازی خودکار ضریب پنالتی و ارضای قیود از طریق مقادیر محدود پنالتی استفاده نمودند. حل مستقیم انتگرال‌های وارهدگی ولترا از طریق کاربرد انتگرال گیری گام به گام تفاضل محدود توسط لی^۵ و راجرز^۶ [۶] در تحلیل تنش‌های ویسکوالاستیک ارائه شد. تیلور^۷ و همکارانش [۷] هم یک فرم بازگشتی را برای معادلات متشکله ویسکوالاستیک کلون استخراج کردند که آن‌ها را قادر به حل مسائل زیادی می‌ساخت. مدل ویسکوالاستیک سه بعدی نوبنی برای تحلیل مکانیک آسیب در این نوع پیکره‌ها به وسیله

1-Oden
2-Kikuchi
3-Simo
4-Laursen
5-Lee
6-Rogers
7-Taylor

توابع واحد و دل‌تا توسط اشرفی [۱۶-۱۵] ارائه گردید، که در آن برای حل قیود تماسی ویسکوالاستیک نیز از یک رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبود یافته استفاده شد.

بطور کلی، تماس در پیکره‌های تغییرشکل پذیر به دلیل تغییر پیوسته شرایط مرزی در نواحی مشترک تماسی با اعمال نیرو یک مسئله غیرخطی می‌باشد. از سوی دیگر، تنش‌های تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک، هم تحت تأثیر خواص الاستیک و هم خواص ویسکوز می‌باشند. از این رو هم پیکربندی تماسی و هم توزیع تنش‌های تماسی وابسته به زمان خواهند بود و با یک مسئله وابسته به زمان غیرخطی روبرو می‌گردیم. در این مقاله به توسعه‌ی یک فرمول‌بندی کلی بر اساس روش المان‌های محدود با در نظر گرفتن تماس در سازه‌های ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله از یک مدل ماکسول تعمیم‌یافته استفاده می‌شود که بر مبنای آن یک فرمول‌بندی جدید با یک فرآیند نموسازی در معادلات وارهیدگی استخراج می‌گردد. مدل ماکسول تعمیم‌یافته که جامع‌ترین مدل برای بیان رفتار متشکله ویسکوالاستیک محسوب می‌شود را می‌توان در قالب دو تابع وارهیدگی در اتساع و برش بیان نمود. در این فرمول‌بندی وابسته به زمان به دلیل اینکه جابجایی و کرنش کل در هر لحظه در محاسبه تنش کل مورد استفاده قرار نمی‌گیرند از بروز خطاهای عددی که در اثر انتخاب طول گام‌های زمانی بزرگتر ممکن است ایجاد شوند نیز جلوگیری می‌کند.

۲- مدل‌سازی محیط‌های پیوسته معادلات متشکله

وارهیدگی ماکسول تعمیم یافته

قابلیت ذخیره‌سازی و استهلاک هم‌زمان انرژی مکانیکی در هنگام مواجهه با نیروی خارجی در برخی مواد پرکاربرد مهندسی وجود دارد که ویسکوالاستیک نامیده می‌شوند. معادلات متشکله ویسکوالاستیک به صورت ذاتی نه تنها شامل تنش و کرنش بلکه در برگیرنده‌ی آهنگ‌های زمانی تغییرات تنش و کرنش نیز می‌باشند.

مختصات یک نقطه از جسمی در پیکربندی مرجع دستگه کارترین قائم با X_i و در پیکربندی فعلی با x_i نشان داده می‌شود. تاریخچه زمانی حرکت پیوسته و

روش المان‌های محدود و انتگرال گیری نقطه میانی توسط سیمو^۱ [۸] ارائه شد. زوج^۲ و همکارانش [۹] هم در یک مدل المان‌های محدود سه بعدی شبه استاتیکی از یک فرمول‌بندی نموی مستقیم برای اعمال به معادلات متشکله‌ی یک محیط ویسکوالاستیک ارتوتروپیک استفاده کردند. ایدسمن^۳ و همکارانش [۱۰] از گسسته‌سازی نامتقارن و یک فرمول‌بندی تغییراتی که از روش‌های پیوسته و غیرپیوسته گالرکین استخراج می‌شد برای مدل‌سازی رفتار وارهیدگی ویسکوالاستیک سازه‌ها با مدل ماکسول تعمیم‌یافته در دامنه زمانی و فضایی پیوسته استفاده نمودند.

یک مدل المان‌های محدود دو بعدی نیز بر اساس اعمال اصل کار مجازی توسط چن^۴ و همکارانش [۱۱] با استفاده از یک فرآیند نموی در معادلات متشکله‌ی مدل ماکسول تعمیم یافته برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک ارائه گردید. بر اساس یک فرمول‌بندی تغییراتی و استفاده از اصل پس‌رونده اولیر، فرناندز^۵ و سوفونی^۶ [۱۲] مسئله‌ی تماس شبه استاتیکی بدون اصطکاک بین یک پیکره‌ی ویسکوالاستیک با یک بستر تغییرشکل پذیر را مورد توجه قرار دادند. آماساد و فابر [۱۳] نیز مسئله تماسی تک سوپه بین یک پیکره ویسکوالاستیک با یک بستر صلب را با در نظر گرفتن قانون اصطکاک کولمب تحلیل کردند. محمود و همکارانش [۱۴] یک فرمول‌بندی المان‌های محدود نموی را برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک در شرایط شبه استاتیکی و اصطکاک‌ی ارائه نمودند که در آن به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله ویسکوالاستیک از مدل ویچرت برای در نظر گرفتن هم رفتار وارهیدگی تنشی و هم خزشی استفاده کردند و برای اجرای قیود تماسی نیز از روش مرسوم ضریب لاگرانژ بهره گرفتند. فرآیند نموسازی متفاوتی برای انتگرال گیری از انتگرال‌های استیلجس معادلات وارهیدگی اتساعی و برشی به کمک

1-Simo
2-Zocher
3-Idesman
4-Chen
5-Fernandez
6-Sofonea

معادله فوق را می توان با تغییر متغیرگیری ($\tau = t - s$) و انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (7)$$

در مشتق گیری از $\varepsilon_{kl}(t)$ باید دقت شود که مشتق حاصل به صورت تابعی پیوسته در زمان باشد ولی تاریخچه کرنش می تواند ناپیوسته هم باشد. رابطه تنش-کرنش (۷) بیانگر منظر کلی معادلات متشکله ویسکوالاستیک در وارهدگی می باشد. توابع انتگرالی G_{ijkl} بیانگر خواص ویسکوالاستیک پیکره ها در وارهدگی بوده که با آزمایش های وارهدگی تنشی قابل اندازه گیری می باشند [۱۹].

کلی ترین بازنمایی فرم ایزوتروپیک تانسور مرتبه چهارم توابع وارهدگی در کاربردهای عملی مهندسی به شکل زیر می باشد [۱۸]:

$$t_i(t) = \frac{1}{3} [G_2(t) - G_1(t)] (\delta_{ij} \delta_{kl}) + \frac{1}{2} [G_1(t)] (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (8)$$

که در آن، G_1 و G_2 به ترتیب بیانگر توابع وارهدگی مستقل متناسب با رفتار برشی و حجمی سازه می باشند. متناظر با اصول مشابهی در تئوری الاستیسیته می توان مؤلفه های انحرافی تنش s_{ij} و کرنش e_{ij} را معرفی نمود و سپس معادله (۷) را با استفاده از رابطه (۸) بازنویسی نمود:

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (9)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (10)$$

به طوری که:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad s_{ii} = 0 \quad (11)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \quad e_{ii} = 0 \quad (12)$$

در حالت کلی، معادلات متشکله وارهدگی به صورت زوج انتگرال های هردیتماری (۹-۱۰) بر حسب پاسخ های برشی و حجمی نشان داده می شوند. تئوری های ویسکوالاستیسیته خطی به وسیله مدل هایی که در برگیرنده دو المان بدون جرم، فنر خطی هوکین و مستهلک کننده

مؤلفه های بردار جابجایی فعلی به ترتیب عبارتند از [۱۷-۱۸]:

$$x_i(\tau) = x_i(X_j, \tau), \quad [-\infty < \tau \leq t], \quad (1)$$

$$u_i(\tau) = x_i(\tau) - X_i, \quad (2)$$

که در آن، τ بیانگر متغیر زمانی و (t) زمان فعلی می باشد. کرنش ε را نیز می توان با رابطه زیر تعریف نمود:

$$\varepsilon = \sup_{\tau} |u_{i,j}(\tau)|, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (3)$$

که در آن، \sup بیانگر کمترین حد فوقانی است. تئوری ویسکوالاستیسیته در شرایطی که کرنش $\varepsilon < 1$ و جابجایی های پیکره ی پیوسته در قیاس با ابعاد مشخصاتی آن کوچک باشند به صورت مقدار کوچک تعریف می شود. حال بردار تنش σ را بر حسب نیروی منتجه G اعمالی بر المان رویه ای δa یک پیکره می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\sigma_i = \lim_{\delta a \rightarrow 0} G_i / \delta a. \quad (4)$$

این بردار تنش بر روی رویه δa نسبت به جهت مثبت بردار واحد نرمال n تعریف می شود. رابطه متشکله بین تنش و کرنش در تئوری تغییر شکل های کوچک با فرض وابستگی کامل مقدار فعلی تانسور تنش به تاریخچه ی گذشته مؤلفه های تانسور کرنش به شکل زیر بیان می شود:

$$\sigma_{ij}(t) = \psi_{ij} \left(\varepsilon_{kl}(t-s), \varepsilon_{kl}(t) \right), \quad (5)$$

که در آن، ψ_{ij} بیانگر کنشمنند تانسوری است که هر تاریخچه کرنش ε_{ij} را به یک تاریخچه تنش متناظر σ_{ij} تبدیل می کند. اگر تاریخچه زمانی کرنش $\varepsilon_{ij}(t)$ پیوسته و کنشمنند تانسوری خطی فرض شوند با استفاده از تئوری بازنمایی ریس می توان کنشمنند را به صورت انتگرالی استیلجس در آورد تا رابطه زیر حاصله گردد:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{kl}(t-s) dG_{ijkl}(s), \quad (6)$$

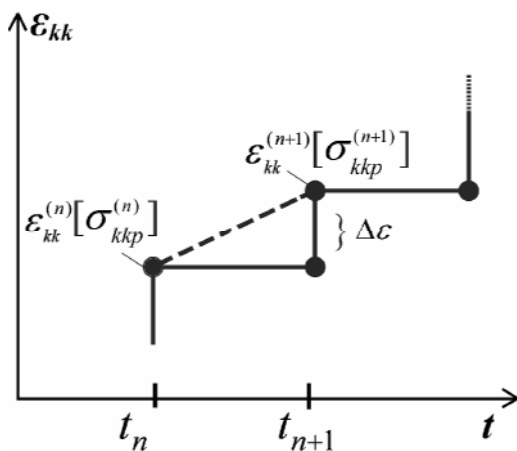
که در آن، توابع انتگرالی G_{ijkl} در این رابطه یک تانسور متقارن مرتبه چهارم می باشد. حال با برابر صفر قرار دادن $\varepsilon_{ij}(t)$ برای زمان های کوچکتر از صفر و با فرض پیوستگی در $G_{ijkl}(t)$ و مشتق زمانی اول آن در بازه ($0 \leq t < \infty$),

در لحظه زمانی t_n بدست آورد. حال می توان تانسور تنش حجمی σ_{kk} را در لحظه فعلی t_{n+1} به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n+1)}(x, t_{n+1}) &= \int_0^{t_{n+1}} G_2(t_{n+1} - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t_n} B_p e^{-b_p(t_n-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] e^{-b_p(\Delta t)} \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \{e^{-b_p(\Delta t)}\} \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)} \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

قسمت اول رابطه ی فوق وضعیت تنش در زمان t_n را بیان می کند و قسمت دوم بیانگر تغییرات تنش در بازه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ است که نموسازی مناسب معادلات وارهیدگی آن در این مقاله مورد نظر قرار گرفته است (شکل ۱).

در اینجا دو رهیافت متفاوت به منظور نموسازی بخش دوم رابطه انتگرالی ارائه گردیده است. در رهیافت اول تغییرات کرنش حجمی $\Delta\varepsilon_{kk}$ در بازه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ ثابت فرض شده است و به منظور پیشبرد حل عددی، تاریخچه زمانی کرنش $\varepsilon_{kk}(\tau)$ هم به صورت حاصل جمع یک سری توابع پله ای واحد $l(\tau - t_n)$ در نمو کرنش مربوطه مدل سازی گردیده است:



شکل (۱): فرآیند نموسازی وارهیدگی.

نیوتنی می باشند به صورت مصور بازنمایی می شوند. با ترکیب های مناسبی از این دو المان اساسی مدل های ویسکوالاستیک متفاوتی را می توان طرح ریزی نمود. یک مدل ساده برای بیان رفتار سازه های ویسکوالاستیک از ترکیب یک فنر و یک مستهلک کننده بطور سری حاصل می شود که به مدل ماکسول مشهور است. یک بازنمایی مناسب از رفتار وارهیدگی سازه های ویسکوالاستیک واقعی را می توان به وسیله آرایش موازی مدل های ماکسول در کنار هم بدست آورد که به مدل ماکسول تعمیم یافته مشهور است. توابع اتساعی و برشی ماکسول تعمیم یافته در بازنمایی رفتار وارهیدگی تنش تحت کرنش ثابت به صورت مجموع عبارات نامی کاهشی در زمان بیان می گردند:

$$G_1(t) = \sum_{p=1}^N A_p e^{(-a_p t)}, \quad (13)$$

$$G_2(t) = \sum_{p=1}^N B_p e^{(-b_p t)},$$

که در آن، N تعداد کل المان های ماکسول، A_p و B_p نیز بیانگر ضرایب وارهیدگی متناظر با معکوس زمان های وارهیدگی a_p و b_p می باشند.

۳- فرآیند نموسازی انطباقی در معادلات وارهیدگی

به منظور نموسازی رفتار متشکله در یک دامنه زمانی بایستی در ابتدا دامنه به فواصل زمانی Δt گسسته شود. در نتیجه برای زمان فعلی t_{n+1} داریم: $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. به منظور اعمال مستقیم فرمول بندی المان های محدود به روابط متشکله (۹-۱۲) از یک فرآیند نموسازی انطباقی استفاده شده است. تانسور تنش حجمی σ_{kk} با جایگزینی تابع وارهیدگی اتساعی (۱۳) در معادله متشکله (۱۰) در زمان t_n به صورت زیر استخراج شده است:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n)}(x, t_n) &= \int_0^{t_n} G_2(t_n - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \sum_{p=1}^N \left(\int_0^{t_n} B_p e^{-b_p(t_n-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right) = \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)}, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن، $\sigma_{kkp}^{(n)}$ در این رابطه نشان دهنده تنش حجمی المان ماکسول p ام در لحظه زمانی t_n می باشد. با استدلال مشابهی می توان تانسور تنش انحرافی $s_{ij}^{(n)}$ را نیز

$$f_{ij}^{(n)}(\Delta t) = \sum_{p=1}^N s_{ijp}^{(n)} e^{-a_p(\Delta t)} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)} e^{-b_p(\Delta t)}. \quad (22)$$

$$\varepsilon_{kk}(\tau) = 1(\tau-t_0) \Delta \varepsilon_{kk}^{(0)} + 1(\tau-t_1) \Delta \varepsilon_{kk}^{(1)} + \dots + 1(\tau-t_n) \Delta \varepsilon_{kk}^{(n)}. \quad (16)$$

از معادله نهایی (۲۰) می‌توان دریافت که تانسور تنش کل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ متشکل از دو بخش مجزا می‌باشد: بخشی که شامل تنشی است که در طی فاصله زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ روند نمایی کاهشی دارد و بخش دیگری که شامل تنش نموی می‌باشد که در اثر کرنش نموی $\Delta \varepsilon_{kl}$ در این گام زمانی حاصل شده است. بنابراین تنش کل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ در لحظه t_{n+1} به جای کرنش کل تنها به سطح تنش گذشته و کرنش نموی اعمالی در فاصله زمانی وابسته است.

۴- فرمول‌بندی المان‌های محدود مسائل تماسی

ویسکوالاستیک

برای معرفی مشخصات مسئله تماسی دوبعدی، یک پیکره تغییرشکل پذیر به عنوان جسم تماسی و یک پیکره صلب به عنوان هدف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. پیکربندی تماسی سیستم با مختصات مادی $\mathbf{X} = [X_1, X_2]$ در شکل ۲ نشان داده شده است. پیکره تغییرشکل پذیر یا پیکره تماسی به وسیله دامنه Ω و مرز Γ مشخص شده است. پیکره تماسی تحت اعمال نیروهای حجمی b_i ، تراکشن سطحی T_i بر روی مرز Γ_s و جابجایی مشخص \bar{u}_i بر روی مرز Γ_d می‌باشد. پیکره تماسی به تعداد NOE المان محدود در برگیرنده‌ی NON گره گسسته سازی شده است. گره (P) در پیکربندی مرجع روی مرز پیکره تماسی با بردار X^P و نقاط I و J روی لبه‌ی پیکره هدف با بردارهای X^I و X^J قرار گرفته‌اند. سیستم مختصات موضعی روی لبه پیکره هدف با بردارهای واحد \mathbf{n} و \mathbf{t} نشان داده شده است. فاصله‌ی نرمال ابتدایی گره تماسی (P) با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d_0^P = (\mathbf{X}^J - \mathbf{X}^P) \cdot \mathbf{n}. \quad (23)$$

فاصله نرمال همان گره در موقعیت فعلی پس از حرکت و جابجایی پیکره تماس با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$d_n^P = (d_0^P - \mathbf{u}^P \cdot \mathbf{n}) = (d_0^P - u_n^P), \quad (24)$$

که در آن، u_n^P بیانگر جابجایی نرمال گره تماسی (P) می‌باشد. نیروی تماسی \mathbf{f}_c^P بر روی پیکره هدف در نتیجه‌ی تماس گره (P) پیکره تماسی با لبه هدف ایجاد

به دلیل آنکه کرنش در دامنه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ در فرآیند نموسازی به صورت توابع واحد فرض شده است از این رو مشتق $d\varepsilon_{kk}(\tau)/d\tau$ آن هم در طی این بازه زمانی برابر با تابع دلتا خواهد بود [۲۰]. بنابراین، عبارت آهنگ کرنش حجمی را به صورت زیر می‌توان تعریف نمود:

$$\frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} \approx \delta(\tau-t_0) \Delta \varepsilon_{kk}^{(0)} + \delta(\tau-t_1) \Delta \varepsilon_{kk}^{(1)} + \dots + \delta(\tau-t_n) \Delta \varepsilon_{kk}^{(n)}. \quad (17)$$

از این رو قسمت دوم معادله (۱۵) را با توجه به این قاعده به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

$$\sum_{p=1}^N \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] = \sum_{p=1}^N \left[B_p e^{-b_p(t_{n+1}-t_n)} \Delta \varepsilon_{kk} \right] \quad (18)$$

با استفاده از رهیافت نقطه میانی [۱۵ و ۲۱] که از آن در بسیاری از نرم افزارهای تجاری المان‌های محدود هم استفاده می‌گردد نیز قسمت دوم معادله‌ی انتگرالی (۱۵) انتگرال گیری عددی شده است. از اینرو حل آن با رهیافت دوم به صورت زیر بدست آمده است:

$$\sum_{p=1}^N \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] = \sum_{p=1}^N \left[B_p e^{-b_p(t_{n+1}-t_n)/2} \Delta \varepsilon_{kk} \right]. \quad (19)$$

به صورت مشابهی تنش انحرافی کلی $s_{ij}^{(n+1)}$ در لحظه‌ی زمانی t_{n+1} نیز با استفاده از هر دو رهیافت استخراج شده است. در پایان، تانسور تنش ویسکوالاستیک کل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ در لحظه‌ی t_{n+1} با ترکیب معادلات حجمی و انحرافی به صورت تخمینی زیر استخراج شده است:

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(x, t_{n+1}) = C_{ijkl}(\Delta t) \Delta \varepsilon_{kl} + f_{ij}^{(n)}(\Delta t), \quad (20)$$

به طوری که:

$$C_{ijkl}(\Delta t) \Delta \varepsilon_{kl} = G_1 \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \Delta e_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} G_2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \Delta \varepsilon_{kk}, \quad (21)$$

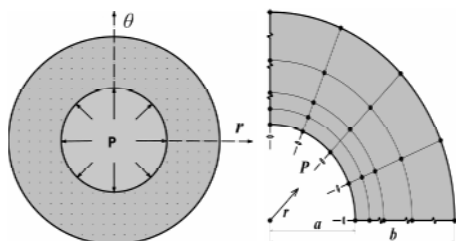
۵- کاربردهای مدل سازی عددی

به منظور ارزیابی و ارائه قابلیت های فرمول بندی المان های محدود غیرخطی و وابسته به زمان توسعه یافته در تحلیل مسائل ویسکوالاستیک سازه ای بر روی دو مسئله متفاوت مهندسی اعمال شده است.

در مدل ابتدایی به بررسی پاسخ شبه استاتیک یک سازه استوانه ای ویسکوالاستیک جدار ضخیم تحت فشار داخلی یکنواخت P پرداخته شده است (شکل ۳). اکثر مطالعات بر مبنای در نظرگیری مخازنی به اندازه کافی طویل است که شرایط کرنش صفحه ای در آن ها صادق باشند [۱۷-۱۸]. فقط یک چهارم مدل اول به دلیل تقارن دوطرفه آن گسسته سازی المان های محدود شده است. شعاع داخلی مخزن ۲۵۰ و شعاع خارجی آن نیز ۵۰۰ میلی متر انتخاب گردیده است. خواص متشکله سازه در وارهدگی به صورت پاسخ الاستیک در اتساع و پاسخ ویسکوالاستیک خطی استاندارد (SLS) در رفتار انحرافی فرض شده است که در قالب مدل ماکسول تعمیم یافته عبارتند از:

$$G_1(t) = 3.53 + 8.47e^{\left(\frac{-t}{8}\right)}, \quad G_2(t) = 20 \text{ (MPa)}. \quad (32)$$

جابجایی شعاعی دیواره های داخلی و خارجی این مخزن استوانه ای به کمک فرمول بندی جدید محاسبه شده اند و سپس با حل تحلیلی [۱۸] و فرمول بندی عددی المان های مرزی [۲۳] نیز مورد مقایسه قرار گرفته اند که نتایج آن در شکل های ۴-۵ قابل مشاهده می باشند. همچنین، تأثیر وابستگی طول گام های زمانی برای جابجایی جداره داخلی مخزن استوانه ای در شکل ۴ مشخص است. این رهیافت از بروز خطاهای عددی که در اثر انتخاب طول گام های زمانی بزرگتر ممکن است ایجاد شوند جلوگیری می کند.



شکل (۳): نمای سطح مقطع عرضی سازه ویسکوالاستیک استوانه ای جدار ضخیم و نمای گسسته سازی شده آن.

حل نیازی نیست که برای دستیابی به همگرایی به سمت بی نهایت میل داده شوند، در نتیجه از شرط گذاری ضعیف روش مرسوم پنالتی نیز با این کار جلوگیری شده است.

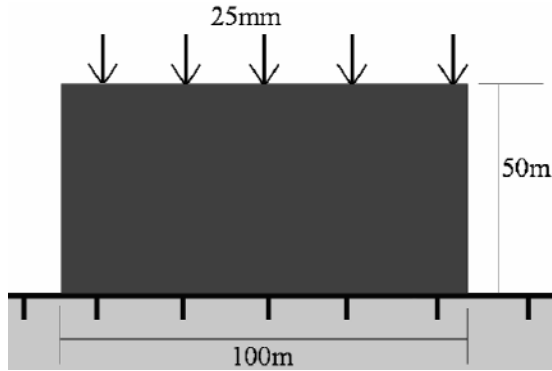
پیشرفت این رهیافت لاگرانژ الحاقی به کمینه سازی غیر مقید کنش مند $\Phi(\bar{U}, \theta, \mathbf{K}_n)$ و نیز فرآیند بهنگام سازی ضرایب لاگرانژ آن بستگی دارد. دقت، بازدهی و توانمندی این رهیافت نیز بستگی به نحوه اجرای صحیح این دو مرحله دارد. شرط بهینگی مرتبه ای اول برای تابع لاگرانژ رابطه (۲۷) با استفاده از ضرایب لاگرانژ $R_n^p = K_n^p \theta^p$ منجر به یک معادله تعادلی می شود.

یک فرآیند بهنگام سازی مؤثر نیز برای ضرایب لاگرانژ با استفاده از قاعده دوگانگی تئوری بهینه سازی [۲۲] استخراج شده است. در این روش دوگانه برای بهنگام سازی با ضرایب لاگرانژ R_n به جای پارامترهای θ کار شده است. یک فرآیند بهینه سازی دوگانه غیرمقید برای دستیابی به مقدار تخمینی فعلی ضرایب لاگرانژ R_n^p استفاده شده که در منابع به آن بهنگام سازی ضرایب هم گفته می شود. رابطه تکرار شونده زیر به منظور بهنگام سازی بردار $[NOC \times 1]$ ضرایب لاگرانژ R_n بکار می رود:

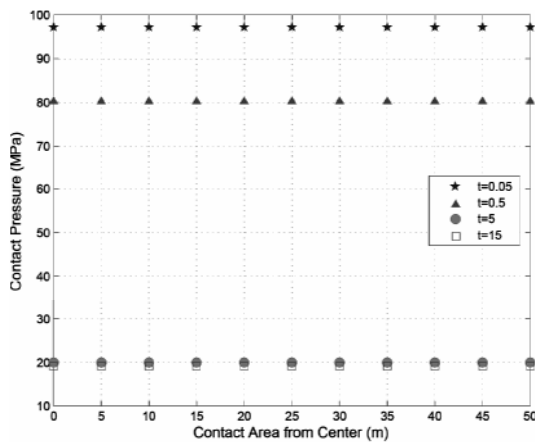
$$\mathbf{R}_n^{j+1} = \mathbf{R}_n^j + \lambda^j \mathbf{d}, \quad (31)$$

که در آن، \mathbf{d} یک بردار تعیین جهت $[NOC \times 1]$ ، λ طول گام و $\lambda^j \mathbf{d}^j = \Delta \mathbf{R}_n^j$ بیانگر تغییرات بردار ضرایب است.

حال، در اینجا مراحل الگوریتم فرمول بندی لاگرانژ الحاقی مورد استفاده به اختصار ارائه می گردند: ۱- قرار دادن $t=0$ ، ۲- قرار دادن $z=0$ و نیز تخمین لاگرانژ R_n^0 و پارامترهای پنالتی \mathbf{K}_n^0 ، ۳- کمینه سازی $\Phi(\bar{U})$ برای مسئله تماس (۲۶) با حل معادله تعادل و نیز اجازه دادن به \bar{U}^j برای جواب بودن، ۴- توقف فرآیند تکرار در صورت ارضای ملاک همگرایی، ۵- بهنگام سازی R_n^j و در صورت نیاز افزایش مقادیر پارامترهای پنالتی \mathbf{K}_n^j ، ۶- قرار دادن $z = z + 1$ و رفتن به مرحله سوم و ۷- قرار دادن $t = t + \Delta t$ و رفتن به مرحله دوم.

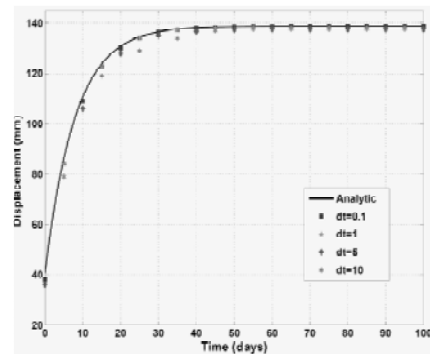


شکل (۶): پیکربندی مدل تماسی یک بلوک ویسکوالاستیک بر روی یک فونداسیون.

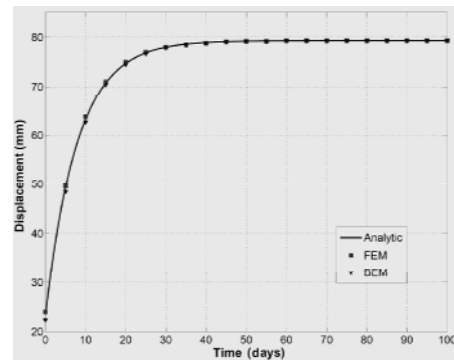


شکل (۷): چگونگی توزیع فشار تماسی در ناحیه میانجی.

همان طور که در شکل ۷ دیده می شود نحوه توزیع فشار تماسی در طول ناحیه مشترک میانجی مطابق آنچه هم انتظار می رود به صورت کاملاً یکنواختی بدست آمده است. فشار تماسی در زمان های ۰.۵، ۱۰، ۱۵ و بالاتر در میانجی تقریباً ۲۰ مگا پاسکال بدست آمده است که نشان دهنده همگرایی سیستم به این فشار می باشد. همچنین چگونگی رفتار وارهیدگی فشار تماسی وارد بر سازه ها با گذشت زمان نیز در شکل ۸ نشان داده شده است. ناحیه میانجی تماسی اگر چه افزایش تدریجی اندکی با گذشت زمان داشته است ولی توزیع فشار تماسی در اثر پاسخ وارهیدگی متشکله مادی سازه ها کاهش یافته است. تنش در وارهیدگی تحت کرنش ثابت روند کاهشی در زمان دارد. در پایان قابل ذکر است که ضریب پواسون در فرمول بندی ارائه شده برای مدل اول ۰/۴ و برای مدل دوم ۰/۳ فرض شده است.



شکل (۴): جابجایی شعاعی محاسبه شده با فرمول بندی برای دیواره داخلی به ازای طول گام های زمانی مختلف.



شکل (۵): جابجایی شعاعی محاسبه شده با فرمول بندی ارائه شده برای دیواره خارجی مخزن به ازای طول گام ۰/۱ مقایسه شده با حل تحلیلی و رهیافت المان های مرزی.

در مدل دوم، برهمکنش تماسی یک بلوک ویسکوالاستیک با یک فونداسیون الاستیک تحت جابجایی طولی مشخص ۲۵ میلی متری برای نشان دادن پاسخ وارهیدگی مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه کلی مدل و شرایط مرزی آن در شکل ۶ قابل مشاهده است. تنها نیمی از این مدل عددی به دلیل تقارن طولی گسسته سازی المان های محدود شده است. مشخصات مادی بلوک ویسکوالاستیک در وارهیدگی بر حسب گیگا پاسکال عبارتند از:

$$G_1(t) = 42 + 162e^{-t} \quad G_2(t) = 84 + 300e^{-t} \quad (33)$$

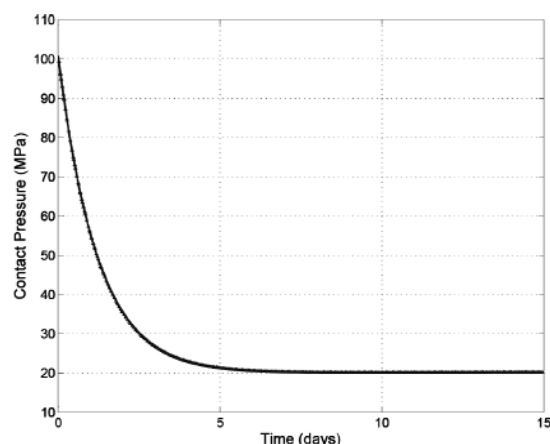
نتایج حاصل از محاسبه توزیع فشار تماسی در میانجی به ازای زمان های متفاوت در شکل ۷ نشان داده شده است.

۷- قدردانی

مؤلفان بر خود بایسته می‌دانند که از راهنمایی‌های آقایان دکتر محزون و دکتر کسرایی (دانشگاه شیراز)، دکتر نپ (لابراتوار ملی سانديا) و دکتر آرورا (دانشگاه آیووا) تشکر و قدردانی نمایند.

۸- مراجع

1. Wriggers, P., "Computational Contact Mech.", John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
2. Laursen, T.A., "Computational Contact and Impact Mechanics", Springer, Berlin, 2002.
3. Mijar, A.R. and Arora, J.S., "Study of Variational Inequality and Equality Formulations for Elastostatic Contact Problems", Archives of Comp. Methods in Eng., Vol. 7, No. 1, pp. 387–449, 2000.
4. Oden, J.T. and Kikuchi, N., "Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", SIAM Pub., Philadelphia, 1988.
5. Simo, J.C. and Laursen, T.A., "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction", Computers and Structures, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992.
6. Lee, E.H. and Rogers, T.G., "Solution of Viscoelastic Stress Analysis Problems, Using the Measured Creep or Relaxation Functions", ASME J. Applied Mech., Vol. 30, No. 1, pp. 127–133, 1963.
7. Taylor, R.L., Pister, K.S., and Goudreas, G.L., "Thermochemical Analysis of Viscoelastic Solids", Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 2, No. 2, pp. 45–59, 1970.
8. Simo, J.C., "On Fully 3-D Finite Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects", Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 60, No. 1, pp. 153–173, 1987.
9. Zocher, M.A., Groves, S.E., and Allen, D.H., "A 3-D Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media", Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 40, No. 3, pp. 2267–2288, 1997.
10. Idesman, A., Niekamp, R., and Stein, E., "Finite Elements in Space and Time for Generalized Viscoelastic Maxwell Model", Comp. Mechanics, Vol. 27, No. 1, pp. 49–60, 2001.
11. Chen, W.H., Chang, C.M., and Yeh, J.T., "An Incremental Relaxation Finite Element Analysis of Viscoelastic Problems with Contact and Friction", Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 109, No.2, pp. 315–329, 1993.



شکل (۸): چگونگی رفتار وارهدیگی فشار تماسی.

۶- نتیجه‌گیری

یک الگوریتم حل محاسباتی نموی - انطباقی جدید به منظور محاسبه فشارهای شبه‌استاتیک تماسی سازه‌های ویسکوالاستیک در این پژوهش توسعه داده شد. مدل ماکسول تعمیم‌یافته به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله وارهدیگی در قالب دو تابع کلی در پاسخ‌های اتساعی و انحرافی بهره گرفته شد. در این فرمول‌بندی، معادلات وارهدیگی به وسیله حاصل جمع سری‌های توابع نمایی کاهشی در زمان بیان شدند. تانسور تنش کل لحظه فعلی در این فرمول‌بندی به جای کرنش کل تنها به سطح تنش گذشته و کرنش نموی گام زمانی وابسته می‌باشد. یک رهیافت لاگرانژ الحاقی استخراج یافته از تئوری‌های بهینه سازی و قاعده دوگانگی نیز بر اساس شرایط سینماتیکی هندسی اجزای در حال تماس به منظور حل تماس ویسکو-الاستیک گسترش یافت. فرمول‌بندی ارائه شده به راحتی از قابلیت تعمیم یابی رفتار وارهدیگی به پاسخ خزشی برخوردار است که برای این منظور از مدل ویسکوالاستیک کلوین تعمیم‌یافته به جای ماکسول تعمیم‌یافته برای مدل‌سازی معادلات متشکله در خزش استفاده شده است. نتایج مناسب حاصل شده نشانگر قابلیت‌های کاربردی بالای مدل المان‌های محدود ارائه شده برای بکارگیری در این نوع مسائل تماسی می‌باشد.

- ASCE – ASME – SES Conf. on Mech. and Materials, Blacksburg, VA, USA, pp. 122-123, 2009.
17. Malvern, L.E., "Introduction to Mechanics of Continuous Medium", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
 18. Christensen, R.M., "Theory of Viscoelasticity, an Introduction", Academic Press, New York, 1982.
 19. Ferry, J.D., "Viscoelastic Properties of Polymer", 3rd Ed., Wiley, New York, 1980.
 20. Jeffrey, A. "Advanced Engineering Mathematics", Academic Press, New York, 2002.
 21. Simo, J.C., and Hughes, T.J.R. "Computational Inelasticity", Springer, Berlin, 1998.
 22. Jahn, J., "Introduction to the Theory of Non-linear Optimization", Springer, Berlin, 2007.
 23. Ashrafi, H. and Farid, M., "A Mathematical Boundary Integral Equation Analysis of Standard Viscoelastic Solid Polymers", *Comp. Math. and Modeling*, Vol. 20, No. 4, pp. 397–415, 2009.
 12. Fernandez, J.R. and Sofonea, M., "Numerical Analysis of a Frictionless Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Response", *Comp. & Math. with Appl.*, Vol. 47, No. 1, pp. 549–568, 2004.
 13. Amassad, A. and Fabre, C., "Analysis of a Viscoelastic Unilateral Contact Problem Involving the Coulomb Friction Law", *J. Optimization Theory and Appl.*, Vol. 116, No. 4, pp. 465–483, 2003.
 14. Mahmoud, F.F., El-Shafei, A.G., Al-Shorbagy, A.E., and Abdel Rahman, A.A., "A Numerical Solution for Quasistatic Viscoelastic Frictional Contact Problems", *ASME J. Tribology*, Vol. 130, No. 1, pp. 1–13, 2008.
- ۱۵- اشرفی، ح. "تحلیل عددی مسائل تماسی در اجسام ویسکو الاستیک"، پایان نامه کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شیراز، ۱۳۸۷.
16. Ashrafi, H., "An Augmented Lagrangian Treatment for the Viscoelastic Contact Formulation", In Proceedings of the 2009 Joint