



## تحلیل ارتعاش طولی میله الاستیک تحت بار ضربه‌ای با در نظر گرفتن وابستگی مکان-زمان

احمد تقی‌زاده قورذی<sup>1</sup>، علیرضا احمدی<sup>2</sup>، عماد جمعه‌زاده<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد عمران گرایش سازه، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

a\_taghizadeh65@yahoo.com

2- استادیار گروه مهندسی عمران گرایش سازه، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

a.ahmadi@kgut.ac.ir

3- استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

e.jomehzadeh@kgut.ac.ir

### چکیده

در تحقیقاتی که تاکنون جهت حل معادله حرکت سازه‌های عمرانی تحت بارهای دینامیکی صورت گرفته، بیشتر از روش‌های غیر کوپل استفاده شده است و کمتر به روش‌های کوپل توجه گردیده است. لذا در این مطالعه کارایی استفاده از این روش در مقایسه با روش‌های غیر کوپل مورد بررسی قرار گرفته است. برای پیاده‌سازی روش‌های غیر کوپل و کوپل به ترتیب از نرم‌افزارهای Ansys و SyNA که بر اساس روش اجزای محدود می‌باشند، استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش‌های کوپل از دقت بیشتری در مقایسه با روش‌های غیر کوپل برخوردار می‌باشند. هر چند که در مواردی این روش‌ها دچار واگرایی می‌شوند و این واگرایی وابسته به گام زمانی می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** میله الاستیک، بار ضربه‌ای، ارتعاشات، اجزاء محدود

### 1. مقدمه

روش‌های عددی، به صورت روشی برای تحلیل مهندسی مسائلی که دارای هندسه پیچیده هستند، دارای کاربرد زیادی می‌باشند [1]. در بین بسیاری از روش‌های عددی، تحلیل به کمک اجزاء محدود که تکنیک عددی همه‌کاره و جامعی می‌باشد امروزه در اختیار مهندسين قرار دارد. بارزترین مشخصه اجزاء محدود، جداسازی دامنه داده شده به یک مجموعه به صورت زیر دامنه‌های ساده که المان نامیده می‌شوند، می‌باشد. بر این اساس سازه واقعی با یک مجموعه المان‌های محدود جایگزین شده و این روش حل تقریبی در مقایسه با حل دقیق می‌باشد. اگرچه می‌توان حل را با افزایش تعداد المان‌ها بهبود بخشید. ولی آنالیز دقیق میدان کرنش دینامیکی، به ویژه زمانی که مودهای طبیعی با فرکانس بالا (مانند مود محوری یک میله) تحریک گشته باشند، مستلزم بررسی چگونگی انتشار موج کرنش در محیط است، که بررسی عددی آن مبحث اصلی این تحقیق است. چلادنی در سال



1787، و بیوت در سال 1816، آزمایشاتی را در زمینه ارتعاش طولی میله‌ها انجام دادند. در سال 1824، ناویر، پاسخ یک معادله تحلیلی برای ارتعاش طولی میله‌ها را ارائه نمود [2]. نیومارک در سال 1959 روشی را با این نام برای محاسبات در مسائل دینامیکی معرفی نمود. این روش از دسته انتگرال‌های زمانی می‌باشد که گسستگی در زمان را داراست. [3]. بیان در سال 1976، مطالعات نظری و عددی در مدل‌سازی مسائل با ناپیوستگی در چارچوب روش‌های وردشی برای مسائل دینامیک جامدات را انجام داد [4]. فرنچ در سال 1993 مقاله‌ای را ارائه نموده است که در آن یک روش عددی را معرفی می‌نماید که از اجزاء محدود در زمان و فضا به طور همزمان برای حل معادله موج استفاده می‌کند [5]. کاناپادی و همکارش در سال 2003، بونلی و همکارش در سال 2003، روش گالرکین ناپیوسته را برای مسائل مختلف دینامیکی به روش‌های مختلف پیاده سازی نمودند [6]. [7]. چی‌ین و همکارانش در سال 2003 از روش گالرکین ناپیوسته فضا-زمان برای مسائل سه بعدی استفاده نمودند [8]. پترسون و همکاران در سال 2008 مقاله‌ای با عنوان روش گالرکین ناپیوسته فضا-زمان برای حل معادله موج در حوزه زمان ارائه کردند [9]. آکسوی و همکارش در سال 2008 مقاله‌ای با عنوان روش گالرکین ناپیوسته فضا-زمان برای دینامیک جامدات ارائه نمودند [10].

## 2. مفهوم ارتعاش و معادله دیفرانسیل ارتعاش میله

پدیده ارتعاش شامل یکسری تغییرات متناوب در تبدیل انرژی پتانسیل با انرژی جنبشی و برعکس می‌باشد. از اینرو در هر ارتعاش بایستی عناصری جهت ذخیره انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی وجود داشته باشند. عناصر ذخیره کننده انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل به ترتیب فنر یا عنصر الاستیک و جرم یا عنصر اینرسی نامیده می‌شوند. در هر سیکل حرکت، عناصر الاستیک، انرژی پتانسیل را ذخیره می‌کنند و آن را به صورت انرژی جنبشی در اختیار عناصر اینرسی قرار می‌دهند که بر عکس این پدیده نیز برقرار است [2].

تحلیل مسئله مذکور بر اساس فرضیات زیر انجام شده است:

در حین ارتعاش طولی یک میله منشوری سطح مقطع میله صفحه باقی می‌ماند و ذرات واقع در این سطح مقطع تنها در جهت طولی میله حرکت انجام می‌دهند.

کشش و فشار طولی که در حین ارتعاش میله اتفاق می‌افتد، مطمئناً با مقداری تغییر شکل جانبی همراه است، ولی تنها مواردی در نظر گرفته می‌شوند که طول موج طولی در مقایسه با ابعاد سطح مقطع میله بزرگ است. در اینگونه موارد تغییر شکل جانبی در حین ارتعاش را می‌توان در نظر نگرفت بدون اینکه خطای قابل توجهی ایجاد شود [11].

میله‌ای که در این قسمت بررسی می‌شود نازک و در امتداد طولش به طور یکنواخت فرض می‌شود. به علت نیروهای محوری، تغییر مکان‌های  $u$  در امتداد میله تابعی از مکان  $x$  و زمان  $t$  است. معادله دیفرانسیل ارتعاش چنین میله‌ای به شکل زیر می‌باشد:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

که در آن  $c = \sqrt{E/\rho}$  سرعت انتشار تغییر مکان یا موج تنش در میله می‌باشد.  $E$  و  $\rho$  به ترتیب مدول الاستیسیته و چگالی واحد میله می‌باشد.

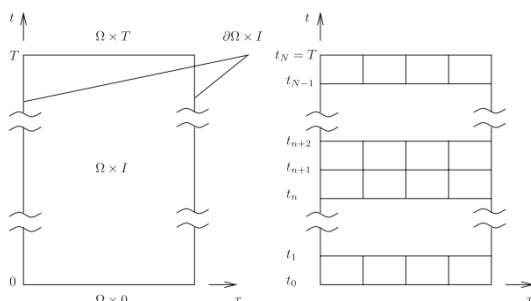
### 3. روش‌های حل معادله دیفرانسیل

حل تعدادی از مسائل، به دلیل دشواری معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله و یا شرایط مرزی دشوار و یا ناممکن در ارضا نمودن معادله سخت می‌باشد. در این گونه موارد، مسئله ارتعاش را با استفاده از پاسخ‌های تقریبی بایستی حل نمود. روش‌های متنوعی برای بدست آوردن حل تقریبی مسئله ارتعاش وجود دارد. روش‌های تقریبی را می‌توان در دو گروه تقسیم‌بندی نمود. گروه اول بر اساس بسط پاسخ به صورت سری محدود از حاصل ضرب توابع شناخته شده در ضرایب مجهول می‌باشد. بسته به روش مخصوص انتخابی، توابع شناخته شده می‌توانند به صورت توابع مقایسه‌ای، توابع قابل قبول، و یا توابعی که تنها معادله دیفرانسیل را ارضا می‌کنند نه شرایط مرزی را تقسیم کرد. اگر سری شامل  $n$  تابع باشد، مسئله مقدار ویژه متناظر،  $n$  مقدار ویژه و تابع ویژه متناظر را به دست خواهد داد [2]. گروه دوم روش‌هایی می‌باشند که بر اساس متمرکز کردن خواص سیستم می‌باشند. به عنوان مثال، جرم سیستم را می‌توان به صورت متمرکز در نقاط مشخصی که تحت عنوان ایستگاه شناخته می‌شوند، فرض نمود و فاصله بین ایستگاه‌های مختلف را میدان می‌نامند. این میدان‌ها بدون جرم و با سختی توزیع شده یکنواخت فرض می‌گردند. این مدل حل، با  $n$  ایستگاه، برای بدست آوردن مسئله مقدار ویژه جبری با اندازه  $n$  می‌تواند استفاده شود. حل این مسئله منجر به  $n$  مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر می‌شود [2].

گروه اول این روش‌ها در ذات خود به صورت تحلیلی می‌باشند و گروه دوم بیشتر به صورت حسی می‌باشند. تمام این روش‌های تقریبی در نهایت منجر به تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی می‌شوند. در اصل یک مسئله مقدار ویژه دیفرانسیلی به یک مسئله مقدار ویژه جبری تبدیل می‌شود. دو گروه از روش‌ها وجود دارند که بر اساس بسط سری می‌باشند: روش‌های ریلی-ریتز، و روش‌های مانده‌های وزن‌دار [2]. بیشتر روش‌های اجزاء محدود برای مسائل وابسته به زمان مبتنی بر نیمه گسسته‌سازی مسئله می‌باشند. اجزاء محدود را برای مختصات فضا به کار می‌برند تا سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان حاصل شود و از روش‌های تحولی برای گسسته‌سازی معادلات جدید در راستای مختصات زمان استفاده می‌کنند. در اصطلاح به این روش‌ها روش‌های غیر کوپل می‌گویند. در مقابل، روش‌های اجزاء محدود فضا-زمان که در آن گسسته‌سازی در فضا و زمان همزمان صورت می‌گیرد وجود دارد که تحت عنوان روش‌های کوپل شناخته می‌شوند.

### 3.1. حل با استفاده از روابط حداقل مربعات کوپل فضا-زمان برای معادله موج یک بعدی

جسم الاستیکی را در نظر بگیرید که این جسم توسط ناحیه  $\Omega \subset R^d$  محدود شده است.  $d$  ابعاد فضا می باشد. مرز  $\Omega$  توسط  $\Gamma$  مشخص می شود. فرض کنید  $\Gamma_g$  و  $\Gamma_h$  نواحی غیرهمپوشان را مشخص می کنند، بطوریکه  $\Gamma = \overline{\Gamma_g} \cup \overline{\Gamma_h}$ . بردار جابه جایی توسط  $u(x,t)$  مشخص می شود، که در آن  $x \in \overline{\Omega}$  و  $t \in [0, T]$ . در این روش ابتدا دامنه زمانی را تقسیم بندی می کنیم. اصطلاحاً به هر یک از این بخش ها اسلب گفته می شود (شکل 1).



شکل (1): ساختار تقسیم بندی دامنه در فضا و زمان

دامنه زمانی را به شکل  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  تقسیم بندی می کنیم. سپس هر اسلب را در راستای مختصات مکانی تقسیم بندی می کنیم.

با فرض پاسخ کوپل به شکل زیر، مشتقات این پاسخ فرضی نیز به صورت مقابل حاصل می شود:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(x,t)\phi_i = [N]\{\phi\} = N \cdot \phi \quad (2)$$

$$u'' = N'' \cdot \phi, \quad \ddot{u} = \dot{N} \dot{\phi}$$

با جایگزینی مشتقات پاسخ فرضی در معادله اصلی، به دلیل تقریبی بودن پاسخ، مقداری خطا در ارضای معادله وجود دارد. این خطا برابر خواهد بود با:

$$R = EN''\phi - \rho \dot{N}\dot{\phi} \quad (3)$$

روش حداقل مربعات با تابع خطا کار می کند. در این روش از مربع خطا در دامنه معادله انتگرال گیری می شود و بایستی این انتگرال حداقل شود. برای این کار تغییرات انتگرال را برابر صفر قرار می دهیم.

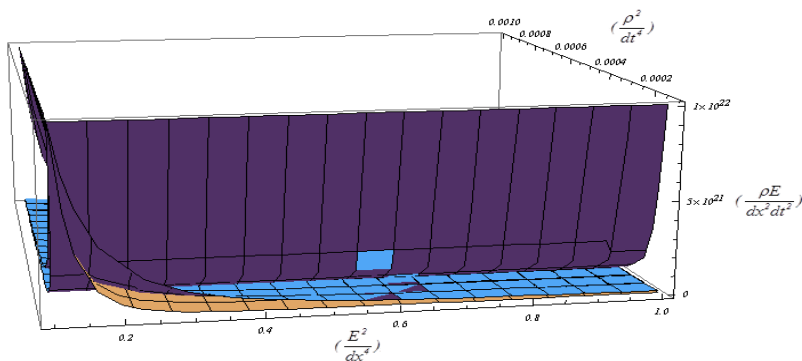
تغییرات خطا به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\delta_{\phi} R = EN'' - \rho \ddot{N} \quad (4)$$

با جایگذاری این تغییرات در رابطه مربوط به حداقل سازی خطا داریم:

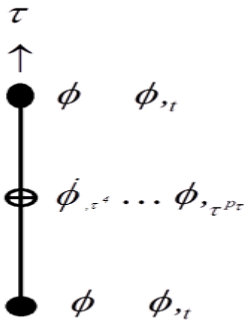
$$\int (E^2 N''^T N'' - \rho E (\ddot{N}^T N'' + N''^T \ddot{N}) + \rho^2 \ddot{N}^T \ddot{N}) A dx dt = 0 \quad (5)$$

در این قسمت بایستی در نظر داشت که چون مش بندی در مکان و زمان صورت می گیرد، از نظر ابعادی باید این مش بندی هم وزن باشد تا در رابطه فوق از تشکیل ماتریس های نامتوازن جلوگیری شود. این بررسی ابعادی به گونه ای صورت گرفته که سه قسمت از معادله فوق، دارای تغییرات نسبتاً یکسانی با تغییرات در مش زمان و فضا باشند. نتیجه حاصل شده بدین صورت بود که بهترین حالت مش بندی زمانی صورت می گیرد که نسبت اندازه مش در فضا به زمان برابر مقدار ثابت سرعت موج باشد (شکل 2).

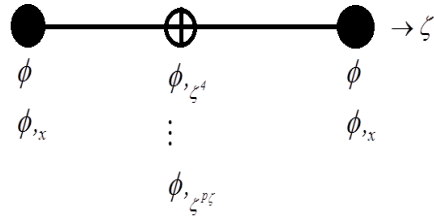


شکل (2): بررسی ابعادی مش بندی هم وزن

حال برای حل معادله (5) بایستی از المان های فضا-زمان استفاده کنیم. برای این کار از برنامه SyNA استفاده شده است. تعریف المان های فضا-زمان مورد استفاده با پیوستگی  $C_1$  در دو جهت  $x$  و  $t$  در شکل 3 و 4 نشان داده شده است.

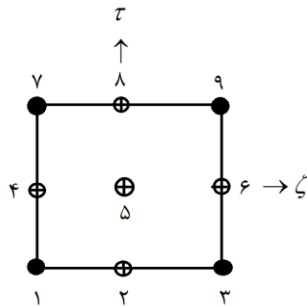


شکل (4): شکل المان  $C_1$  در جهت  $\tau$



شکل (3): شکل المان  $C_1$  در جهت  $\zeta$

حال چنانچه عملگرهای المان  $C_1$  در جهت  $\tau$  را برای المان  $C_1$  در جهت  $\zeta$  به صورت ضرب تانسوری فعال سازیم، المان دو بعدی فضا-زمان به صورت شکل 5 نشان داده می شود.



شکل (5): شکل المان دو بعدی فضا-مکان

درجات آزادی در این المان به صورت زیر تعریف می شوند:

درجات آزادی در هر یک از گره های 1، 2، 3 و 4:  
درجات آزادی در هر یک از گره های 2 و 8:

$$\{\phi_{\tau, \zeta^4}, \phi_{\tau, \zeta^4}, \phi_{\tau, \zeta^5}, \phi_{\tau, \zeta^5}, \dots, \phi_{\tau, \zeta^p_{\tau}}\}$$

که  $p_{\tau}$  مرتبه چندجمله ای درون یاب در جهت  $\zeta$  می باشد.

درجات آزادی در هر یک از گره های 4 و 6:

$$\{\phi_{\tau, \zeta^4}, \phi_{\tau, \zeta^4}, \phi_{\tau, \zeta^5}, \phi_{\tau, \zeta^5}, \dots, \phi_{\tau, \zeta^p_{\tau}}\}$$

که  $p_{\tau}$  مرتبه چندجمله ای درون یاب در جهت  $\tau$  می باشد.

$$\begin{bmatrix} \phi_{\zeta^4 \tau^4} & \phi_{\zeta^5 \tau^4} & \dots & \phi_{\zeta^{p\zeta} \tau^4} \\ \phi_{\zeta^4 \tau^5} & \phi_{\zeta^5 \tau^5} & \dots & \phi_{\zeta^{p\zeta} \tau^5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{\zeta^4 \tau^{p\tau}} & \phi_{\zeta^5 \tau^{p\tau}} & \dots & \phi_{\zeta^{p\zeta} \tau^{p\tau}} \end{bmatrix}$$

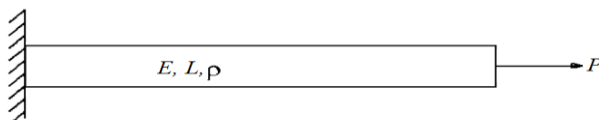
درجات آزادی در گره 5:

تعریف المان‌های  $C_2$  و  $C_3$  مشابه با  $C_1$  می‌باشد، با این تفاوت که در گره‌های ابتدا و انتهای المان مشتقات مرتبه 2 و 3 نیز وارد می‌شوند و برای گره میانی حداقل مرتبه مشتق بایستی از رابطه  $P \geq 2C + 1$  پیروی کند که در این رابطه  $C$  مرتبه پیوستگی المان می‌باشد.

#### 4. مثال عددی

میله منشوری یک سر گیردار را در نظر بگیرید که در انتهای آزاد تحت نیروی ناگهانی  $P$  قرار می‌گیرد (شکل 6). مشخصات این میله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = 1 \times 10^9, \quad \rho = 1000 \text{ Kg/m}^3, \quad L = 1 \text{ m}, \quad P = 1 \times 10^9 \text{ N}$$



شکل (6): میله تحت بار ناگهانی  $P$

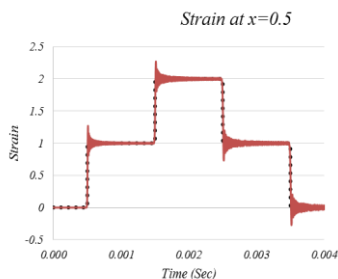
حال چنانچه به عنوان یک مسئله خاص، ارتعاش ایجاد شده در میله برای شرایط اولیه صفر تحت نیروی ثابت ناگهانی  $P$  را در لحظه  $t=0$  در نظر بگیریم، جابه‌جایی در هر نقطه از طول را می‌توان توسط یک سری به صورت زیر بیان نمود [11]:

$$u = \frac{8lP}{a^2 \pi^2 \rho A} \sum_{i=odd} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left(1 - \cos \frac{i\pi at}{2l}\right) \quad (10)$$

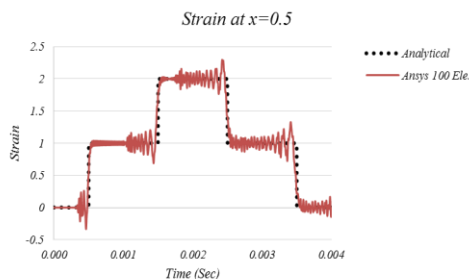
که در آن  $a^2 = E/\rho$  می‌باشد.

این مسئله با روش‌های تحلیلی، نرم‌افزار Ansys و برنامه اجزاء محدود SyNA حل شده است. در حل توسط برنامه اجزاء محدود SyNA از المانهای  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  با چند جمله‌ای‌های با مرتبه مختلف استفاده شده است و در انتها نتایج کرنش را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد.

در شکل های 7 و 8 پاسخ کرنش بدست آمده از Ansys را با حل تحلیلی مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می شود، با افزایش تعداد المان ها، پاسخ دچار نوسانات بیشتری می شود. علت افزایش نوسانات را می توان در نوع المان های مصرفی در روش حل غیر کوپل که از نوع کلاسیک می باشند، دانست.

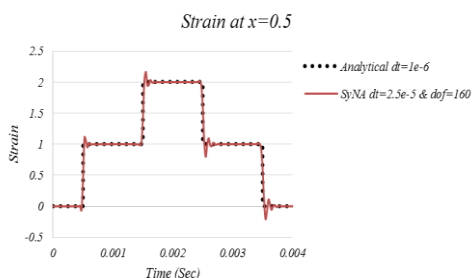


شکل (8): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی (10000 جمله) و Ansys (1000 المان) به ازای گام زمانی  $10^{-6}$  در  $x=0.5$

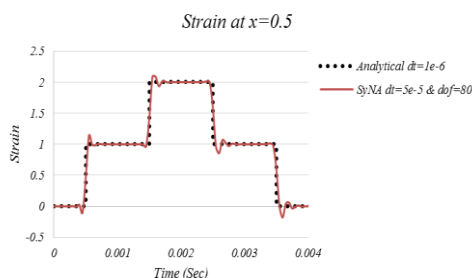


شکل (7): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی (10000 جمله) و Ansys (100 المان) به ازای گام زمانی  $10^{-6}$  در  $x=0.5$

حال در این قسمت پاسخ کرنش بدست آمده از SyNA را با حل تحلیلی در  $x=0$  به ازای 20 و 40 المان برای چند جمله ای از مراتب 3 و 7 مقایسه می کنیم. همانطور که در شکل های 9 تا 12 دیده می شود، افزایش تعداد المان تنها سبب متمرکز شدن نوسانات می شود و در شدت آن ها تاثیری ندارد. اما با بالا بردن مرتبه چند جمله ای هم شدت و هم تعداد نوسانات کمتر می شود.

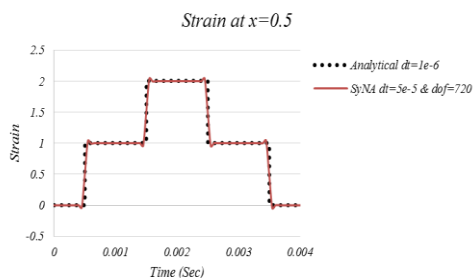
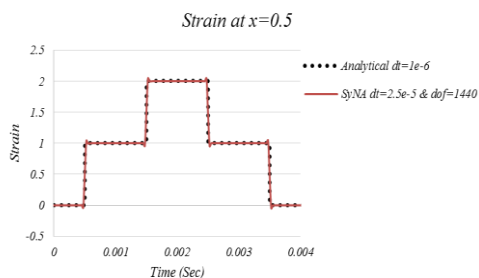


شکل (10): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی (10000 جمله) و SyNA در  $x=0.5$  با 160 درجه آزادی مجهول ( $p=3$ )



شکل (9): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی (10000 جمله) و SyNA در  $x=0.5$  با 80 درجه آزادی مجهول ( $p=3$ )

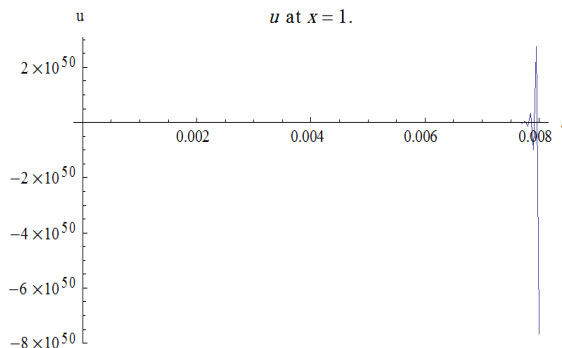




شکل (12): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی (10000 جمله) و SyNA در  $x=0$  با 1440 درجه آزادی مجهول ( $p=7$ )

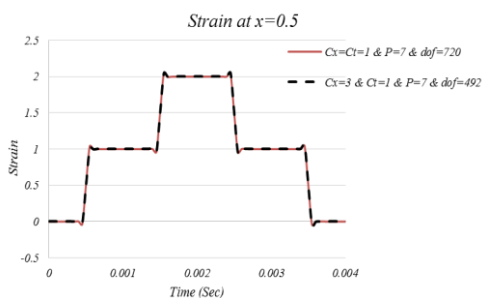
شکل (11): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی (10000 جمله) و SyNA در  $x=0$  با 720 درجه آزادی مجهول ( $p=7$ )

در این مطالعه از المانهای  $C_2$  برای حل مسئله نیز استفاده کرده ایم. استفاده از این المانها منجر به نتایج غیر قابل قبولی شده است و برای چندجمله‌ای‌های با درجه 15 به بالا مسئله قابل حل نبوده است. برای نمونه پاسخ جابه‌جایی بدست آمده از این المانها برای گره انتهایی آزاد با استفاده از چندجمله‌ای با درجه 5 در شکل 13 نشان داده شده است.

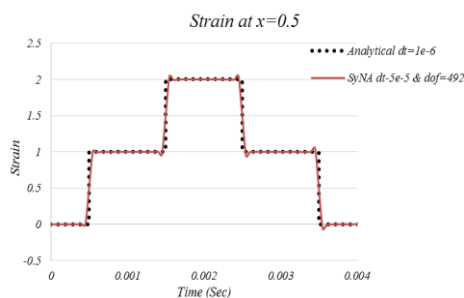


شکل (13): پاسخ جابه‌جایی انتهایی آزاد میله با استفاده از SyNA (20 المان  $C_2$  و  $p=5$ )

کار دیگری که در این تحقیق صورت گرفته است، استفاده از المانهای  $C_1$  در بعد زمان و المانهای  $C_3$  در بعد مکان می‌باشد. نتیجه استفاده از این المانها در نمودارهای زیر نمایش داده شده است. با مشاهده شکل‌های 14 و 15 می‌توان دید که بر اساس المان‌بندی جدید، با انتخاب چندجمله‌ای با درجه 7 جواب بسیار خوبی بدست آوردیم. البته برای این نوع المان‌بندی هم با افزایش درجه چندجمله‌ای انتخابی پاسخ‌ها بهبود می‌یابد.



شکل (15): مقایسه پاسخ کرنش از SyNA در  $x=0.5$  (20 المان  $C_1$  در بعد زمان و المان  $C_3$  در بعد مکان  $p=7$ ) (20 المان  $C_1$  در بعد زمان و مکان  $p=7$ )



شکل (14): مقایسه پاسخ کرنش از حل تحلیلی و SyNA در  $x=0.5$  (20 المان  $C_1$  در بعد زمان و المان  $C_3$  در بعد مکان  $p=7$ )

## 5. خلاصه و نتیجه گیری

استفاده از المان‌های  $C_1$  پیشنهادی در روش کوپل نتایج بهتری در مقایسه با Ansys که از روش غیر کوپل در حل مسائل بهره می‌گیرد، ارائه می‌کند. با افزایش مرتبه چند جمله‌ای می‌توان دقت پاسخ‌ها را بالا برد. در نتایج دیدیم که افزایش تعداد المان‌ها تنها باعث متمرکز شدن نوسانات شده و شدت آنها را کاهش نمی‌دهد، اما با بالا بردن مرتبه چند جمله‌ای شدت و تعداد نوسانات کاهش می‌یابد. به عبارتی افزایش تعداد المان در حل پیشنهادی تاثیر کمتری در مقایسه با بالا بردن مرتبه چند جمله‌ای دارد. در واقع با استفاده از این نوع المان تلاش محاسباتی به دلیل استفاده از مش‌های بزرگ کاهش می‌یابد. اما در حل غیر کوپل با Ansys، افزایش المان سبب کاهش اندازه نوسانات می‌شود، ولی تعداد این نوسانات افزایش می‌یابد. در نتیجه برای رسیدن به پاسخ‌های پایدار بایستی تعداد المان‌ها را بسیار افزایش دهیم. بالا بردن پیوستگی المان‌ها در بعد زمان مناسب نمی‌باشد. همانطور که دیدیم با این کار نتایج نامناسبی بدست آوردیم. افزایش پیوستگی المان‌ها در بعد فضا و ثابت نگه‌داشتن این پیوستگی در زمان سبب می‌شود که با چند جمله‌ای‌های با مرتبه پایین بسیار سریع نتایج خوبی را بدست آوریم.

## 6. مراجع

- [1] Jahed Motlagh H, Nouban M, and Ashraghi M. *Finite Element ANSYS*, University of Tehran Publication, Iran, 2003.
- [2] Rao S S. *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, 2007.
- [3] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics, in Proc. ASCE, **85**, 67-94.
- [4] Pian T H. Variational principles for incremental finite element methods, *Journal of the Franklin Institute*, **302**, 473-488, 1976.

- [5] French D A. A space-time finite element method for the wave equation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **107**, 145-157, 1993.
- [6] Kanapady R, Tamma K K. On a novel design of a new unified variational framework of discontinuous/continuous time operators of high order and equivalence, *Finite elements in analysis and design*, **39**, 727-749, 2003.
- [7] Bonelli A, Bursi O. Iterative solutions for implicit time discontinuous galerkin methods applied to non-linear elastodynamics, *Computational mechanics*, **30**, 487-498, 2003.
- [8] Chien C, Yang C, and Tang J. Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous Galerkin finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, **39**, 561-580, 2003.
- [9] Petersen S, Farhat C, and Tezaur R. A space–time discontinuous Galerkin method for the solution of the wave equation in the time domain, *International journal for numerical methods in engineering*, **78**, 275-295, 2009.
- [10] Aksoy H, Şenocak E. Space–time discontinuous Galerkin method for dynamics of solids, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **24**, 1887-1907, 2008.
- [11] Timoshenko S. *Vibration problems in engineering*, Van Nostrand, USA, 1974.