



## مطالعه تحلیلی پرشهای دانسیته ایجاد بر روی بسترهای صاف و زبر

نادر برهمند<sup>۱</sup>، ابوالفضل شمسایی<sup>۲</sup> و مهدی قمشی<sup>۳</sup>

### چکیده

پرشهای هیدرولیکی ایجاد شده در جریانهای دانسیته، نقش مهمی در تغییرات خصوصیات کیفی جریان دانسیته و همچنین سیال محیطی (همانند دریاچه‌ها و مخازن سدها) دارند. در این مقاله، پرش دانسیته با در نظر گرفتن زبری بستر و نیز اختلاط سیال محیطی با جریان، به صورت تئوری، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نشان داده شد که استفاده از معادله مرسوم در این نوع از پرشها بالاخص جهت بسترهای زبر، همراه با خطا می‌باشد. همچنین جهت بسترهای صاف و یا زبر، معادله‌ای جامع به منظور محاسبه نسبت عمقهای مزدوج پرش بدست آمد. در این معادله، نسبت عمقهای مزدوج پرش تابعی از عدد فرود چگالی بالادست پرش، نسبت اختلاط و نیز زبری نسبی می‌باشد. علاوه بر آن، معادلاتی جهت محاسبه حداکثر نسبت اختلاط، حداقل عدد فرود چگالی در مقطع ماقبل پرش و همچنین حداکثر زبری نسبی، ارائه گردیدند. لازم به ذکر است که این مقادیر حدی، متناظر با حداقل مقدار ممکن نسبت عمقهای مزدوج می‌باشند.

کلید واژه: پرش دانسیته، سیال محیطی، زبری نسبی، نسبت اختلاط و عدد فرود چگالی.

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری تخصصی، گروه عمران-آب، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران!! E-mail: [nader\\_barahmand@yahoo.com](mailto:nader_barahmand@yahoo.com)

!!  
<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی گروه عمران، دانشگاه صنعتی شریف

<sup>۳</sup> عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی آب، دانشگاه شهید چمران اهواز



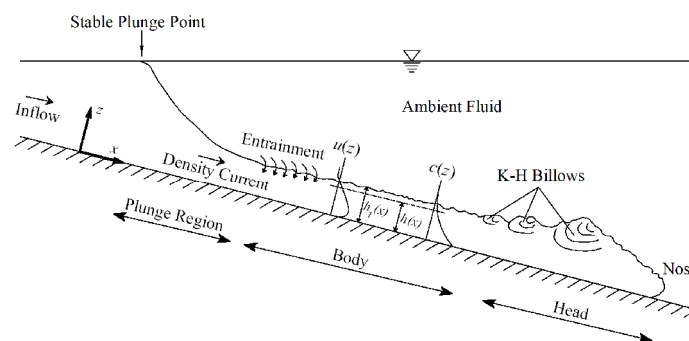
## مقدمه

جریانهای دانسیته به علت تفاوت چگالی با سیال محیطی که معمولا توده عظیمی از آب همانند مخازن پشت سدها، دریاچه‌ها، دریاها، اقیانوسها و ... است، بوجود می‌آیند. از آنجا که نیروی ثقل، نیروی رانش اینگونه از جریانها می باشد به آنها واژه جریان ثقلی نیز اطلاق می گردد. جریانهای دانسیته، پدیده هایی نادر و محلی نیستند. نسیمهای دریایی، طوفانهای شن و گرد و غبار، فاضلابهای صنعتی ورودی به مخازن و دریاچه ها، جریانهای خروجی طوفانهای آذرخشی، بادهای پایین رونده آدیاباتیک، حرکت گدازه های آتشفشانی، حرکت بهممن و جریانهای ثقلی شور یا کدر وارد شده به دریاچه ها، مخازن، دریاها و اقیانوسها، مثالهایی گوناگون و متنوع از جریانهای ثقلی در طبیعت و محیطهای ساخته شده توسط بشر می باشند [۱، ۷، ۹، ۱۲، ۱۳، ۲۲ و ۲۳].

در توده های عظیم آب (مثل مخازن و دریاچه ها)، جریان ثقلی تحتانی بعد از غوطه وری، در زیر سطح آزاد و در امتداد شیب بستر شکل می‌گیرد (شکل ۱). در سطح مشترک این جریان، به علت تفاوت دانسیته جریان با آب تمیز روی آن، گردابه هایی تشکیل می‌گردند که منجر به ورود سیال محیطی به درون جریان ثقلی می‌شوند. همانطور که در شکل (۱) ملاحظه می‌شود، جریان دانسیته تحتانی شامل سه بخش اصلی غوطه‌وری، بدنه و هد می‌باشد.

جریان ثقلی معمولا تحت تاثیر بالآمدگی بستر و یا تنگ‌شدگی مقطع در پایاب و همچنین تحت تاثیر کاهش شیب می‌تواند

طی یک پرش هیدرولیکی، به صورت سریع از جریان فوق بحرانی به زیر بحرانی تغییر وضعیت دهد [۲، ۱۰ و ۲۵].





همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸



شکل ۱: طرح شماتیک یک جریان دانسیته توسعه یافته بر روی یک بستر شیبدار

چنین پرشی در سطح مشترک جریان دانسیته و سیال محیطی رخ می دهد. معمولاً در ناحیه پرش، مقداری از سیال محیطی وارد جریان دانسیته می شود لذا دانسیته جریان در طول پرش تغییر می کند. به همین علت، این گونه از پرشها به پرشهای دانسیته معروف هستند.

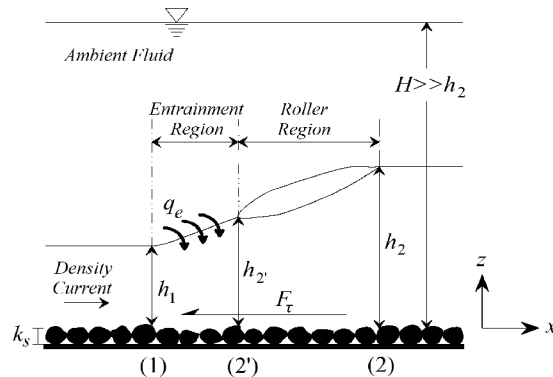
درک دقیق فرآیند پرش دانسیته، می تواند نقش بسیار مهمی در شناخت چگونگی توسعه جریانهای چگال، اصلاح مدل‌های عددی، بهبود کیفی آب و همچنین بهبود مدیریت ته نشینی و فرسایش رسوبات در مخازن و دریاچه ها داشته باشد. در حالتی که هر دو سیال محیطی و غلیظ، غیر قابل اختلاط و متحرک هستند، یه و گوها، به بررسی پرش دانسیته پرداختند. اگر تنها یکی از دو سیال غیر قابل اختلاط، متحرک باشد، آنها به این نتیجه رسیدند که در بستر صاف، جهت پیش بینی نسبت عمق جریان دانسیته در مقطع انتهایی پرش  $h_2$  به عمق جریان در مقطع ابتدایی پرش  $h_1$  می توان از رابطه ذیل استفاده نمود [۲۷].

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8F_{D1}^2} - 1 \right) \quad (1)$$

در این رابطه،  $F_{D1}$  عدد فرود چگالی در مقطع ماقبل پرش (مقطع ۱ شکل ۲) است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_{D1} = \frac{1}{\sqrt{Ri_1}} = U_1 / \sqrt{g \left( \frac{\rho_1 - \rho_a}{\rho_1} \right) h_1} \quad (2)$$

که  $Ri$  عدد ریچاردسون حجمی،  $\rho$  دانسیته متوسط- لایه‌ای سیال غلیظ،  $\rho_a$  جرم حجمی سیال محیطی،  $U$  سرعت متوسط- لایه‌ای جریان دانسیته در جهت شیب و  $g$  شتاب ثقل است. اندیس ۱ نیز نشاندهنده مقطع ۱ می باشد (شکل ۲).



شکل ۲: پرش دانسیته داخلی با در نظر گرفتن بستر زیر

معادله (۱)، مشابه با رابطه کلاسیک نسبت عمقهای مزدوج پرش در جریانهای کانال باز تک فازه (رابطه بلانگر) است. اثر بالآآمدگی بستر در پایاب بر خصوصیات اختلاطی پرش دانسیته ایجاد می‌کند. در یک سیال محیطی عمیق، توسط ویلکینسون و وود به صورت تئوری و آزمایشگاهی مورد تحقیق قرار گرفت [۲۵]. همانطور که در شکل (۲) دیده می‌شود، طول پرش با توجه به اختلاط و یا عدم اختلاط سیال محیطی با جریان غلیظ به دو قسمت تقسیم گردید:

۱- ناحیه اختلاط: این ناحیه مجاور به پنجه پرش بوده و در تمام طول آن، اختلاط وجود دارد.

۲- ناحیه غلظتی: این ناحیه از انتهای ناحیه اختلاط شروع شده و تا انتهای طول پرش ادامه می‌یابد. مقدار اختلاط در این قسمت، برابر صفر است. همچنین دانسیته و دبی جریان در طول این ناحیه، ثابت باقی می‌ماند.

آنها علاوه بر معادلات معمول در پرشهای بدون اختلاط، از معادله بقای انرژی بین جریان بحرانی روی بالآآمدگی و انتهای پرش نیز استفاده کردند. ویلکینسون و وود معادله صریح و روشنی جهت تخمین مقدار اختلاط سیال محیطی با جریان دانسیته در طول پرش ارائه ندادند بلکه از یک سری منحنی که در آنها تنها عدد فرود ماقبل پرش توسط پارامترهای بالادستی و پایین دستی قابل تخمین بود، استفاده نمودند [۲۵]. وود و سیمپسون در سال ۱۹۸۴ حالت‌های متفاوتی از پرش هیدرولیکی داخلی مابین دو سیال قابل اختلاط با هم را با توجه به سرعت‌های متفاوت آنالیز نمودند و نشان دادند که هنگامی که یک لایه بسیار بزرگ و ساکن باشد، جواب به منحنی بدست آمده توسط ویلکینسون و وود خلاصه می‌شود [۲۶].



همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸



استفان و هایاکاوا در یک کانال کم عمق، مشخصات اختلاطی یک پرش داخلی را مطالعه نمودند. مطابق با این مطالعه تحلیلی، اگر عدد فرود چگالی به صورت نامحدودی افزایش یابد، مقدار اختلاط دو سیال در طول پرش دارای مقدار ثابتی خواهد شد [۲۴].

پدیده پرش دانسیته در یک فلوم کوتاه با بستر صاف و عمق محدود، به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی توسط بادور و اینک مورد مطالعه قرار گرفت. مشخص گردید که مقدار اختلاط سیال محیطی با جریان غلیظ در پرشهای کاملاً مستغرق و در جریانهای کاملاً ناپایدار، ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. همچنین با فرض نامحدود بودن عمق سیال محیطی، در پرش آزاد، بین عدد فرود چگالی مقطع ابتدایی پرش و حداکثر اختلاط، رابطه‌ای بدست آمد. علاوه بر این، افزایش عدد فرود جریان از مقدار اپتیمم آن منجر به کاهش اختلاط سیال محیطی و در نتیجه افزایش ناپایداری جریان می شد [۲].

هاگ و وودس اثرات اصطکاکی بستر بر جریانهای دانسیته دو بعدی را مطالعه نمودند. در این مطالعه هیچگونه پرشی ایجاد نشد و فقط اثرات اصطکاکی بستر مورد تاکید و بررسی قرار گرفت [۱۵].

هالند و همکاران از معادلات بقای انرژی توربولانس و انرژی متوسط استفاده کردند و فرض نمودند که افت توربولانس در ناحیه پرش ناچیز باشد. با این فرض آنها حدود بالا و پایینی جهت مقادیر ممکن اعداد فرود بالادست و پایین دست پرش و همچنین سرعت اختلاط سیال محیطی یافتند [۱۶]. نشان داده شده است که این حدود آزمایشگاهی با داده های آزمایشگاهی سازگار نیست [۱۴].

همچنین اختلاط هوای محیطی با پرش دانسیته ایجاد می شود در زیر یک سقف افقی با کمک روش گرافیکی مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده شد که مقدار این اختلاط علاوه بر عدد فرود بالادست پرش به خصوصیات شرایط مرزی پایین دست نیز وابسته است. اما مقدار ماکزیمم اختلاط هوای محیطی با پرش تنها تابعی از عدد فرود بالادست است [۲۱].

کاستیک و پارکر در سال ۲۰۰۶، رفتار جریان کدر در نزدیکی محل شکستگی شیب بستر را به صورت عددی شبیه سازی



همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸



نمودند. مطابق با مدل ایشان، هرچه زبری بستر بیشتر گردد، طول پرش کوتاهتر شده و به بالادست، منتقل خواهد شد [۱۸].  
پرش دانسیته عبوری از روی بسترهای صاف، توسط رجو و همکاران در سال ۲۰۰۶ به صورت تئوری، آنالیز شد. آنها نشان دادند در حالتی که پرش توسط یک بالارفتگی در کف کانال (و یا توسط تنگ شدگی مقطع کانال) کنترل می‌شود، نسبت اختلاط پرش تنها به عدد فرود بالادست پرش و ارتفاع بدون بعد بالارفتگی (و یا عرض بدون بعد تنگ شدگی مقطع) وابسته است [۲۰].

همانطور که ملاحظه گردید، تاکنون اثرات زبری بر خصوصیات پرشهای دانسیته مورد مطالعه قرار نگرفته است. در این مقاله، با در نظر گرفتن اختلاط و زبری بستر، پرش داخلی آزاد به صورت تحلیلی آنالیز می‌گردد و حل جدیدی جهت نسبت عمقهای مزدوج در بسترهای صاف و زبر بدست می‌آید.

### آنالیز تحلیلی پرش دانسیته

قبل از فرمولاسیون، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شوند:

- ۱- عمق سیال محیطی  $H$  خیلی بزرگتر از عمق جریان دانسیته  $h$  است ( $H \gg h_2$ ). لذا هیچگونه سیرکولاسیون و جریان برگشتی در سیال محیطی بوجود نمی‌آید.
- ۲- سیال محیطی، همگن بوده و خود دارای هیچگونه لایه‌بندی نیست. همچنین سطح آزاد آن، افقی است.
- ۳- توزیع قائم سرعت و همچنین پروفیل قائم دانسیته، یکنواخت می‌باشند.
- ۴- توزیع فشار، هیدرواستاتیک در نظر گرفته می‌شود.
- ۵- فلوم، مستطیلی شکل و دارای بستر افقی می‌باشد. همچنین شکل مقطع عرضی فلوم در طول پرش تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر کانال، منشوری شکل است.
- ۶- جریان دانسیته، پایدار است که اختلاف دانسیته می‌تواند به علت تفاوت‌های دمائی و یا مواد محلول ایجاد شده باشد.



همایش ملی مدیریت بحران آب  
The National Conference on Water Crisis Management  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸



در این صورت، شار شناوری اینگونه از جریانها در طی حرکت، ثابت باقی می ماند.

۷- سیال محیطی و سیال غلیظ، هر دو غیر قابل تراکم هستند.

۸- مقدار غلظتها به قدری کوچک است که می توان سیال را نیوتنی فرض کرد. در این حالت تقریب بوسینسک معتبر است.

۹- مقدار عدد فرود چگالی در مقطع ماقبل پرش، بزرگتر از واحد است.

با توجه به فرضیات فوق، پرش هیدرولیکی داخلی و آزاد شکل (۲) در نظر گرفته می شود. چنانچه حجم کنترل برابر با حجم سیال غلیظ مابین دو مقطع ۱ و ۲ (به ترتیب مقاطع ابتدایی و انتهایی پرش) باشد، با توجه به قانون بقای حجم داریم:

$$q_1 + q_e = q_2 \quad (3)$$

در این رابطه،  $q$  دبی ویژه جریان دانسیته و  $q_e$  دبی ویژه وارد شده از سیال محیطی به درون جریان دانسیته در ناحیه پرش می باشد. اندیس ۲ نیز نشان دهنده مقطع عرضی انتهایی پرش است.

همچنین با به کار بردن قانون بقای جرم جهت حجم کنترل، نتیجه گرفته می شود:

$$\rho_1 q_1 + \rho_a q_e = \rho_2 q_2 \quad (4)$$

اگر اختلاف دانسیته تنها به علت تفاوت غلظت مواد محلول (مثلا نمک) باشد، رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\rho_i = \rho_{a0} \left[ 1 + \left( \frac{\rho_s}{\rho_{a0}} - 1 \right) C_i \right], \quad i = 1, 2, a \quad (5a)$$

که:

$$C_a < C_2 \leq C_1 \ll 1 \quad (5b)$$

در این رابطه  $C$  غلظت حجمی متوسط - لایه ای جریان دانسیته،  $C_a$  غلظت حجمی متوسط - عمقی سیال محیطی،  $\rho_s$  دانسیته جرمی مواد جامد حل شده و  $\rho_{a0}$  دانسیته سیال محیطی تمیز با غلظت مواد محلول برابر با صفر ( $C_a = 0$ ) می باشد.

با توجه به معادلات (۳، ۴ و ۵a) می توان دید که:



$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{q_2}{q_1} - \frac{C_a}{C_2} \left( \frac{q_e}{q_1} \right) = 1 + r_e \left( 1 - \frac{C_a}{C_2} \right) \quad (6)$$

در رابطه فوق،  $r_e$  نسبت اختلاط بوده که مطابق با رابطه (۷) تعریف می شود:

$$r_e = q_e/q_1 = (q_2/q_1) - 1 \quad (7)$$

با فرض  $C_a = 0$ ، معادلات (۵a) و (۶) به شکل روابط زیر در می آیند:

$$\rho_a = \rho_{a0} \quad (8a)$$

$$\rho_i = \rho_a \left[ 1 + \left( \frac{\rho_s}{\rho_a} - 1 \right) C_i \right], \quad i = 1, 2 \quad (8b)$$

$$C_1/C_2 = q_2/q_1 = 1 + r_e \quad (9)$$

موازنه مومنتوم در حجم کنترل شکل (۲)، نتیجه می دهد:

$$F_{P1} - F_{P2} + F_{PJ} - F_\tau = \rho_2 q_2 U_2 - \rho_1 q_1 U_1 \quad (10)$$

$F_\tau$  نیروی برشی بستر در واحد عرض فلوم در طول پرش است.  $F_{P2}, F_{P1}$  و  $F_{PJ}$  نیز به ترتیب نیروهای هیدرواستاتیک در

واحد عرض فلوم وارد بر مقاطع ۱، ۲ و سطح مورب پرش می باشند که با توجه به روش منشور فشار و یا با استفاده از روابط

زیر تعیین می گردند.

$$F_{Pi} = \int_0^{h_i} P_i(z) dz, \quad i = 1, 2 \quad (11a)$$

$$F_{PJ} = \int_{h_1}^{h_2} P_J(z) dz \quad (11b)$$

که  $P_i(z)$  و  $P_J(z)$ ، به ترتیب، فشار هیدرواستاتیک در فاصله  $z$  از بستر زبر مقطع  $i$ ام و سطح مورب پرش می باشند. با توجه به

شکل (۲) مشاهده می شود که:

$$P_i = \rho_a g(H - h_i) + \rho_i g(h_i - z), \quad i = 1, 2 \quad (12a)$$

$$P_J = \rho_a g(H - z) \quad (12b)$$





با کمک روابط (۱۲a) و (۱۲b)، معادلات (۱۱a) و (۱۱b) بازنویسی می گردند:

$$F_{Pi} = \rho_a g (H - h_i) h_i + \rho_i g \frac{h_i^2}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (13a)$$

$$F_{PJ} = \rho_a g (h_2 - h_1) H - \rho_a g \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{2} \quad (13b)$$

با جایگزینی معادلات (۱۳a) و (۱۳b) در معادله (۱۰)، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \rho_{a0} g \left( \frac{\rho_s}{\rho_{a0}} - 1 \right) \left[ (C_1 - C_a) h_1^2 - (C_2 - C_a) h_2^2 \right] - F_\tau = \rho_2 q_2 U_2 - \rho_1 q_1 U_1 \quad (14)$$

همانطور که قبلاً ذکر گردید، تاکنون، اثر زبری بر پرشهای دانسیته به خوبی مورد مطالعه قرار نگرفته است. اما می توان به مطالعاتی که در رابطه با پرشهای هیدرولیکی ایجاد شده بر روی بستر زبر در جریانهای تک فاز صورت گرفته، اشاره نمود [به عنوان مثال منابع ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۱، ۱۷ و ۱۹].

جهت تخمین نیروی برشی بستر  $F_\tau$  در پرشهای ایجاد شده در جریانهای کانال-باز تک-لایه ای، روابط زیر پیشنهاد شده اند. این روابط علاوه بر بسترهای صاف و یا زبر در بسترهای موجدار نیز کارایی دارند [۸ و ۱۹].

$$F_\tau = \varepsilon F'_{P1} = \varepsilon_1 M_1 \quad (15a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 2F_1^2 \quad (15b)$$

در این روابط،  $F'_P$  و  $M$  به ترتیب نیروی هیدرواستاتیک و شار مومنتوم در واحد عرض کانال می باشند.  $\varepsilon$  و  $\varepsilon_1$  نیز ضرایب نیروی برشی هستند که به صورت تابعی از زبری بستر و عدد فرود مقطع ابتدایی پرش  $F_1 = U_1' / \sqrt{gh_1'}$  در نظر گرفته می شوند. اخیراً در جریانهای تک-لایه ای،  $F_\tau$  به صورت کسری از تفاضل شارهای مومنتوم مقاطع ابتدایی و انتهایی پرش پیشنهاد شده است [۴، ۵ و ۶].

$$F_\tau = \beta (M_1 - M_2), \quad 0 \leq \beta < 1 \quad (16)$$

در این رابطه،  $\beta$  ضریبی مثبت است که تنها با توجه به مشخصات زبری نسبی بستر، تعیین می گردد.



$$\beta = e \left( \frac{K_s}{h_c} \right) = f \left( \frac{K_s}{h_1} \right) \quad (17)$$

که  $K_s$  و  $h_c$  به ترتیب ارتفاع معادل زبری بستر و عمق بحرانی جریان می باشد.  $f$  و  $e$  نیز نشاندهنده سمبول تابع هستند. در این تحقیق، جهت تخمین نیروی برشی بستر در طول پرش از رابطه ذیل که مشابه با معادله (۱۶) است، استفاده شد.

$$F_\tau = \beta(\rho_1 q_1 U_1 - \rho_2 q_2 U_2), \quad 0 \leq \beta < 1 \quad (18)$$

با جایگذاری معادلات (۷ و ۱۸) در معادله (۱۴):

$$\left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 - \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \left( \frac{C_1 - C_a}{C_2 - C_a} \right) \left[ 1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta) \right] + 2F_{D1}^2 (1 - \beta) \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{C_1 - C_a}{C_2 - C_a} \right) (1 + r_e)^2 = 0 \quad (19)$$

مطابق با معادله (۵a) و نامعادله (۵b)، تقریب  $(\rho_2/\rho_1) \approx 1$  معقول به نظر میرسد. همچنین با استفاده از معادله (۶)، معادله (۱۹) به فرم ذیل، ساده می گردد:

$$\left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 - \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \left[ 1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta) \right] (1 + r_e) + 2F_{D1}^2 (1 - \beta) (1 + r_e)^3 = 0 \quad (20a)$$

که قیود این معادله عبارتند از:

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq r_e, \quad 1 \leq F_{D1}, \quad 1 \leq \frac{h_2}{h_1} \quad (20b)$$

معادله (۲۰a)، معادله‌ای از نوع درجه سوم ناقص برحسب نسبت عمقهای مزدوج  $h_2/h_1$  می باشد که در آن نسبت  $h_2/h_1$  تابعی از سه متغیر عدد فرود چگالی مقطع ابتدایی پرش  $F_{D1}$ ، نسبت اختلاط  $r_e$  و ضریب تنش برشی بستر  $\beta$  می باشد. اگر عدد

فرود چگالی در مقطع انتهایی پرش به صورت  $F_{D2} = U_2 / \sqrt{gh_2(\rho_2 - \rho_a)/\rho_2}$  تعریف شود، با توجه به روابط (۶ و ۲):

$$F_{D1}^2 = F_{D2}^2 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 (1 + r_e)^{-3} \quad (21)$$

با در نظر گرفتن تقریب  $(\rho_2/\rho_1) \approx 1$  و معادلات (۲۱ و ۶) در رابطه مومنتوم (۱۹)، معادله (۲۲) تولید می شود که در آن



نسبت  $h_1/h_2$  تابعی از نسبت اختلاط  $r_e$ ، ضریب تنش برشی  $\beta$  و عدد فرود چگالی مقطع انتهایی پرش  $F_{D2}$  می باشد.

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \left[ \frac{1 + 2F_{D2}^2(1-\beta)}{1+r_e} \right] + \frac{2F_{D2}^2(1-\beta)}{(1+r_e)^3} = 0 \quad (22)$$

مطابق با روش کاردانو (Cardano's formula)، معادله (۲۰a) به صورت زیر حل می گردد:

$$\frac{h_2}{h_1} = 2\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = A + B \quad (23)$$

که:

$$\alpha = \text{Arc cos} \left[ \left(-\frac{l}{2}\right) / \sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^3} \right] \quad (24a)$$

$$A = \sqrt[3]{\left(-\frac{l}{2}\right) + i\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}, \quad B = \sqrt[3]{\left(-\frac{l}{2}\right) - i\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \quad (24b)$$

$$k = -[1 + 2F_{D1}^2(1-\beta)](1+r_e), \quad l = 2F_{D1}^2(1-\beta)(1+r_e)^3 \quad (24c)$$

با توجه به قیود (۲۰b)، مقادیر  $k$  و  $l$  همواره باید به ترتیب منفی و مثبت باشند. لذا شرط وجود مقدار حقیقی مثبت جهت  $h_2/h_1$  (معادله ۲۳)، آن است که:

$$-1 \leq \left[ \left(-\frac{l}{2}\right) / \sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^3} \right] < 0 \quad (25)$$

با توجه به قید (۲۵)، معادله (۲۰a)، علاوه بر جواب (۲۳) دارای یک ریشه مثبت کوچکتر و یک ریشه منفی دیگر نیز می باشد. ریشه مثبت کوچکتر، نشاندهنده نسبت عمق جریان دانسیته در انتهای ناحیه اختلاط  $h_2'$  به عمق  $h_1$  است.

$$\frac{h_2'}{h_1} = -2\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)} \cos\left(\frac{\alpha + \pi}{3}\right) = -\frac{(A+B)}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B) \quad (26)$$

همچنین ریشه منفی و غیر قابل قبول معادله (۲۰a) عبارت است از:



$$\frac{h_2}{h_1} = -2\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)} \cos\left(\frac{\alpha - \pi}{3}\right) = -\frac{(A+B)}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B) \quad (27)$$

در صورتی که قید (۲۵) ارضا نگردد، معادله (۲۰a) دارای یک ریشه منفی و دو ریشه موهومی خواهد بود که هیچکدام قابل قبول نخواهند بود.

همانطور که قبلاً ذکر گردید، در ناحیه غلطکی، اختلاط سیال محیطی با جریان دانسیته وجود ندارد، لذا:

$$q_{2'} = q_2, \quad \rho_{2'} = \rho_2 \quad (28)$$

که اندیس ۲'، نشاندهنده مقطع انتهایی ناحیه اختلاط است.

با استفاده از موازنه مومنتها، نسبت عمق انتهایی پرش  $h_2$  به عمق جریان در شروع ناحیه غلطکی  $h_{2'}$ ، برابر خواهد شد با:

$$\frac{h_2}{h_{2'}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8(1 - \beta)F_{D2'}^2} - 1 \right) \quad (29)$$

که  $F_{D2'}$  عدد فرود چگالی در شروع ناحیه غلطکی است.

$$F_{D2'} = q_{2'} / \sqrt{gh_{2'}^3((\rho_{2'} - \rho_a) / \rho_{2'})} = F_{D2}(h_2/h_{2'})^{1.5} \quad (30)$$

اگر نسبت اختلاط  $r_e$  برابر صفر شود، معادله (۲۰a)، به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8(1 - \beta)F_{D1}^2} - 1 \right) \quad (31)$$

در صورتیکه  $\rho_a / \rho_1 \approx 0$  باشد، حالتی مشابه با پرشهای ایجاد در کانالهای-باز تک-لایه‌ای ایجاد می شود. در این وضعیت،

معادله (۳۱) را می توان به فرم ذیل بازنویسی نمود:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8(1 - \beta)F_1^2} - 1 \right) \quad (32)$$

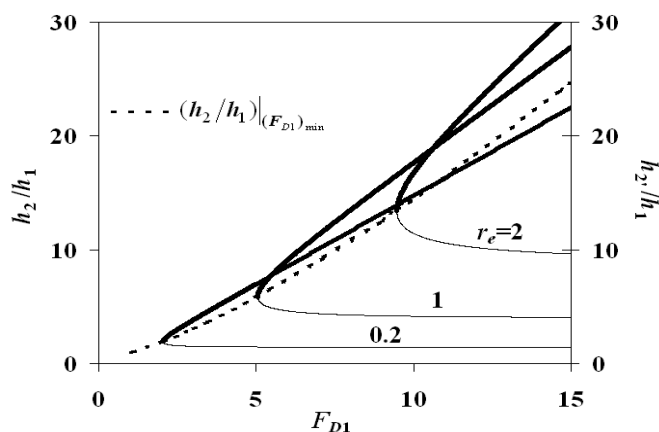
معادله فوق الذکر با معادله پیشنهاد شده کارلو و فرو (۲۰۰۴b) و کارلو و همکاران (۲۰۰۷) که جهت پرش در جریانهای تک-

فازه عبوری از روی بسترهای زبر است، معادل می باشد. با قرار دادن  $\beta = 0$  جهت بستر صاف، معادلات (۳۱ و ۳۲) به

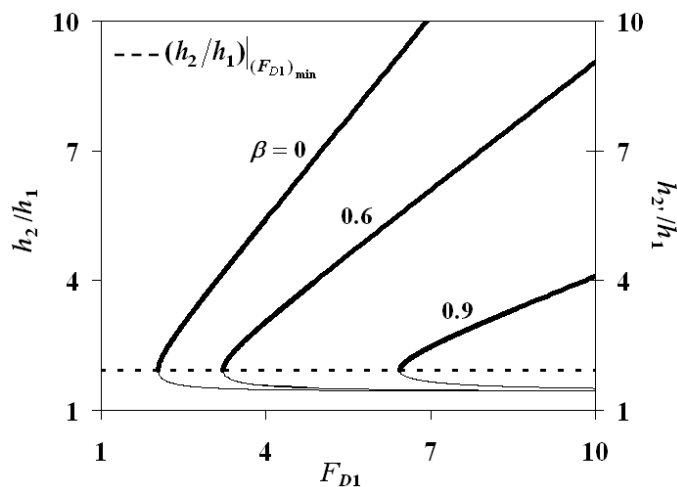


ترتیب به معادله پیشنهادی یه و گوها (رابطه ۱)، و معادله بلانگر تبدیل خواهند شد.

در شکل‌های (۳ تا ۵)، نسبت‌های  $h_2/h_1$  و  $h_2'/h_1$  (محاسبه شده به ترتیب توسط روابط ۲۳ و ۲۶) به صورت توابعی از نسبت اختلاط  $r_e$ ، عدد فرود چگالی مقطع ابتدایی پرش  $F_{D1}$  و ضریب تنش برشی بستر  $\beta$  رسم گردیده‌اند. با ثابت در نظر گرفتن  $r_e$  و  $\beta$ ، با افزایش عدد فرود چگالی در مقطع ۱، مقادیر  $h_2/h_1$  و  $h_2'/h_1$  به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند (شکل‌های ۳ تا ۵). لازم به ذکر است که این افزایش  $h_2/h_1$  و کاهش  $h_2'/h_1$  در بسترهای زبرتر، به ترتیب از نرخ کندتر و تندتری برخوردار است (شکل ۴).



شکل ۳: تغییرات نسبت‌های  $h_2/h_1$  (خطوط ضخیم) و  $h_2'/h_1$  (خطوط باریک) با توجه به پارامتر نسبت اختلاط  $r_e$  و عدد فرود چگالی مقطع ماقبل پرش  $F_{D1}$  در شرایط صاف بودن بستر ( $\beta = 0$ )



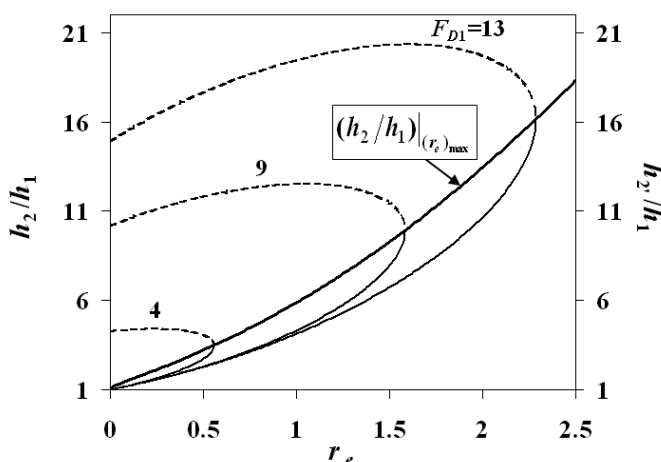


شکل ۴: تغییرات نسبت‌های  $h_2/h_1$  (خطوط ضخیم) و  $h_2/h_1$  (خطوط باریک) با توجه به تغییرات ضریب تنش برشی

بستر  $\beta$  و عدد فرود چگالی مقطع ماقبل پرش  $F_{D1}$  ( $r_e=0.2$ )

همانطور که در شکل‌های (۳ و ۵) دیده می‌شود، اگر خصوصیات جریان در مقطع ۱ ( $F_{D1}$ ) و همچنین وضعیت زبری بستر ( $\beta$ ) معلوم باشند، با افزایش نسبت اختلاط،  $h_2/h_1$  همواره زیاد می‌گردد ولیکن  $h_2/h_1$  ممکن است، ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش یابد یا اینکه کلاً یک منحنی نزولی باشد، لذا منحنی نسبت  $h_2/h_1$  دارای یک ماکزیمم مطلق و یک یا دو مینیمم نسبی است. جهت یافتن حداکثر نسبت اختلاط  $(r_e)_{max}$ ، باید مشتق نسبت به  $h_2/h_1$  را برابر با صفر قرار داد:

$$\frac{dr_e}{d\left(\frac{h_2}{h_1}\right)} = 0 \Rightarrow (r_e)_{max} = \frac{3\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}{1 + 2F_{D1}^2(1-\beta)} - 1 \quad (33)$$



شکل ۵: تغییرات نسبت‌های  $h_2/h_1$  (خط چین‌ها) و  $h_2/h_1$  (خطوط) با توجه به تغییرات نسبت اختلاط  $r_e$  و عدد فرود چگالی

مقطع ماقبل پرش  $F_{D1}$  ( $\beta = 0.3$ )

با جایگزینی رابطه (۳۳) در معادله (۲۰a)، نسبت عمق مزدوج متناظر با  $(r_e)_{max}$  برابر می‌شود با:



$$\left. \frac{h_2}{h_1} \right|_{(r_e)_{\max}} = \left. \frac{h_2'}{h_1'} \right|_{(r_e)_{\max}} = \frac{1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta)}{3F_{D1}^{\frac{2}{3}} (1 - \beta)^{\frac{1}{3}}} \quad (34)$$

با توجه به معادلات (۳۳ و ۳۴):

$$(r_e)_{\max} = \frac{1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta)}{3F_{D1}^{\frac{4}{3}} (1 - \beta)^{\frac{2}{3}}} - 1 \quad (35)$$

جهت بستر صاف ( $\beta = 0$ )، روابط بدست آمده (۳۴ و ۳۵) با روابط بدست آمده بادور و اینیک (۱۹۸۳) یکسان می باشند. در شکلهای (۶a) و (۶b)، مقادیر  $(r_e)_{\max}$  و  $(h_2/h_1)_{(r_e)_{\max}}$  به صورت توابعی از متغیرهای  $F_{D1}, \beta$  رسم شده اند. با ثابت بودن زبری بستر، هرچه عدد فرود چگالی در مقطع فوق بحرانی افزایش یابد، مقادیر  $(r_e)_{\max}$  و  $(h_2/h_1)_{(r_e)_{\max}}$  نیز افزایش می یابند. همانطور که مشاهده می گردد، شیب نمودار در محیطهای زبرتر، کمتر می باشد. به عبارت دیگر، هر چه ضریب زبری بزرگتر باشد، درصد افزایش  $(r_e)_{\max}$  و  $(h_2/h_1)_{(r_e)_{\max}}$  نیز کاهش می یابد. همچنین به ازای  $F_{D1}$  معین، با افزایش زبری ( $\beta$ )، حداکثر نسبت اختلاط و عمق مزدوج متناظر با آن کم می شود.

همانطور که قبلاً ذکر گردید، نسبت عمقهای مزدوج  $h_2/h_1$  دارای دو و یا سه نقطه اکسترمم نسبی است. ماکزیمم مقدار نسبت عمقهای مزدوج پرش از برابر صفر قرار دادن مشتق  $h_2/h_1$  نسبت به  $r_e$  بدست می آید:

$$\begin{cases} (h_2/h_1)_{\max} = \left( \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \right) \frac{1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta)}{F_{D1}^{\frac{2}{3}} (1 - \beta)^{\frac{1}{3}}}, & \text{if } 2.255 \leq F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \\ (h_2/h_1)_{\max} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8(1 - \beta)F_{D1}^2} - 1 \right), & \text{if } F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} < 2.255 \end{cases} \quad (36)$$

همچنین مینیمم مطلق نسبت  $h_2/h_1$  از روابط ذیل، قابل محاسبه می باشد:

$$\begin{cases} (h_2/h_1)_{\min} = (h_2/h_1)_{(r_e)_{\max}} = \frac{1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta)}{3F_{D1}^{\frac{2}{3}} (1 - \beta)^{\frac{1}{3}}}, & \text{if } F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \leq 8.204 \\ (h_2/h_1)_{\min} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8(1 - \beta)F_{D1}^2} - 1 \right), & \text{if } 8.204 < F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (37)$$

نسبت اختلاط متناظر با  $(h_2/h_1)_{\min}$  و  $(h_2/h_1)_{\max}$  به ترتیب برابر می شوند با:



$$\left\{ \begin{array}{l} r_e \left| \left( \frac{h_2}{h_1} \right)_{\max} = \left( \frac{\sqrt[3]{4}}{6} \right) \frac{1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta)}{F_{D1}^{\frac{4}{3}} (1 - \beta)^{\frac{2}{3}}} - 1, \quad \text{if } 2.255 \leq F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \\ r_e \left| \left( \frac{h_2}{h_1} \right)_{\max} = 0, \quad \text{if } F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} < 2.255 \end{array} \right. \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_e \left| \left( \frac{h_2}{h_1} \right)_{\min} = (r_e)_{\max} = \frac{1 + 2F_{D1}^2 (1 - \beta)}{3F_{D1}^{\frac{4}{3}} (1 - \beta)^{\frac{2}{3}}} - 1, \quad \text{if } F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \leq 8.204 \\ r_e \left| \left( \frac{h_2}{h_1} \right)_{\min} = 0, \quad \text{if } 8.204 < F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (39)$$

با توجه به معادلات (۲۱ و ۳۶-۳۹)، اعداد فرود چگالی مقطع انتهایی پرش که متناظر با مقادیر حداکثر و حداقل نسبت عمقهای مزدوج پرش می باشند، به ترتیب از روابط ذیل قابل محاسبه خواهند بود:

$$F_{D2} \left| \left( \frac{h_2}{h_1} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4(1 - \beta)} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}, \quad \text{if } 2.255 \leq F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

$$F_{D2} \left| \left( \frac{h_2}{h_1} \right)_{\min} = \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta)} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}, \quad \text{if } F_{D1} (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \leq 8.204 \quad (41)$$

همانطور که در شکل‌های (۳ و ۴) مشاهده می گردد، مقادیر  $h_2/h_1$  و  $h_2/h_1$  (به ترتیب روابط ۲۳ و ۲۶)، در عدد فرود مینیمم  $(F_{D1})_{\min}$  با یکدیگر برابر می گردند. به عبارت دیگر جهت  $(F_{D1})_{\min}$ ، ناحیه غلطکی پرش از بین می رود. با توجه به مقدار مینیمم نامعادله (۲۵) و معادله (۲۴c)، اگر نسبت اختلاط  $r_e$  و همچنین وضعیت زبری بستر  $(\beta)$  معلوم باشند، حداقل مقدار عدد فرود چگالی در مقطع ابتدایی پرش  $(F_{D1})_{\min}$ ، معادل می شود با:

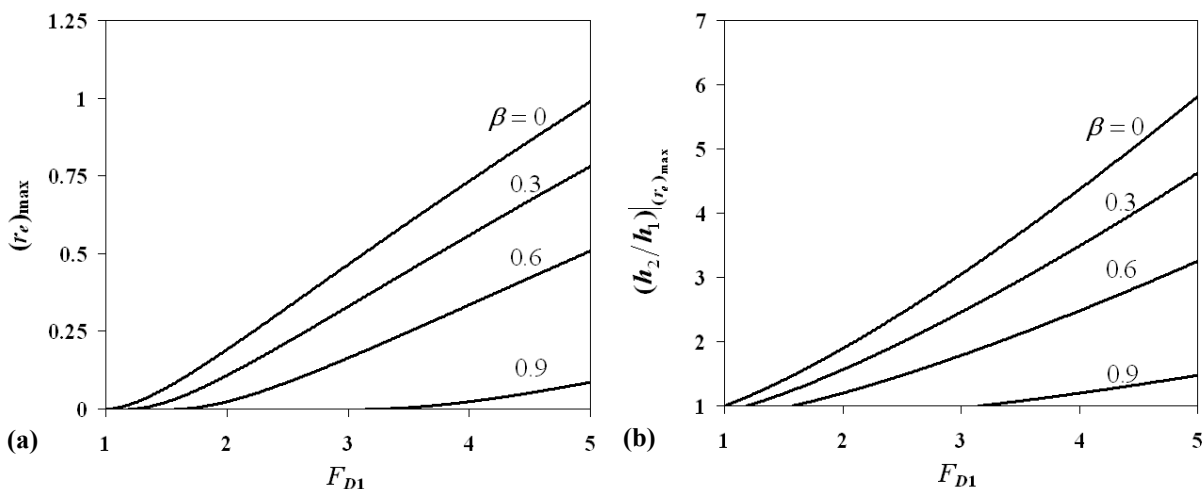
$$(F_{D1})_{\min} = \left[ a \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - b / (1 - \beta) \right]^{0.5} \quad (42)$$



$$a = 2\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}, \quad b = \frac{4 - 9(1+r_e)^3}{8}, \quad \theta = \text{Arc cos} \left[ \left( -b^3 + \frac{3}{8}b - \frac{1}{16} \right) / \left( b^2 - \frac{1}{4} \right)^{1.5} \right] \quad (43)$$

با استفاده از روابط (۲۳، ۲۴c)، نسبت عمق مزدوج متناظر با  $(F_{D1})_{\min}$  از رابطه (۴۴) بدست می آید:

$$\frac{h_2}{h_1} \Big|_{(F_{D1})_{\min}} = \frac{h_2'}{h_1'} \Big|_{(F_{D1})_{\min}} = 2\sqrt{\left( -\frac{k}{3} \right) \cos\left( \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{1 + 2(F_{D1})_{\min}^2 (1 - \beta)}{3(F_{D1})_{\min}^3 (1 - \beta)^{\frac{1}{3}}} \quad (44)$$



شکل ۶: تغییرات (a)  $(r_e)_{\max}$  و (b)  $(h_2/h_1)_{(r_e)_{\max}}$ ، با توجه به تغییرات عدد فرود چگالی مقطع ماقبل پرش  $F_{D1}$  و ضریب

تنش برشی بستر  $\beta$

برای هر زبری ثابت، با افزایش نسبت اختلاط  $r_e$ ، مقادیر  $(F_{D1})_{\min}$  نیز افزایش می یابند (شکل ۷). این افزایش در بسترهای زیرتر به علت شیب بزرگتر نمودارها، مشهودتر است. همچنین در یک نسبت اختلاط ثابت، با زیاد شدن ضریب زبری  $\beta$ ، مقدار  $(F_{D1})_{\min}$  افزایش می یابد (شکلهای ۴ و ۷).

همانطور که در شکل (۴) مشاهده می گردد، برای هر نسبت اختلاط  $r_e$  ثابت، هرچه بستر زیرتر باشد، نسبتهای  $h_2/h_1$  و  $h_2'/h_1'$  متناظر با عدد فرود چگالی در مقطع ۱  $(F_{D1})$ ، به ترتیب کاهش و افزایش می یابند و یا به عبارتی دیگر، مقدار دو



همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸



عمق  $h_2$  و  $h_2'$  به یکدیگر نزدیکتر می شوند. این بدان معنا می باشد که با افزایش زبری، ناحیه غلطکی پرش، کوچکتر می گردد. در این حالت حداکثر مقدار ممکن ضریب زبری  $\beta$  که متناظر با مینیمم مقدار  $h_2/h_1$  است، از رابطه ذیل، قابل محاسبه خواهد بود. لازم به ذکر است که جهت این مقدار از ضریب زبری، ناحیه غلطکی وجود نخواهد داشت.

$$(\beta)_{\max} = 1 - \frac{a \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - b}{F_{D1}^2} \quad (45)$$

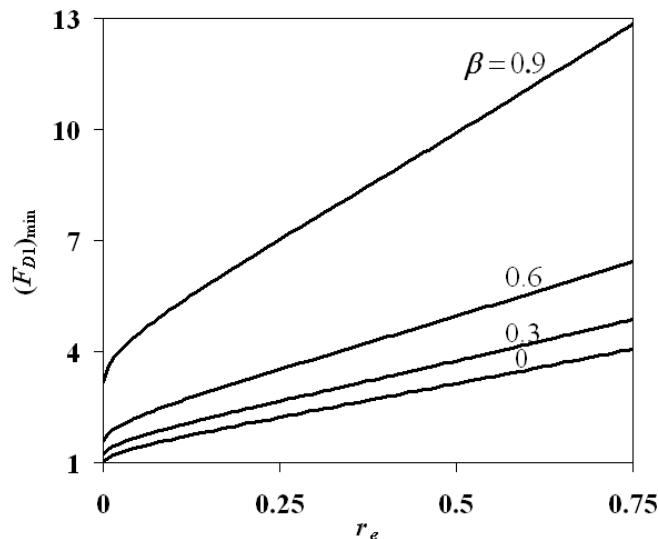
نسبت عمق مزدوج متناظر با  $(\beta)_{\max}$  برابر می شود با:

$$\left. \frac{h_2}{h_1} \right|_{(\beta)_{\max}} = \left. \frac{h_2'}{h_1} \right|_{(\beta)_{\max}} = 2 \sqrt{\left| -\frac{k}{3} \right|} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + 2 F_{D1}^2 [1 - (\beta)_{\max}]}{3 F_{D1}^{\frac{2}{3}} [1 - (\beta)_{\max}]^{\frac{1}{3}}} \quad (46)$$

اگر نسبت اختلاط سیال تمیز با ناحیه پرش، برابر با صفر باشد، خواهیم داشت:

$$(\beta)_{\max} = 1 - \frac{1}{F_{D1}^2}, \quad \left. \frac{h_2}{h_1} \right|_{(\beta)_{\max}} = \left. \frac{h_2'}{h_1} \right|_{(\beta)_{\max}} = 1 \quad (47)$$

معادله (۴۷) بدین معنا است که در این حالت، پرش رخ نخواهد داد.



شکل ۷: تغییرات  $(F_{D1})_{min}$  با توجه به تغییرات نسبت اختلاط  $r_e$  و ضریب تنش برشی بستر  $\beta$

### نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از معادلات بقای جرم، حجم و مومنتوم، پرش دانسیته به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت و معادله‌ای جهت نسبت عمقهای مزدوج پرش با در نظر گرفتن اختلاط سیال محیطی به درون جریان ثقلی و همچنین وجود زبری بستر بدست آمد. با فرض ثابت بودن عدد فرود چگالی بالادست پرش و همچنین نسبت اختلاط، مشخص گردید که با افزایش زبری بستر، علاوه بر کاهش نسبت عمق مزدوج  $h_2/h_1$ ، ناحیه غلطکی پرش نیز کوچکتر می شود. نشان داده شد که با افزایش عدد فرود چگالی مقطع ابتدایی پرش، نرخ افزایش نسبت  $h_2/h_1$ ، کندتر می گردد. علاوه بر این، رابطه‌ای مابین حداقل مقدار ممکن عدد فرود چگالی بالادست پرش، نسبت اختلاط و زبری نسبی بستر پیشنهاد شد. همچنین معادلاتی جهت محاسبه حداقل مقدار ممکن نسبت اختلاط و ضریب تنش برشی بستر بدست آمد. لازم به ذکر است که این مقادیر حدی، متناظر با حداقل مقدار ممکن  $h_2/h_1$  بودند.



---

همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸

---



منابع

- ۱- Alavian, V., "Behavior of density currents on an incline." J. Hydraul. Eng., ۱۱۲(۱), ۱۹۸۶, ۲۷-۴۲.
- ۲- Baddour, R. E., and Abbink, H., "Turbulent underflow in a short channel of limited depth." J. Hydraul. Eng., ۱۰۹(۵), ۱۹۸۳, ۷۲۲-۷۴۰.
- ۳- Carollo, F. G., and Ferro, V., "Contributo allo studio della lunghezza del risalto libero su fondo liscio e scabro." Rivista di Ingegneria Agraria, ۳۵(۴), ۲۰۰۴(a), ۱۳-۲۰ (in Italian).
- ۴- Carollo, F. G., and Ferro, V., "Determinazione delle altezze coniugate del risalto libero su fondo liscio e scabro." Rivista di Ingegneria Agraria, ۳۵(۴), ۲۰۰۴(b), ۱-۱۱ (in Italian).
- ۵- Carollo, F. G., Ferro, V., and Pampalone, V., "A new solution of classical hydraulic jump." J. Hydraul. Eng., ۱۳۵(۶), ۲۰۰۹, ۵۲۷-۵۳۱.
- ۶- Carollo, F. G., Ferro, V., and Pampalone, V., "Hydraulic jumps on rough beds." J. Hydraul. Eng., ۱۳۳(۹), ۲۰۰۷, ۹۸۹-۹۹۹.
- ۷- Dallimore, C. J., Imberger, J., and Ishikawa, T., "Entrainment and turbulence in a saline underflow in Lake Ogawara." J. Hydraul. Eng., ۱۲۷(۱۱), ۲۰۰۱, ۹۳۷-۹۴۸.
- ۸- Ead, S. A., and Rajaratnam, N., "Hydraulic jumps on corrugated beds." J. Hydraul. Eng., ۱۲۸(۷), ۲۰۰۲, ۶۵۶-۶۶۳.
- ۹- Fozdar, F. M., Parker, G., and Imberger, J., "Matching temperature and conductivity sensor response characteristics." J. Phys. Oceanogr., ۱۵(۱۱), ۱۹۸۵, ۱۵۵۷-۱۵۶۹.



---

همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸

---



- ۱۰- Garcia, M. H., "Hydraulic jumps in sediment-driven bottom currents." *J. Hydraul. Eng.*, ۱۱۹(۱۰), ۱۹۹۳, ۱۰۹۴-۱۱۱۷.
- ۱۱- Gill, M. A., "Effect of boundary roughness on hydraulic jump." *Int. Water Power Dam Constr.*, ۳۲(۱), ۱۹۸۰, ۲۲-۲۴.
- ۱۲- Hartel, C., Meiburg, E., and Necker, F., "Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part ۱: Flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries." *J. Fluid Mech.*, ۴۱۸, ۲۰۰۰(a), ۱۸۹-۲۱۲.
- ۱۳- Hartel, C., Carlsson, F., and Thunblom, M., "Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part ۲: The Lobe-and-Cleft instability." *J. Fluid Mech.*, ۴۱۸, ۲۰۰۰(b), ۲۱۳-۲۲۹.
- ۱۴- Hassid, S., Regev, A., and Poreh, M., "Turbulent energy dissipation in density jumps." *J. Fluid Mech.*, ۵۷۲, ۲۰۰۷, ۱-۱۲.
- ۱۵- Hogg, A. J., and Woods, A. W., "The transition from inertia-to-bottom-drag-dominated motion of turbulent gravity current." *J. Fluid Mech.*, ۴۴۹, ۲۰۰۱, ۲۰۱-۲۱۰.
- ۱۶- Holland, D. M., Rosales, R. R., Stefanica, D, and Tabak, E. G., "Internal hydraulic jump and mixing in two-layer flows." *J. Fluid Mech.*, ۴۷۰, ۲۰۰۲, ۶۳-۸۳.
- ۱۷- Hughes, W. C., and Flack, J. E., "Hydraulic jump properties over a rough bed." *J. Hydraul. Eng.*, ۱۱۰(۱۲), ۱۹۸۴, ۱۷۵۵-۱۷۷۱.
- ۱۸- Kostic, S., and Parker, G., "The response of turbidity currents to a canyon-fan transition: internal hydraulic jumps and depositional signatures." *J. Hydraul. Res.*, ۴۴(۵), ۲۰۰۶, ۶۳۱-۶۵۳.
- ۱۹- Rajaratnam, N., "The hydraulic jump as a wall jet." *J. Hydraul. Div.*, ۹۱(۵), ۱۹۶۵, ۱۰۷-۱۳۲.
- ۲۰- Regev, A., Hassid, S., and Poreh, M., "Calculation of entrainment in density jumps." *J. Environ Fluid*



---

همایش ملی مدیریت بحران آب  
*The National Conference on Water Crisis Management*  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، اسفندماه ۱۳۸۸

---



- Mech., ۶, ۲۰۰۶, ۴۰۷-۴۲۴.
- ۲۱- Regev, A., Hassid, S., and Poreh, M., "Density jumps in smoke flow along horizontal ceilings." Fire Safety J., ۳۹, ۲۰۰۴, ۴۶۵-۴۷۹.
- ۲۲- Simpson, J. E., Gravity currents in the environment and in the laboratory, ۲nd ed., Cambridge, U.K., Cambridge University Press, ۱۹۹۷.
- ۲۳- Simpson, J. E., "Gravity currents in the laboratory, atmosphere, and ocean." Ann. Rev. Fluid Mech., ۱۴, ۱۹۸۲, ۲۱۳-۲۳۴.
- ۲۴- Stefan, H., and Hayakawa, N., "Mixing induced by an internal hydraulic jump." Water Resources Bulletin, American Water Resources Association., ۸(۳), ۱۹۷۲, ۵۳۱-۵۴۵.
- ۲۵- Wilkinson, D. L., and Wood, I. R., "A rapidly varied flow phenomenon in a two-layer flow." J. Fluid Mech., ۴۷(۲), ۱۹۷۱, ۲۴۱-۲۵۶.
- ۲۶- Wood, I. R., and Simpson, J. E., "Jumps in layered miscible fluids." J. Fluid Mech., ۱۴۰, ۱۹۸۴, ۳۲۹-۳۴۲.
- ۲۷- Yih, C. S., and Guha, C. R., "Hydraulic jump in a fluid system of two layers." Tellus, ۷(۳), ۱۹۵۵, ۳۵۸-۳۶۶.