



تحلیل ایزوژئومتریکی پوسته ها بر اساس نظریه کیرشهف-لاو

سعید شجاعی¹، حمید رضا عطری²

1- استادیار دانشگاه شهید باهنر کرمان

saeed.shojaee@mail.uk.ac.ir

2- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه

hamidr.etri@gmail.com

چکیده

در این مقاله تحلیل پوسته ها بر اساس نظریه کیرشهف-لاو و با استفاده از تحلیل هم هندسی انجام گرفته است. از آنجا که توابع پایه نریز دارای کارایی بالایی هستند و قابلیت بیان هندسه دقیق شکل را دارند لذا برای تحلیل مورد استفاده قرار گرفته اند. مزیت مهم دیگر این توابع تأمین پیوستگی لازم بین المان ها می باشد. فرمول بندی ارائه شده در این مقاله از لحاظ هندسی غیرخطی می باشد و تنها درجات آزادی مربوط به جابجایی ها در نظر گرفته شده است. برای لحاظ کردن درجات آزادی دورانی از همان متغیرهای کنترلی که دارای درجات آزادی انتقالی هستند استفاده شده است. برای مدلسازی سازه ها از توابع نریز و برای آنالیز آن، تحلیل هم هندسی بکار گرفته شده است. مثال های مختلف کارایی بالای این روش و قابلیت آن برای تحلیل و طراحی را به خوبی نشان می دهد.

واژه های کلیدی: ایزوژئومتریکی، نریز، کیرشهف-لاو، پوسته.

1. مقدمه

در تئوری کلاسیک پوسته ها، ابتدا باید مرز بین پوسته های ضخیم ($20 < R/t$) و پوسته های نازک ($20 \leq R/t$) را تعیین نمود. تئوری مناسب برای توصیف پوسته های ضخیم، نظریه راینر-میندلین می باشد که تغییر شکل های برشی را در نظر می گیرد. برای پوسته های نازک تئوری کیرشهف-لاو مورد استفاده می باشد که از تغییر شکل های برشی صرفه نظر می کند. معمولاً برای پوسته های خیلی نازک ($1000 < R/t$) تغییر شکل ها نمی تواند به صورت رفتار خطی توصیف گردد لذا توصیف غیر خطی هندسی ضروری می باشد. پوسته های بسیار نازک، مانند ورق های فلزی بسیار نازک نقش مهمی در کاربردهای صنعتی از جمله صنعت اتومبیل سازی و هوافضا ایفا می کنند، با وجود اینکه بسیاری از پوسته ها در علم مهندسی در محدوده پوسته های نازک یا خیلی نازک قرار دارند و راه حل های تحلیلی بسیاری برای این نوع پوسته ها بر اساس نظریه کیرشهف-لاو موجود می باشد ولی تئوری راینر-میندلین به طور گسترده در اجزاء محدود به کار گرفته شده است. اساساً این موضوع بدان خاطر می باشد که برای المان های راینر-میندلین تنها پیوستگی C^0 مورد نیاز است و همین امر منجر به استفاده



آسان از توابع می گردد. با این وجود استفاده از این نوع المان ها با مرتبه پایین منجر به پدیده قفل شدگی می شود و تلاش های بسیاری نیز در گذشته برای کاهش اثرات قفل شدگی انجام گرفته است. برای المان های کیرشهف-لاو پیوستگی C^1 مورد نیاز است که رسیدن به این پیوستگی با استفاده از چند جمله ایهای استاندارد به عنوان توابع پایه نسبتاً دشوار می باشد. نریز (بی-اسپلاین نسبتی غیر یکنواخت) توابعی با مرتبه بالاتر هستند که برای بیان هندسه مورد استفاده قرار گرفته اند و در برنامه های CAD (طراحی به کمک کامپیوتر) به عنوان تابع استاندارد شناخته شده است. این توابع انعطاف پذیری خوبی در هندسه دارند و پیوستگی مراتب بالاتر را نیز فراهم می آورند، از این رو نریز به عنوان توابع پایه در تحلیل پوسته ها مناسب می باشد. ایده استفاده از نریز به عنوان توابع پایه برای تحلیل توسط هیوز مطرح گردید و تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت [1]. در تحلیل ایزوژئومتریک توابع مورد استفاده برای توصیف هندسه به عنوان توابع پایه برای تحلیل به کار گرفته شده اند. بنابراین تحلیل بر روی مدلی با هندسه دقیق و بدن نیاز به هیچ گونه مش زدن انجام می شود. از آنجا که برای تحلیل و طراحی از یک مدل هندسی استفاده می شود لذا این موضوع امکان پر کردن شکاف بین تحلیل و طراحی را فراهم می آورد.

در این مقاله، تحلیل پوسته های کیرشهف-لاو براساس مفاهیم ایزوژئومتریک و با فرمول بندی غیرخطی هندسی را بیان می کنیم، بدین منظور در ابتدا نگاهی اجمالی به نریز و تحلیل ایزوژئومتریک ارائه می شود. سپس فرمول بندی المان پوسته بیان می گردد. مثال های مختلف عملکرد خوب این المان را نشان می دهد.

2. نریز و تحلیل ایزوژئومتریک

نریزها تعمیمی از بی اسپلاین ها می باشند و بسیاری از ویژگی های نریزها در بی اسپلاین ها موجود است. بنابراین در ابتدا به بیان مقدمه ای کوتاه از بی اسپلاین ها می پردازیم.

2-1- بی اسپلاین

بی اسپلاین ها منحنی چند جمله ای قطعه قطعه ای غیردرونیاب هستند که این منحنی توسط مجموعه ای از نقاط کنترلی P_i که $i = 1, \dots, n$ و درجه چندجمله ای p و بردار گرهی $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ تعریف می شود. بردار گرهی مجموعه ای غیرنزولی از مختصات پارامتریک می باشد که منحنی بی اسپلاین را به قسمت های مختلفی تقسیم می نماید. اگر همه گره ها به طور مساوی از یکدیگر قرار گرفته باشند، بردار گرهی یکنواخت نامیده می شود. توابع پایه بی اسپلاین دارای پیوستگی C^∞ در داخل دهاته گرهی و پیوستگی C^{p-1} در روی یک گره می باشد. گره ای که مقدار آن بیش از یک بار تکرار شود گره تکراری نامیده می شود و پیوستگی در گره ای که k بار تکرار شده است C^{p-k} می باشد.

اگر گره ابتدا و انتها در بردار گرهی دارای تکرار $p + 1$ باشد، بردار گرهی باز نامیده می شود. در بی اسپلین ها با بردار گرهی باز، نقاط کنترلی ابتدا و انتها درونیاب هستند و منحنی بر چند ضلعی کنترلی در نقاط ابتدا و انتها مماس می باشد.

2-2- توابع پایه

توابع پایه بی اسپلین توسط فرمول بازگشتی دی بور محاسبه می شود [2,3]. که برای $p = 0$ داریم [2]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

و برای $p \geq 1$:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

بعضی از ویژگی های مهم توابع پایه بی اسپلین را می توان از روابط بالا نتیجه گرفت:

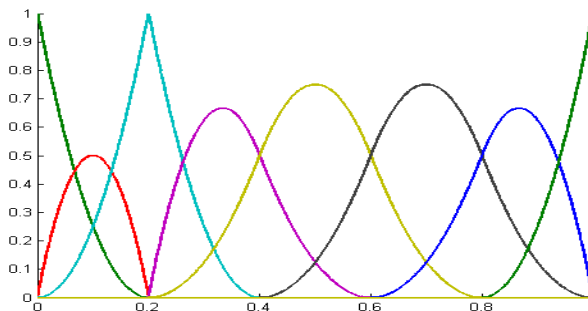
- خاصیت محلی بودن، برای مثال: تابع پایه $N_{i,p}(\xi)$ تنها در بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ غیر صفر است.

- جزئی از واحد بودن، برای مثال: $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$

- غیر منفی بودن، برای مثال: $N_{i,p}(\xi) \geq 0$

- استقلال خطی، برای مثال: $\sum_{i=1}^n \alpha_i N_{i,p}(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$

شکل 1 مثالی از توابع پایه بی اسپلین درجه دوم با بردار گرهی باز را نشان می دهد.



شکل 1: توابع پایه بی اسپلین درجه دوم با بردار گرهی باز $[0, 0, 0, 0.2, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1]$

2-3- منحنی های بی اسپلین

منحنی های بی اسپلین از درجه p توسط ترکیب خطی نقاط کنترلی و توابع پایه مربوطه محاسبه می شوند:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (3)$$

2-4- سطوح بی اسپلین

سطوح بی اسپلین از ضرب تانسوری توابع پایه بی اسپلین در دو راستای پارامتریک ξ و η تشکیل می شود. این سطوح توسط شبکه ای $n \times m$ از نقاط کنترلی، دو بردار گرهی \mathbf{H} و \mathbf{E} به ترتیب با درجات p و q و توابع پایه مربوطه $N_{i,p}(\xi)$ و $M_{j,q}(\eta)$ تعریف می شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{ij} \quad (4)$$

2-5- نریز

نریز، بی اسپلین نسبتی غیریکواخت است که هر نقطه کنترلی دارای وزن w_i مربوط به خود می باشد. هر نقطه $\mathbf{P}_i(x_i, y_i, z_i, w_i)$ می تواند با مختصات همگن خود $\mathbf{P}_i^w(w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$ در فضای \square^4 نمایش داده شود. منحنی نریز انتقال تصویری بی اسپلین از \square^4 با نقاط کنترلی همگن روی \square^3 می باشد [3]:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (5)$$

سطوح نریز به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta) w_{i,j}} \mathbf{P}_{i,j} \quad (6)$$

نریزها قادر به توصیف اشکال هندسی خاصی مانند مقاطع مخروطی (دایره ها، استوانه ها، کره ها و ...) می باشند. بی اسپلین ها حالت خاصی از نریزها هستند که در آن همه وزن ها مساوی واحد است.

2-6- بهبودسازی شبکه

دو روش بهبودسازی شبکه، شبیه اجزاء محدود استاندارد وجود دارد: افزودن گره، افزایش مرتبه

2-6-1- افزودن گره (بهبودسازی-h)

با اضافه کردن گره های جدید می توان دهانه های گرهی را به بازه های کوچکتری تقسیم کرد. این روش همانند بهبودسازی h در تحلیل اجزاء محدود کلاسیک می باشد [4]. افزودن گره باعث تغییر در هندسه نمی شود.

2-6-2- افزایش مرتبه (بهبودسازی-p)

در بهبودسازی-p درجه چندجمله ای توابع پایه را می توان افزایش داد. این افزایش مرتبه، موجب تکرار گره ها می شود به طوری که پیوستگی بین آنها بدون تغییر باقی می ماند. مشابه بهبودسازی-h، روش افزایش مرتبه نیز باعث تغییر در هندسه نمی شود.

3. فرمول بندی روابط

در تئوری کیرشهف-لاو، تغییر شکل های برشی نادیده گرفته می شود و بردار عمود بر میانتار، بعد از تغییر شکل نیز عمود باقی می ماند. بنابراین برای توصیف پوسته تنها می توان به توصیف میانتار آن پرداخت. بردار تغییر شکل پوسته به صورت زیر بیان می شود

$$u(\theta^1, \theta^2) = x(\theta^1, \theta^2) - X(\theta^1, \theta^2) \quad (7)$$

که در آن X بردار موقعیت نقطه ای از جسم در وضعیت تغییر شکل نیافته، x بردار موقعیت نقطه ای از جسم در وضعیت تغییر شکل یافته، θ^1 و θ^2 راستاهای محورهای مختصات در دستگاه منحنی الخط پوسته و u بردار تغییر شکل پوسته است.

در ادامه، قرارداد جمع انیشتنی مورد استفاده قرار گرفته و اندیس ها در حروف یونانی مقادیر { 1 , 2 } و در حروف لاتین مقادیر { 1 , 2 , 3 } را به خود می گیرند. بردارهای پایه کوواریانت عبارتند از:

$$G_\alpha = X_{,\alpha} = \frac{\partial X}{\partial \theta^\alpha}, \quad g_\alpha = x_{,\alpha} = \frac{\partial x}{\partial \theta^\alpha} \quad (8)$$

ضرایب کوواریانت سطح به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_{\alpha\beta} = G_\alpha \cdot G_\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta \quad (9)$$

و بردارهای پایه کانتراواریانت عبارتند از:

$$\{G^{\alpha\beta}\} = \{G_{\alpha\beta}\}^{-1}, \mathbf{G}^\alpha = G^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{G}_\beta \quad (10)$$

ضرایب تانسوری انحنای براساس دومین قانون بنیادی سطوح به صورت زیر تعریف می شوند [5,6]:

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} + \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{g}_{3,\alpha}) = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3 \quad (11)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(G_\alpha \cdot G_{3,\beta} + G_\beta \cdot G_{3,\alpha}) = G_{\alpha,\beta} \cdot G_3 \quad (12)$$

که \mathbf{g}_3 و G_3 بردارهای واحد عمود بر میانتار هستند:

$$\mathbf{G}_3 = \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|} \quad (13)$$

برای اندازه گیری تنش ها و کرنش ها از تانسور کرنشی گرین-لاگرانژ (E) و تانسور تنش کیرشهف (S) استفاده شده است [7]:

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I) = E_{ij} G^i \otimes G^j \quad (14)$$

F گرادیان تغییر شکل می باشد که رابطه بین حالت اولیه و حالت تغییر شکل یافته را بیان می کند و I تانسور واحد می باشد.

برای تحلیل پوسته ها تنها میانتار آن مورد بررسی می گردد و از تنش های عمودی صرفه نظر می شود، فرض دیگری که در تئوری کیرشهف-لاو وجود دارد آن است که بردار عمود بر میانتار بعد از تغییر شکل مستقیم و عمود باقی می ماند. این موضوع باعث می شود تا فرض گردد کرنش ها در امتداد ضخامت به صورت خطی تغییر کنند و کرنش برشی در نظر گرفته نشود. با جدا کردن کرنش ها به یک قسمت ثابت که مربوط به عملکرد درون صفحه ای آن می شود و یک قسمت خطی که مربوط به حالت خمشی آن می شود، ضرایب کرنشی کوواریانت به صورت زیر به دست می آید:

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) + \theta^3 (b_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) \quad (15)$$

که در آن $\varepsilon_{\alpha\beta}$ کرنش درون صفحه ای و $\kappa_{\alpha\beta}$ کرنش خمشی و θ^3 مختصات در راستای ضخامت می باشد. برای توصیف خاصیت ایزوتروپیک و الاستیک خطی مصالح از مدل سنت ونان-کیرشهف استفاده شده است. $\bar{S}^{\alpha\beta}$ و $\bar{E}^{\alpha\beta}$ به ترتیب ضرایب تنش و کرنش در دستگاه محلی، E مدول یانگ، ν ضریب پواسون می باشد.

$$\begin{bmatrix} \bar{S}^{11} \\ \bar{S}^{22} \\ \bar{S}^{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{bmatrix} \quad (16)$$

با جایگذاری معادله (15) در (16) و انتگرالگیری در امتداد ضخامت t ، تانسور تنش n به صورت زیر:

$$\begin{bmatrix} \bar{n}^{11} \\ \bar{n}^{22} \\ \bar{n}^{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

و تانسور ممان خمشی m به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}^{11} \\ \bar{m}^{22} \\ \bar{m}^{12} \end{bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ماتریس های n و m متقارن هستند و علامت بار اشاره به دستگاه محلی دارد. با استفاده از اصل کار مجازی برای نیروهای داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (19)$$

کار مجازی داخلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta W_{int} = -\int_V (S : \delta E) dV = -\int_A (\mathbf{n} : \delta \varepsilon + \mathbf{m} : \delta \kappa) dA \quad (20)$$

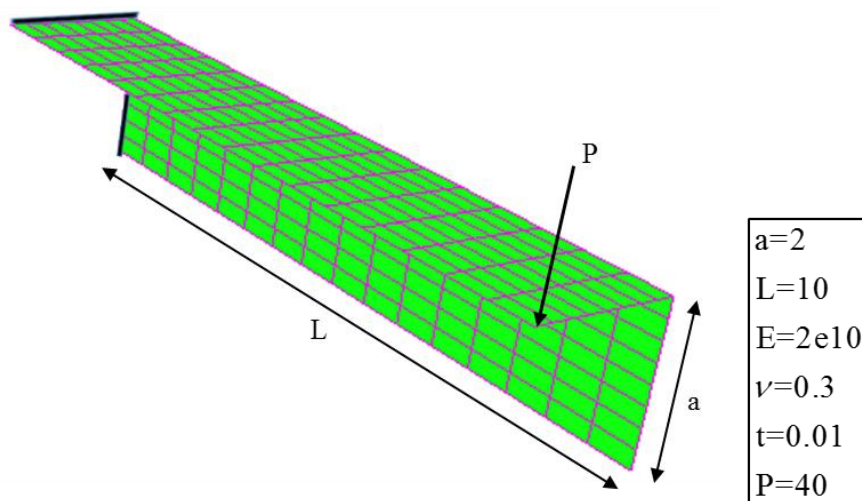
ماتریس سختی داخلی K^{int} با مشتق گرفتن از کار مجازی داخلی نسبت به متغیرهای جابجایی حاصل می شود:

$$K_{rs}^{int} = \int_A \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_s} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_r} + \mathbf{n} : \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_r \partial u_s} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u_s} : \frac{\partial \kappa}{\partial u_r} + \mathbf{m} : \frac{\partial^2 \kappa}{\partial u_r \partial u_s} \right) dA \quad (21)$$

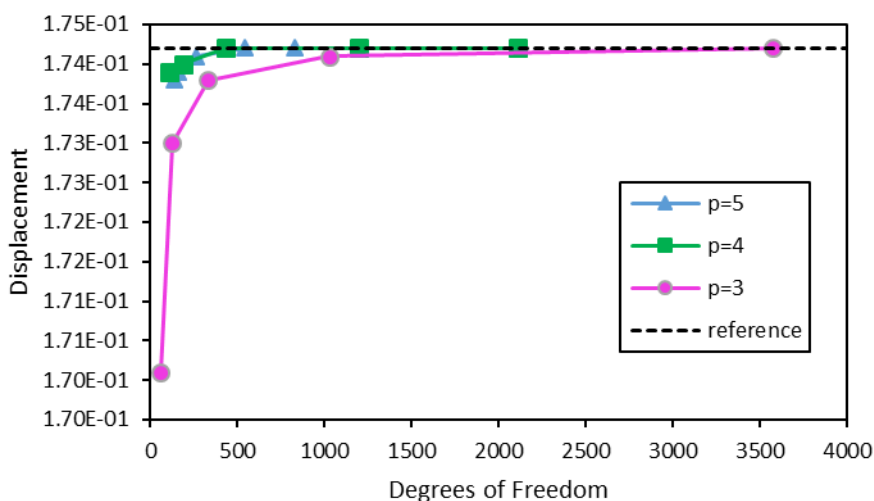
که دو جمله اول بیانگر سختی درون صفحه ای و دو جمله بعدی بیان کننده سختی خمشی است.

4. مثال عددی

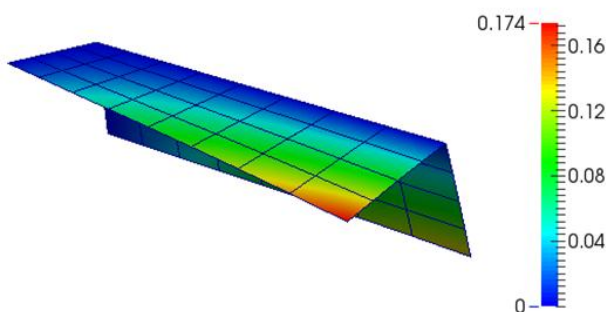
برای بررسی صحت و دقت روابط ارائه شده، تیری ال-شکل [8] با تکیه گاههای گیردار و تحت بار متمرکز $P = 40$ ، شکل (2)، مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار جواب تحلیلی مربوط به جابجایی در نقطه زیر بار $u_{ref} = 1.742$ می باشد، شکل (3) همگرایی جواب را به ازای مرتبه های مختلف نشان می دهد. مقدار همگرایی جواب $u = 1.742$ است. شکل (4) تغییر شکل سازه را نشان می دهد.



شکل 2: تیری با تکیه گاههای گیردار تحت بار متمرکز



شکل 3: همگرایی جواب به ازای مرتبه های مختلف ($p = 3,4,5$)



شکل 4: وضعیت تغییر شکل سازه

5. نتیجه گیری

استفاده از توابع نریز برای تحلیل پوسته های کیرشهف-لاو نشان می دهد که این توابع پیوستگی لازم بین المان ها را به راحتی تأمین می کند. از آنجا که تنها صفحه میانی پوسته مدل سازی شده است لذا انتخاب سه درجه آزادی برای هر نقطه کنترلی کافی می باشد، عملکرد درجات آزادی دورانی نیز توسط متغیرهای کنترلی مربوط به جابجایی ها لحاظ می گردد. براساس مفاهیم ایزوژئومتری یک این روش قابلیت ارائه هندسه دقیق شکل را دارد و می تواند اشکال هندسی خاص مانند: کره، استوانه و... را مدل کند. از این رو در برنامه های CAD (مدلسازی به کمک کامپیوتر) به عنوان توابع پایه شناخته شده اند. از جمله مزایای دیگر این روش که می توان به آن اشاره کرد؛

کاربرد آن در بهینه سازی شکل است که باید در تحقیقات بعدی بررسی شود. استفاده از توابع تی اسپلاین که تعمیمی از توابع نریز می باشد نیز می تواند در مطالعات آینده بیشتر مورد توجه قرار گیرد.

9. مراجع

- [1] Hughes, T.J., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y., Hughes, T., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005; vol. 194, pp. 4135-4195.
- [2] Rogers, D.F., An introduction to NURBS with historical perspective, *Academic Press*, 2001; San Diego, CA.
- [3] L. Piegl, W. Tiller, The NURBS Book, second ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., The finite element method, Its basis and fundamentals, *Elsevier*, 2005; 6th edition. Oxford.
- [5] Naghdi, P.M., On the theory of thin elastic shells, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1957; vol. 14, pp. 369-380.
- [6] Bischoff, M., Wall, W.A., Bletzinger, K.-U. and Ramm, E., Models and finite elements for thin-walled structures, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2004; vol. 2, chapter 3.
- [7] Holzapfel, G.A., Nonlinear solid mechanics, *Wiley*, 2006; Chichester.
- [8] Kiendl, J., Bazilevs, Y., Hsu, M.-C., Wüchner, R. and Bletzinger K.-U., The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010; vol. 199, pp. 2403-2416.