



بررسی نحوه تشکیل مفصل پلاستیک در تیرهای دارای ماهیچه خطی در قابهای خمشی تحت اثر بار زلزله

محمود رضا شیراوند¹، رضا راستی اردکانی²، محسن سالاری³

1- استادیار، دانشکده آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی پردیس شهید عباسپور، تهران، ایران

shiravand@pwut.ac.ir

2- استادیار، دانشکده آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی پردیس شهید عباسپور، تهران، ایران

rasti@pwut.ac.ir

3- دانشجوی دکتری زلزله، دانشکده آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی پردیس شهید عباسپور، تهران،

ایران

M_salari@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله نحوه تشکیل مفصل پلاستیک در یک قاب خمشی که از تیرهای دارای ماهیچه خطی در دو انتها تشکیل شده است؛ مورد بررسی قرار می گیرد. به منظور بررسی این موضوع از تعدادی مدل قاب یک طبقه و یک دهانه که در یک نرم افزار اجزای محدود توسط المانهای صفحه بصورت سه بعدی مدل شده اند؛ استفاده شده است. نتایج حاصله سه حالت مجزا را مشخص می کنند؛ حالتی که مفصل پلاستیک در ابتدا یا انتهای ماهیچه تشکیل می شود و حالتی که مفصل پلاستیک در طول ماهیچه گسترش می یابد. همچنین در انتها نحوه در نظر گرفتن محل مفصل پلاستیک در المانهای یک بعدی قابها مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: مفصل پلاستیک، آنالیز غیرخطی، تیرهای ماهیچه ای، پوش آور، شکل پذیری.

1. مقدمه

گاهی مواقع به دلایل اقتصادی و یا به دلایل معماری دو انتهای تیر در قابهای خمشی به صورت ماهیچه خطی (Tapered) طراحی می شود. تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه تیرهای ماهیچه ای و یا قابهای دارای اعضای ماهیچه ای انجام شده است. بعضی از محققان در زمینه کمانش خمشی و یا پیچشی تیرهای ماهیچه ای تحقیق کرده اند [1 و 2 و 3 و 4] و برخی در زمینه ارتعاش آزاد اعضای ماهیچه ای تحقیق کرده اند [5 و 6 و 7]. تحقیقاتی نیز در زمینه رفتار غیرخطی سازه های دارای اعضای ماهیچه ای انجام شده است که نمونه هایی ذکر می گردد. (1974) A.S. Ranshi و N.R. Chitkara و W. Johnson بارفروریزی تیرهای کنسول دارای ماهیچه خطی در انتها را تحت بار برشی و محوری در نوک طره برای شرایط تنش صفحه ای مورد مطالعه قرار دادند [8]. (1991) J.S. Hwang و K.C. Chang و G.C. Lee پاسخ دینامیکی یک قاب ساخته شده با اعضای ماهیچه ای با مقیاس 1 به 5 را تحت تحریک لرزه ای السترئو با استفاده از میز لرزه ای مورد بررسی



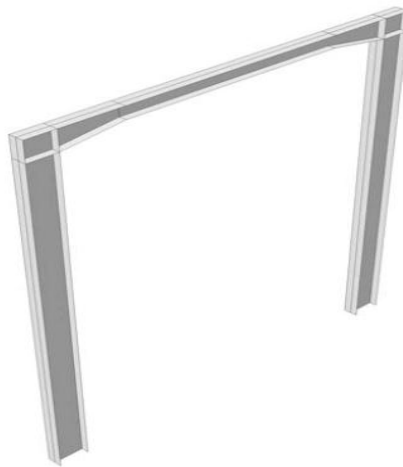
قرار دادند [9]. در این آزمایش قسمت وسیعی از تیرهایچه ای تسلیم شد که نشان می دهد این توزیع پلاستیسیته نیاز شکل پذیری محلی کمتری را از حالت پلاستیسیته متمرکز به ازای اتلاف انرژی ثابت طلب می کند. طرح بهینه پلاستیک قابها با اعضای ماهیچه ای نیز تاکنون مورد توجه بوده است [10 و 11]. حل معادله دیفرانسیل تعادل تیرهای ماهیچه ای با در نظر گرفتن اثرهمزمان نیروی برشی و نیروی محوری و تعیین ماتریس سختی المان ماهیچه ای توسط (2002) Guo-Qiaang Li و Jin-Jun Li مورد مطالعه قرار گرفته است و همچنین همین محققان در سال 2004 طراحی قابهای فلزی بااعضای ماهیچه ای را براساس قابلیت اطمینان مورد بررسی قرار دادند [12 و 13]. همچنین (2006) Susantha K.A.S و T.Aoki و T.Kumano مقاومت و شکل پذیری پایه های پلهای فلزی باورقهای ماهیچه ای خطی را بررسی کردند. (2012) John-kook Hong و Chia-Ming Uang آزمایش چرخه ای بر روی یک قاب فلزی با مقیاس کامل که از اعضای ماهیچه دار ساخته شده است انجام دادند تارفتار این نوع قاب را تحت اثر نیروی برشی بررسی کنند [15]. آنچه مادر این مقاله بررسی میکنیم این است که در یک قاب دارای تیرهای ماهیچه خطی تحت اثر نیروی جانبی زلزله مفصل پلاستیک در کجا تشکیل می شود و توزیع آن چگونه است.

بعد از وقوع زلزله های مهم اخیر نظیر Northridge و Kobe نیاز مبرمی به روشهای دقیقتر برای تعیین نیاز لرزه ای سازه ها به منظور لحاظ کردن رفتار غیرخطی سازه ها احساس شد. بدین منظور تاکنون دو ابزار تحلیلی نظیر تحلیل استاتیکی غیرخطی (پوش آور) و تحلیل دینامیکی غیرخطی (تاریخچه زمانی) مورد استفاده قرار گرفته اند. البته این تحلیلها می توانند در یک مدل سه بعدی اجزای محدود استفاده شوند که این گونه مدل سازی برای سازه های پر عضو غیراقتصادی و زمان بر است و برای مدل سازی سازه های معمول که دارای تعداد زیادی عضو هستند اقتصادی ترین راه حل استفاده از مدل قاب سه بعدی با استفاده از المانهای یک بعدی می باشد. در آنالیز غیرخطی مدل قاب از دو مدل برای مدل نمودن رفتار پلاستیک سازه استفاده می شود که عبارتند از مدل پلاستیسیته متمرکز (مفصل پلاستیک) و مدل پلاستیسیته توزیع شده (مدل fiber). در قابهای خمشی تحت اثر زلزله مفاصل پلاستیک در دو انتهای تیر و دواتهای ستون تشکیل می شوند. اما در قابهای دارای ماهیچه خطی این مسئله مبهم است و در یک آنالیز غیرخطی نیاز است بدانیم مفصل پلاستیک در کدام قسمت ماهیچه تشکیل می شود و نحوه تشکیل آن به چه صورت است. ما در این مقاله به دنبال راه حلی برای این مسئله هستیم. بدین منظور از آنالیز استاتیکی غیرخطی یک مدل اجزای محدود که از یک قاب یک طبقه و یک دهانه به ارتفاع 8.5 متر و دهانه خالص 7 متر تشکیل شده استفاده شده است. در این مدل از هندسه های مختلف برای قسمت ماهیچه به منظور بررسی دقیق مسئله استفاده شده است. مدل اجزای محدود سه بعدی است و تیرها و ستون ها با استفاده از المانهای صفحه ای (Shell) مدل شده اند. رفتار مصالح تیر به صورت الاستوپلاستیک ایده آل (دوخطی) با تنش جاری شدن 240N/mm^2 و مدول الاستیسیته 210KN/mm^2 در نظر گرفته شده اما مصالح ستون فقط به صورت الاستیک با همان مدول الاستیسیته تیر مدل شده است. برای آنالیز غیر خطی، قابهای مورد نظر تا تغییر مکان 500mm در نرم افزار ABAQUS پوش شده اند. در این مقاله نحوه پلاستیک شدن تیر به

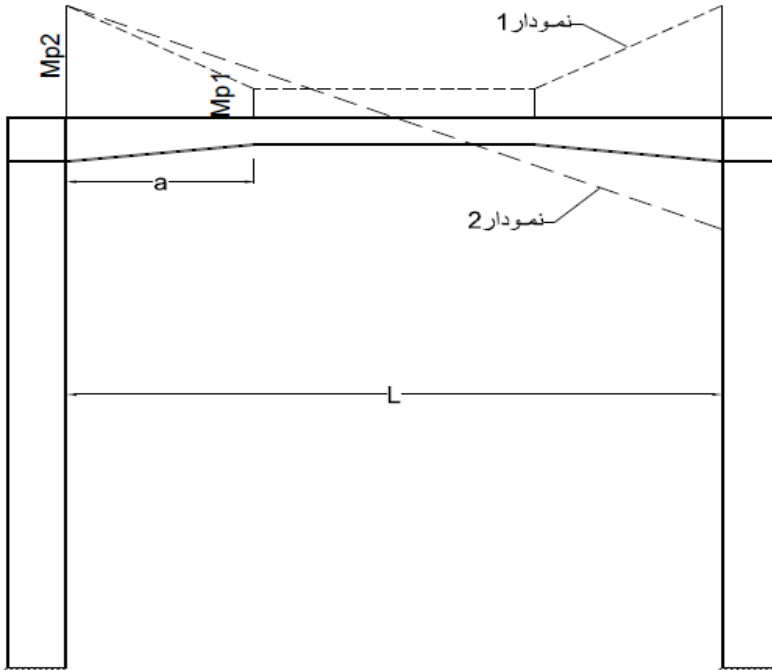
ازای هندسه های مختلف ماهیچه مورد بررسی قرار گرفته است. درانتها توصیه هایی برای نحوه مدل کردن مفاصل پلاستیک درمدلهای قابی که در آن از المانهای تک بعدی استفاده میشود؛ ارائه شده است.

2. طرح مسئله وراه حل اولیه

قاب مورد مطالعه در شکل 1 نشان داده شده است. ارتفاع قاب 8.5 متر و دهانه خالص 7 متری باشد. مقطع ستون $650 \times 300 \times 25 \times 10$ می باشد(منظور از $650 \times 300 \times 25 \times 10$ تیورق H شکل با عرض و ضخامت 300 و 25 میلیمتر و ارتفاع مقطع 650 میلیمتر و ضخامت جان 10 میلیمتری باشد) و مقطع تیر درقسمت ثابت $330 \times 300 \times 15 \times 10$ فرض شده است. در قسمت ماهیچه عرض و ضخامت بال به ترتیب برابر 500mm و 15mm در نظر گرفته شده است. ضخامت جان برابر 10mm و ارتفاع آن متغیر می باشد. طول قسمت ماهیچه (a) و ارتفاع جان تیر درمحل تقاطع با ستون برای هندسه های مختلف متفاوت در نظر گرفته شده است. 13 هندسه مختلف برای قسمت ماهیچه در نظر گرفته شده است که در جدول 1 آمده است. در این تحقیق رفتار مصالح تیربه صورت الاستوپلاستیک ایده آل (دوخطی) با تنش جاری شدن 240N/mm^2 و مدول الاستیسیته 210000N/mm^2 در نظر گرفته شده اما مصالح ستون فقط به صورت الاستیک با همان مدول الاستیسیته تیرمدل شده است. تکیه گاه جانبی کافی برای جلوگیری از کمناش پیچشی جانبی تیر در نظر گرفته شده است. واضح است در صورتیکه از اثرات تنش برشی صرفنظر کنیم نمودار ظرفیت پلاستیک مقطع مطابق نمودار 1 در شکل 2 می باشد(البته اگر تغییرات ظرفیت پلاستیک مقطع را تقریباً برای تیر 1 شکل خطی فرض کنیم). همچنین نمودار لنگر زلزله که به صورت افزایشی زیاد می شود مطابق نمودار 2 می باشد.



شکل 1- مدل سه بعدی قاب در نرم افزار ABAQUS



شکل 2- نمودار ظرفیت پلاستیک (نمودار 1) و خمشی ناشی از نیروی لرزه ای در تیر (نمودار 2)

همانطور که در شکل 2 دیده می شود در صورتیکه شیب نمودارهای 1 و 2 مساوی باشند کل مقاطع ماهیچه همزمان به ظرفیت پلاستیک می رسند. این حالت زمانی اتفاق می افتد که داشته باشیم:

$$\frac{Mp1}{Mp2} = \frac{l-2a}{l} \quad (1)$$

و یا به عبارت دیگر:

$$\frac{Z1}{Z2} = \frac{l-2a}{l} \quad (2)$$

که در روابط فوق $Mp1$ و $Mp2$ ظرفیت پلاستیک مقطع تیر در ابتدا و انتهای ماهیچه بوده و $Z1$ و $Z2$ اساس مقطع پلاستیک متناظر می باشند.

همچنین از نمودارهای ظرفیت و نیاز لرزه ای در شکل 2 می توان دریافت که اگر شیب خط نمودار 1 بزرگتر از شیب نمودار 2 باشد مفصل پلاستیک ابتدا در نقطه 1 ایجاد می شود ($\frac{Z1}{Z2} < \frac{l-2a}{l}$) و در صورتیکه شیب خط نمودار 1 کمتر از نمودار 2 باشد مفصل پلاستیک ابتدا در نقطه 2 تشکیل می شود ($\frac{Z1}{Z2} > \frac{l-2a}{l}$). البته اینکه بعد از تشکیل اولین مفصل چه اتفاقی می افتد در بخشهای بعدی از روی آنالیز دقیق مشخص خواهد شد.

به منظور بررسی نتایج فوق هندسه های مختلفی برای ماهیچه فرض شده است که در جدول 1 لیست شده اند. هندسه های ماهیچه به طول ماهیچه (a) و زاویه ماهیچه (γ) بستگی دارند. البته همانطور که خواهیم

دید نحوه پلاستیک شدن تیر تابعی از طول و زاویه ماهیچه است که در یکی از روابط فوق صدق کند. با توجه به جدول 1 و توضیحات فوق پیش بینی می کنیم که در نمونه های 2 و 5 و 8 و 9 و 10 و 11 احتمالاً کل ماهیچه پلاستیک شود زیرا مقدار $Z1/Z2$ خیلی به مقدار $(L-2a)/L$ نزدیک است. همچنین در نمونه های 1 و 4 و 6 مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه (قسمت کوچکتر مقطع) تشکیل شود و همچنین در نمونه های 3 و 7 و 12 مفصل پلاستیک در انتهای مقطع (قسمت بزرگتر مقطع نزدیک ستون) تشکیل شود. حال به منظور بررسی بیشتر مسئله نتایج ABAQUS را در بخش بعد مورد بررسی قرار می دهیم.

No	a	H1	H2	Z1	Z2	γ	$\frac{Z1}{Z2}$	$\frac{L-2a}{L}$	$\frac{Z1}{Z2} - \frac{L-2a}{L}$
1	125	30	50	1643	2943	9.1	0.56	0.64	-0.08
2	160	30	50	1643	2943	7.1	0.56	0.54	0.2
3	200	30	50	1643	2943	5.7	0.56	0.43	0.13
4	125	30	60	1643	3668	13.5	0.45	0.64	-0.19
5	185	30	60	1643	3668	9.2	0.45	0.47	-0.02
6	160	30	60	1643	3668	10.6	0.45	0.54	-0.09
7	240	30	60	1643	3668	7.1	0.45	0.31	0.14
8	200	30	60	1643	3668	8.53	0.45	0.43	0.02
9	210	30	60	1643	3668	8.1	0.45	0.40	0.05
10	180	30	60	1643	3668	9.5	0.45	0.48	-0.03
11	190	30	60	1643	3668	9	0.45	0.46	-0.01
12	220	30	60	1643	3668	7.8	0.45	0.37	0.08
13	180	30	50	1643	2943	6.3	0.56	0.49	0.07

جدول 1 - جزییات هندسی 13 نمونه مورد مطالعه (a و H1 و H2 و Z1 و Z2 برحسب cm و cm^3)
و لا برحسب درجه می باشند.)

3. مدل اجزای محدود

کلیه 13 نمونه ذکر شده در جدول یک در نرم افزار اجزای محدود ABAQUS مدل شده اند و نحوه پلاستیک شدن تیرها برای تعدادی از نمونه ها در شکل های 3 تا 9 نشان داده شده است. همانطور که پیش بینی می شد سه حالت مجزا وجود دارد که در ادامه به آن می پردازیم.

حالت اول یا حالتی که مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل می شود. این حالات در شکل‌های 3 و 6 مشاهده می شود. در این حالت بعد از تشکیل اولین مفصل پلاستیک در نقطه 1 دوران پلاستیک در نقطه 1 متمرکز می شود و پلاستیسیته گسترش نمی یابد.

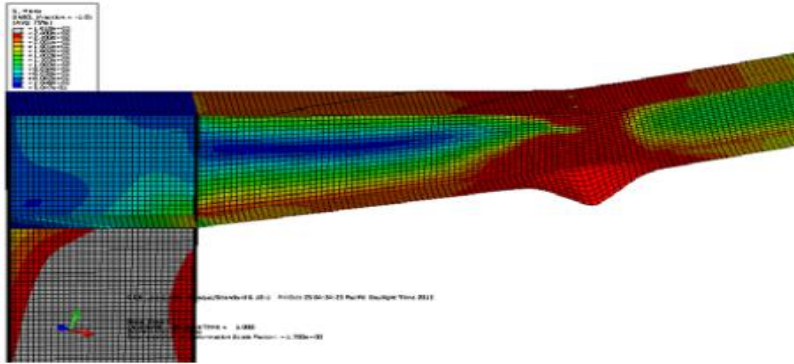
حالت دوم یا حالتی که مفصل پلاستیک در انتهای ماهیچه تشکیل می شود. این حالت در شکل 5 مشاهده می شود. در این حالت بعد از تشکیل اولین مفصل پلاستیک در نقطه 2 دوران پلاستیک در نقطه 2 متمرکز می شود و مفصل جدیدی تشکیل نمی شود اما پلاستیسیته تا حدودی به داخل ماهیچه گسترش می یابد.

حالت سوم یا حالتی که مفصل پلاستیک در طول ماهیچه توزیع می شود. این حالات در شکل‌های 4 و 7 و 8 و 9 مشاهده می شود. در این حالت پلاستیسیته در طول ماهیچه توزیع شده است. البته در این حالت سه رفتار قابل مشاهده است اولین رفتار این است که نقطه 1 بطور کامل پلاستیک شده است و در بقیه مقطع تمام بال قسمتی از جان تسلیم شده اند و عمده دوران پلاستیک نیز در نقطه 1 ایجاد شده است (شکل‌های 4 و 7). در رفتار دوم دونقطه 1 و 2 به طور کامل پلاستیک شده اند و در مقاطع بین این دو کل بال و بخشی از جان پلاستیک شده است و دوران پلاستیک در طول ماهیچه توزیع شده است (شکل 8). و بالاخره در رفتار سوم نقطه 2 به طور کامل پلاستیک شده است و در بقیه مقطع کل بال و بخشی از جان پلاستیک شده اند و عمده دوران پلاستیک در نقطه 2 ایجاد شده است (شکل 9).

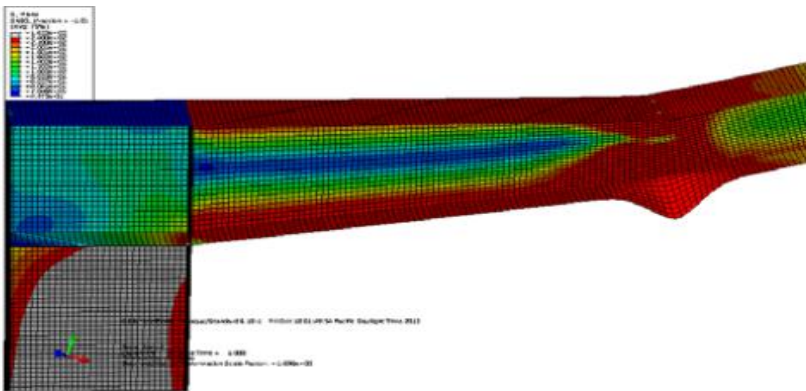
باتوجه به مطالب گفته شده در بند 2 و نتایج جدول 1 و مشاهده شکل‌های 3 تا 9 می توان نتایج زیر را ارائه کرد:

$$\begin{aligned} \text{اگر } \frac{l-2a}{l} - 0.05 < \frac{Z1}{Z2} < \frac{l-2a}{l} + 0.1 & \quad \text{کل ماهیچه پلاستیک می شود. (حالت 3)} \\ \text{اگر } \frac{Z1}{Z2} > \frac{l-2a}{l} + 0.1 & \quad \text{مفصل پلاستیک در انتهای ماهیچه تشکیل می شود (حالت 2)} \\ \text{اگر } \frac{Z1}{Z2} < \frac{l-2a}{l} - 0.05 & \quad \text{مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل می شود (حالت 1)} \end{aligned}$$

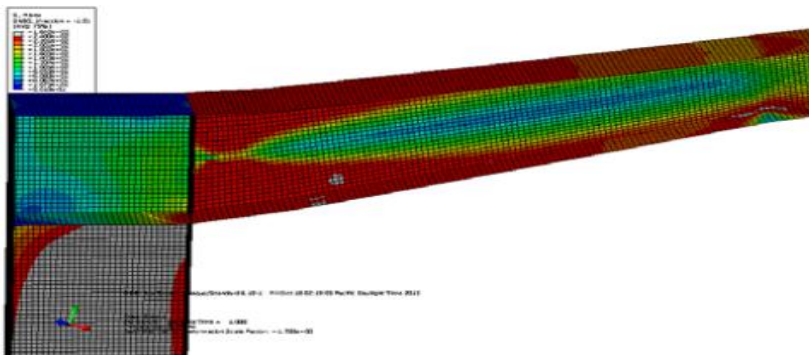
نتایج آنالیز ABAQUS نشان دادند که در نمونه های 1 و 4 و 6 و 10 مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل شده است. و برای نمونه های 2 و 5 و 8 و 9 و 10 و 11 و 12 و 13 پلاستیسیته در طول ماهیچه گسترده شده است. و همچنین برای نمونه های 3 و 7 مفصل پلاستیک در انتهای ماهیچه تشکیل شده است. این نتایج بار و روابط فوق سازگار است. علت عدم تقارن در نامعادلات فوق تاثیر تنش برشی است زیرا میزان تنش برشی در ابتدای ماهیچه بیشتر از انتهای آن است (به علت عمق کمتر جان) و همین موضوع باعث می شود ظرفیت واقعی پلاستیک مقطع در ابتدای ماهیچه بیشتر از انتهای آن کاهش یابد و در نتیجه نمودار 1 در شکل 2 که نمودار ظرفیت پلاستیک مقطع است اندکی در قسمت شیب دار دوران کند و نتایج را نامتقارن کند. رقمهای 0.05 و 0.1 میزان تقریب از حالت یک بعدی ایده آل به حالت واقعی سه بعدی را نشان می دهند.



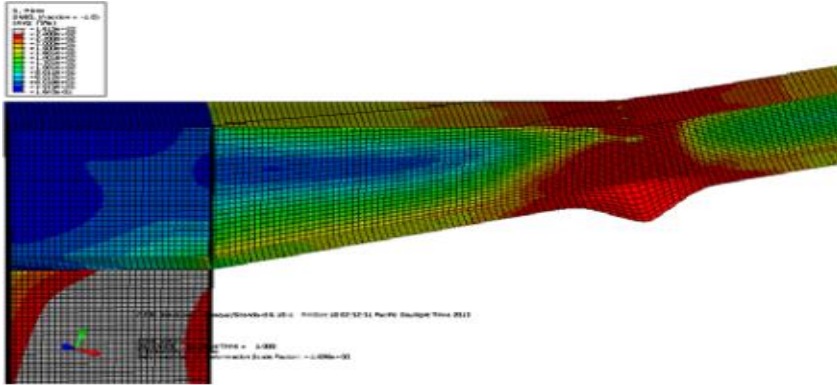
شکل 3- نحوه پلاستیک شدن نمونه اول : مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل شده است.



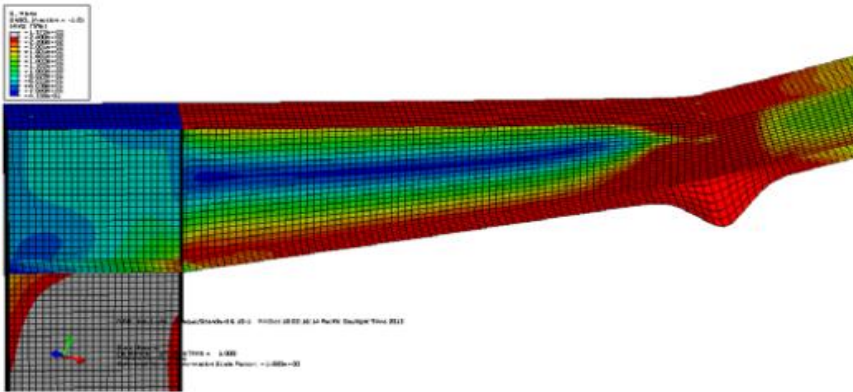
شکل 4- نحوه پلاستیک شدن نمونه دوم: مفصل پلاستیک در طول مقطع توزیع شده است. اما دوران پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل شده است.



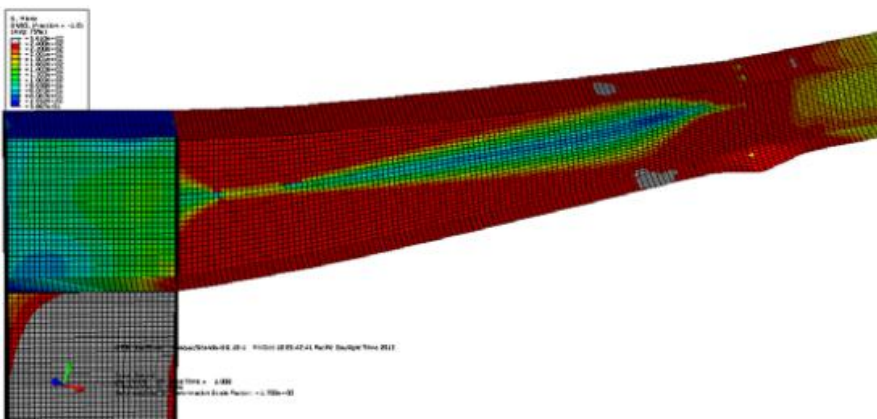
شکل 5- نحوه پلاستیک شدن نمونه سوم: مفصل پلاستیک در انتهای ماهیچه تشکیل شده است و تا حدودی داخل ماهیچه گسترش یافته است.



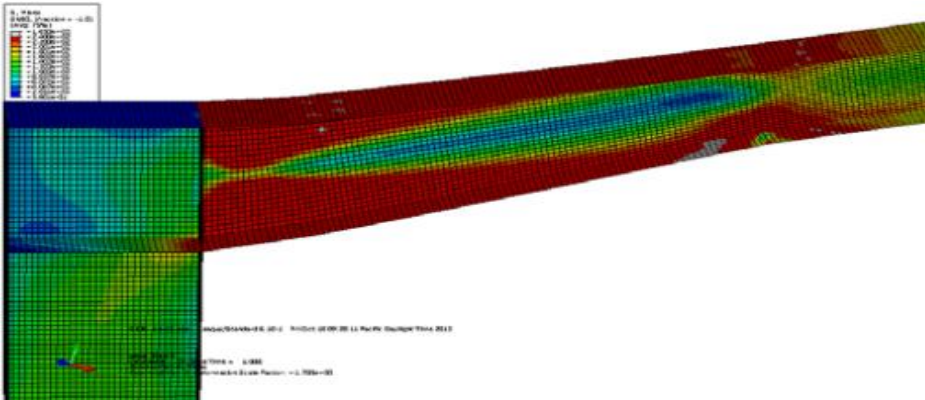
شکل 6- نحوه پلاستیک شدن نمونه چهارم: مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل شده است.



شکل 7- نحوه پلاستیک شدن نمونه پنجم: مفصل پلاستیک در طول مقطع توزیع شده است. و عمده دوران پلاستیک در ابتدای ماهیچه تشکیل شده است.



شکل 8- نحوه پلاستیک شدن نمونه نهم: مفصل پلاستیک در طول مقطع توزیع شده است و دوران پلاستیک در طول ماهیچه توزیع شده است



شکل 9- نحوه پلاستیک شدن نمونه سیزدهم؛ مفصل پلاستیک در طول مقطع توزیع شده است اما عمده دوران پلاستیک در انتهای ماهیچه ایجاد شده است.

4. مدل سازی مفصل پلاستیک

عموما به منظور آنالیزهای غیرخطی استاتیکی و یا دینامیکی در سازه ها از مدل قاب استفاده میکنند. در این مدلها نیاز است تا محل تشکیل مفصل پلاستیک مشخص گردد. در صورتیکه تیرهای قاب منشوری باشند مفصل پلاستیک در دوانتهای تیر تشکیل می شود. اما در صورتیکه تیرها ماهیچه ای باشند همانطور که دیدیم. سه حالت اتفاق می افتد و مفصل پلاستیک در ابتدا یا انتهای ماهیچه تشکیل شده و یا در طول ماهیچه توزیع می شود. واضح است در دو حالت اول مشکلی برای مدل سازی وجود ندارد اما در صورتی که مفصل پلاستیک در طول ماهیچه تشکیل شود بهترین راه حل استفاده از مدل سازی پلاستیسیته گسترده می باشد که الگوریتم هایی برای آن در بعضی از نرم افزارها موجود است (نظیر fiber) و بهتر است از اینگونه مدل سازیها استفاده گردد. در صورتیکه ابزار مدل سازی پیوسته موجود نباشد یک راه حل استفاده از چند مفصل پلاستیک در طول ماهیچه و معادل نمودن آن رفتار واقعی قاب است. اما با این راه حل عملا یک مفصل بیشتر فعال نمی شود و یک مفصل نمی تواند معادل رفتار واقعی قاب در این حالت باشد زیرا در این حالت چون پلاستیسیته در طول ماهیچه توزیع شده است نیاز شکل پذیری محلی کمتری را به ازای انرژی ثابت نسبت به حالت متمرکز طلب میکند و توانایی تغییر شکل های زیاد در حوزه غیرخطی در طول ماهیچه بسیار بیشتر از حالت مفصل پلاستیک متمرکز می باشد. در مجموع دیده می شود که اگر برای حالتی که کل ماهیچه پلاستیک می شود؛ از مدل های پیوسته نظیر fiber استفاده کنیم به جوابهای دقیقتری می رسیم.

5. نتیجه گیری

در این مقاله نحوه تشکیل مفصل پلاستیک در یک قاب دویعدی یک طبقه و یک دهانه که از تیر دارای ماهیچه خطی در دوانتها تشکیل شده به ازای هندسه های مختلف ماهیچه مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از آنالیز سه بعدی اجزای محدود نشان دادند که سه حالت کاملاً مجزا وجود دارد؛ حالتی که مفصل پلاستیک در ابتدای ماهیچه (قسمت کوچکتر مقطع) تشکیل می شود، حالتی که مفصل پلاستیک در انتهای ماهیچه تشکیل می شود و حالتی که کل ماهیچه پلاستیک می شود. روابط تقریبی برای پیش بینی این سه حالت ارائه شد که به شیب و طول ماهیچه بستگی دارند. همچنین برای حالتی که مفصل پلاستیک در طول ماهیچه تشکیل می شود، بهترین راه حل برای مدلسازی، استفاده از مدلسازی پلاستیسته پیوسته (مدل fiber) می باشد.

6. مراجع

- [1] Gupta P, Wang S T, Blandford G E, *Lateral-torsional buckling of non-prismatic I beam*, Journal of Structural Engineering, 122(7),748-55,1996.
- [2] Kitipornchai S, Trahair NS, *Elastic stability of tapered I beams*, Journal of Structural Division, 98(3), 713-28, 1972.
- [3] Lee G C, Szabo B A, *Torsional response of tapered I-girders*, Journal of Structural Division; 93(5), 233-52, 1967.
- [4] Polyzois D, Raftoyiannis I G, *Lateral-torsional stability of steel web-tapered I beams*, Journal of Structural Engineering, 124(10), 1208-16, 1998.
- [5] Dube G P, Dumir P C, *Tapered thin open section beam on elastic foundation-buckling analysis*, Computers & Structures, 61(5), 845-57, 1996.
- [6] Gupta A K, *Frequent-dependent matrices for tapered beam*, Journal of Structural Engineering, 112(1), 85-103, 1986.
- [7] Nekezer J W, *Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections*, Journal of Structural Engineering, 115(12), 2965-78, 1989.
- [8] Ranshi A S, Chitkara N R, Johnson W, *Plane stress-plastic collapse loads for tapered cantilevers and haunched beams*, International Journal of Mechanical Science, 16, 867-85, 1974.
- [9] Hwang J S, Chang K C, Lee G C, *Seismic behavior of gable frame consisting of tapered members*, Journal of Structural Engineering, 177(3), 1991.
- [10] Thomas K H, Jenings A, *Optimal plastic design of frames with tapered members*, Computers & Structures, 30(3), 537-44, 1988.
- [11] Hayalioglu M S, Saka M P, "Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames with tapered members", Computers & Structures 1992; 44(4): 915-24.
- [12] Guo-Qiang Li, Jin-Jun Li, *A tapered Timoshenko-Euler beam element for analysis of steel portal frames*, Journal of Constructional Steel Research, 58, 1531-44, 2002.
- [13] Jin-Jun Li, Guo-Qiang Li, *Reliability-based integrated design of steel portal frames with tapered members*, Structural Safety, 26, 221-39, 2004.
- [14] Susantha K A S, Akoi T, Kumano T, *Strength and ductility evaluation of steel bridge piers with linearly tapered plates*, Journal of Constructional Steel Research, 62, 906-16, 2006.



- [15] Jong-Kook Hong, Chia-Ming Uang, *Cyclic testing of a metal building moment frame system with web-tapered members*, Journal of Constructional Steel Research, 70, 248-55, 2012.