ارائه رویکردی نو جهت ارزیابی اقتصادی پروژه هاتوسط نرخ های بازگشت موهومی

محمد علی کرامتی[۱،*]، عباس شیخان[۲]، حسین جعفری[۳]
مشخصات نویسنده اول
۱- استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی اراک، Email:mohammadalikeramati@yahoo.com

۲- مربی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی اراک، Email:ab_sheykhan @yahoo.com

۳ و *- نویسنده مسوول: دانشجوی کارشناسی ارشد،دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی اراک،
Email:Hossein_jafari_۱۲۳@yahoo.com

چکیده
اقتصاد مهندسی مجموعه ای از تکنیک های ریاضی جهت ارزیابی اقتصادی طرح ها و پروژه های سرمایه گذاری است که روش ارزش فعلی و روش نرخ بازده داخلی از جمله مهمترین این روش ها می باشند. هرچند روش ارزش فعلی نتایج قابل اعتماد و اطمینانی را ارائه می دهد اما مدیران و سرمایه گذاران به دلایل متعددی به استفاده از روش نرخ بازده داخلی تمایل بیشتری نشان داده اند.این در حالی است که استفاده روش نرخ بازده داخلی مشکلات جدی را به همراه دارد. طی سال های اخیر مقالات مختلفی در در این زمینه چاپ گردیده که تا حد بسیار زیادی مشکلات مرتبط با روش نرخ بازگشت داخلی را مرتفع می سازد. اما در بسیاری از پروژه ها ظهور یک یا چند نرخ بازگشت داخلی دور از انتظار نیست. هدف این مقاله ارائه رویکردی نو جهت ارزیابی پروژه ها به کمک نرخ های بازگشت داخلی موهومی(مختلط) در حالت کلی می باشد.

واژگان کلیدی: بودجه بندی سرمایه، مقدار ارزش فعلی، نرخ بازگشت داخلی ،اعداد موهومی(مختلط).

Providing a new approach to economic evaluation of the project return rates Hatvst complex

Abstract
Engineering economy set of mathematical techniques to evaluate business plans and investment projects that present value and internal rate of return of these methods are the most important. In recent years, several articles have been published in this area that largely resolves the problems associated with the internal rate of return. But in many projects the emergence of one or more internal rate of return is expected. This paper proposes a new approach to the evaluation of projects using internal return rates imaginary (complex) is in general.

Keywords : Capital Budgeting ,NPV,IRR, Complex

۱. مقدمه

روش نرخ بازگشت داخلی سرمایه(IRR) روشی معمول برای ارزیابی جریان های نقدی(اعم از قطعی، احتمالی و فازی) می باشد ، درواقع مدیران مایلند با در دست داشتن نرخ بازگشت داخلی سرمایه و مقایسه آن با نرخی مبنا مانند حداقل نرخ جذب کننده یا نرخ بازار پتانسیل و بازدهی اقتصادی طرح ها و پروژه ها را مورد سنجش قرار دهند ، چرا که این فرایند به سادگی قابل درک می باشد.این درحالیست که روش نرخ بازده دارای نقطه ضعف های جدی و قابل تاملی می باشد کهً در ادامه به مهمترین آنها اشاره شده است:

۱- عدم وجود نرخ بازگشت حقیقی در برخی موارد.

۲- امکان به وجود آمدن نرخ های بازگشت حقیقی منفی در برخی موارد.

۳- ظهور نرخ های بازگشت مختلط(موهومی) در اکثر موارد.

۴- رتبه بندی متناقض توسط دو روش نرخ بازده و روش ارزش فعلی در اکثر موارد.

۵- ایجاد سردرگمی برای تصمیم گیری نهایی جهت انتخاب طرح های برتر .

۶- بالا بودن حجم محاسبات جهت محاسبه مقدار نرخ ها و ... .

۲. پیشینه تحقیق

ازجمله راهکار های آزموده شده جهت حل مشکلات مذکور می توان به مقاله(Norstrøm,۱۹۷۱) اشاره کرد که به بررسی نرخ بازگشت سرمایه در بازه $(\cdot,+\infty)$ پرداخته است . اسکونژاد استفاده از سرمایه گذاری خارجی، جهت رسیدن به یک شرایط تک نرخی تحت یک نرخ سرمایه گذاری خارجی را توصیه نموده است(اسکونژاد،۱۳۹۱). مقالات (Brounen, De Jong &Koedijk,۲۰۰۴)و(Kierulff,۲۰۰۸)، با تکیه و تاکید بر ویژگی های روش نرخ بازگشت داخلی اصلاح شده(MIRR) نسبت به روش هایی همچون نرخ بازگشت داخلی(IRR) و روش ارزش فعلی(NPV)، پرداخته و استفاده از این روش را ترجیح داده اند. مصلحی و خاکباز، نتنها چند نرخی شدن پروژه ها را حالتی ابهام آمیز ندانسته، بلکه این حالت را حالتی جذاب برای ارزیابی پروژه ها میدانند و با ارائه روشی دو بخشی برای ارزیابی پروژه های چند نرخی در شرایط حقیقی بودن نرخ ها، پرداخته اند. آن ها با ارائه رویکردی که بر اساس هر یک از نرخ های چندگانه به تشکیل یک جریان وابسته پرداخته و در پایان بر اساس نرخ ها و جریان های متناظر به نتایجی سازگار با روش ارزش فعلی دست یافته اند (مصلحی و خاکباز،۱۳۸۳). کرامتی، شیخان و جعفری به ارائه روشی ساده جهت بررسی نرخ بازگشت داخلی بر اساس رویکرد مصلحی و پاکباز پرداخته اند (کرامتی،شیخان و جعفری، ۱۳۹۴). از اینرو در ادامه ابتدا به طور خلاصه روش نرخ بازگشت داخلی سرمایه و رویکرد(مصلحی و پاکباز) ارائه می گردد و سپس به اثبات این رویکرد در شرایط غیر حقیقی(موهومی)خواهیم پرداخت، تا هدف اصلی این مقاله(ارائه رویکردی نو جهت ارزیابی پروژه ها به کمک نرخ های بازگشت داخلی موهومی) محقق گردد

۳.روش نرخ بازگشت داخلی

روش نرخ بازگشت داخلی (IRR) پرکاربردترین روش برای اجرای آنالیز اقتصاد مهندسی است.گاهی اوقات این روش را با نام های دیگری از قبیل روش سرمایه گذار ، روش جریان نقدی تنزیل یافته ، شاخص سود آوری به کار می برند. این روش نرخ بهره ای که ارزش معادل یک جریان نقدی ورودی(رسید و یا پس انداز) را، با ارزش معادل جریان نقدی خروجی(هزینه های سرمایه گذاری) برابر می کند ، بدست می آورد.در این روش ضابطه قبول یا رد پروژه ، براساس معیار نرخ بازگشت داخلی(IRR) می باشد . در حقیقت نرخ بازگشت داخلی تعادل درآمدها(درآمد های سالیانه،ارزش اسقاطی و...) و هزینه ها می باشد (کرامتی،شیخان و جعفری، ۱۳۹۴).

یک جریان نقدی ، توالی محدود ویا نامحدودی از مقادیر پولی به صورت $X = (x_0, x_1, \dots)$ می باشد. مقدار پولی دریافت شده در اول دوره برابر x_0 و مقدار دریافتی پس از t دوره ، x_t می باشد. برای یک جریان نقدی محدود $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ و افق زمانی n را درنظر می گیریم (واضح است که $x_n \neq 0$) . مقدار ارزش فعلی جریان نقدی X در زمانی که نرخ بهره برابر با r می باشد (نرخ بهره مناسب باید به صورت $r > -1$ باشد) ، به صورت زیر بدست می آید:

$$PV(X|r) = \sum_{t=0}^{n} \frac{x_t}{(1+r)^t} \qquad (1)$$

برای جریان نقدی A ، $IRR(X)$ را مجموعه نرخ های بهره ای درنظر می گیریم که به ازای آنها $PV(X|r) = 0$ می باشد . برای جریان نقدی محدود$X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ تابع ارزش فعلی (PV(X|r)) یک چند جمله ای از درجه n می باشد ، بنابراین $IRR(X)$ می تواند از صفر تا n مقدار مختلف داشته باشد. در صورتی که $k \in IRR(X)$ باشد ، k را یک نرخ بازگشت داخلی برای X می نامیم.

در صورتی که تنها یک نرخ بازگشت داخلی داشته باشیم و آن نرخ بزرگتر از نرخ بهره بازار (r) باشد، $PV(X|r) > 0$ است و سرمایه گذاری به صورت جریان نقدی X ، مطلوب می باشد .از طرف دیگر در صورتی که این نرخ بازگشت کوچکتر از نرخ بهره بازار (r) باشد ، بهتر است که سرمایه گذاری با نرخ بازار صورت پذیرد.

۴.رویکرد مصلحی و پاکباز

طبق این رویکرد مهم نیست که کدامیک از نرخ ها جهت ارزیابی مورد استفاده قرار گیرد ، بلکه با تشکیل یک جریان نقدی کمکی بر اساس هریک از نرخ ها اقتصادی یا غیر ااقتصادی بودن پروژه ها قابل تشخیص می باشد.به بیان ریاضی اگر X یک جریان نقدی و k یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی برای X باشد و C جریان کمکی وابسته به k باشد که طبق روابط (۳)محاسبه می گردد ، آنگاه به کمک قضایای ۱ تا ۴ می توان مطلوبیت پروژه ها را سنجید.(مصلحی و پاکباز،۱۳۸۳)

$$\begin{cases} C_0 = -A_0 \\ C_1 = -[(1+k)A_0 + A_1] \\ C_2 = -[(1+k)^2 A_0 + (1+k)A_1 + A_2] \\ C_3 = -[(1+k)^3 A_0 + (1+k)^2 A_1 + (1+k)A_2 + A_3] \\ \vdots \\ C_{T-1} = -[(1+k)^{T-1} A_0 + (1+k)^{T-2} A_1 + \dots + (1+k)A_{T-2} + A_{T-1}] \end{cases} \qquad (2)$$

قضیه (۱): اگر بردار جریان سرمایه گذاری $C = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ مربوط به بردار جریان نقدی $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ و r مبین نرخ بازار باشد، آنگاه:

$$PV(X|r) = \frac{k-r}{1+r} PV(C|r) \qquad (3)$$

قضیه (۲): کمیت k نرخ بازگشت داخلی جریان نقدی X است، اگر و فقط اگر جریان سرمایه گذاری C مربوط به X تحت نرخ بهره ثابت k وجود داشته باشد.

$$PV(X|r=k) = \frac{k-k}{1+r} PV(C|r) = 0 \qquad (5)$$

قضیه (۳): فرض کنید k یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی برای جریان نقدی X و C یک جریان سرمایه گذاری مربوط به X تحت نرخ بهره ثابت r باشد، آنگاه خواهیم داشت:

الف)اگر $PV(C|r) > 0$ باشد،سپس $PV(X|r) \geq 0$ (پروژه اقتصادی خواهد بود) اگرو فقط اگر $k \geq r$.

ب) اگر $PV(C|r) < 0$ باشد،سپس $PV(X|r) \geq 0$ (پروژه اقتصادی خواهد بود) اگرو فقط اگر $k \leq r$.

ج) اگر $PV(C|r) = 0$ باشد، (سرمایه گذاری خالص باشد) سپس $PV(X|r) = 0$.

اگر $PV(C|r) > 0$ باشد، آنگاه به جریان نقدی، جریان سرمایه گذاری خالص می گوییم و اگر $PV(C|r) < 0$ باشد، آنگاه به جریان نقدی، جریان قرض گیری خالص می گوییم.با توجه به تعریف ذکر شده قضیه (۳) را می توان به صورت زیر بیان نمود.

قضیه (۴): فرض کنید k یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی برای جریان نقدی X و C یک جریان سرمایه گذاری مربوط به X تحت نرخ بهره ثابت k باشد، آنگاه خواهیم داشت:

الف)اگر جریان مالی X یک جریان سرمایه گذاری خالص باشد، رابطه $PV(X|r) \geq 0$ برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر $k \geq r$.

ب) اگر جریان مالی X یک جریان قرض گیری خالص باشد، رابطه $PV(X|r) \geq 0$ برقرار خواهد بود، اگر و فقط اگر $k \leq r$.

۵.تعیین اقتصادی بودن پروژه ه با رویکرد مصلحی و پاکباز، برای نرخ(های) بازگشت حقیقی

گام اول: نرخ(های)بازگشت سرمایه داخلی جریان نقدی را با استفاده از معادله(۱) به دست بیاورید.

گام دوم: برای نرخ های به دست آمده، به کمک معادله (۳) سرمایه گذاری مربوطه را به دست بیاورید.

گام سوم: ابتدا ارزش فعلی جریان(های) سرمایه گذاری را به دست بیاورید، سپس با استفاده از قضیه ۳ یا ۴ اقتصادی یا عدم اقتصادی بودن جریان نقدی را تعیین کنید.

توجه:جهت مشاهده اثبات قضایای قبل رجوع کنید به (مصلحی و پاکباز،۱۳۸۳).

۶.ارائه رویکرد جدید

این روش بسیار شبیه به رویکرد مصلحی و پاکباز می باشد با این تفاوت که این بار جهت ارزیابی های اقتصادی تنها از قسمت حقیقی عدد مختلط و جریان کمکی استفاده می نماییم.در ادامه بعد از چند تعریف ساده و مورد نیاز، قضایای مربوطه ارائه و اثبات می گردد.

تابع علامت : تابع علامت یک تابع بسیار ساده می باشد که در علوم مختلف ازجمله ریاضیات کاربردهای فراوانی دارد. این تابع مشخص می کند که یک ورودی دارای علامت مثبت منفی و یا بدون علامت می باشد. ضابطه این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$sgn(x) = \begin{cases} +۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x > ۰ \end{cases} \qquad (۴)$$

۷.اعداد مختلط

هر عدد مختلط دارای دو مولفه حقیقی[۱] و مختلط[۲] می باشد که مولفه اول مقدار طول از مبدا و مولفه ی دوم مقدار عرض از مبدا را نشان می دهد. اگر Z یک عدد مختلط(موهومی) باشد آنگاه می توان z را به صورت $z = Re(z) + Im(z) * i$ نمایش داد. در این رابطه مقدار i برابر $\sqrt{-۱}$ است.(فرخو،۱۳۸۵)

۸.حساب اعداد مختلط

چهار عمل اصلی بر روی اعداد مختلط $a = xa + ya * i$ و $b = xb + yb * i$ به صورت زیر تعریف می شود :

a+b= $(xa + xb) + (ya + yb) * i$ (۵)a-

b=$(xa - xb) + (ya - yb) * i$ (۶)

a*b=$(xa * xb - ya * yb) + (xa * yb + ya * xb) * i$ (۷)

bمزدوج= $\bar{b} = xb - yb * i$ (۸)

bاندازه=$|b| = \sqrt{xb^۲ - yb^۲}$ (۹)

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right) * \left(\frac{\bar{b}}{\bar{b}}\right) = \frac{a * \bar{b}}{|b|^۲} \qquad (۱۰)$$

۹.تعریف جریان نقدی مختلط

همانطور که در شکل(۱) مشاهده می کنیم، اگر Z یک جریان نقدی مختلط با طول عمر n به صورت $Z = (z_۰, z_۱, \dots, z_n)$ تعریف شده باشد آنگاه طبق تعریف ارزش فعلی روابط زیر برقرار است:

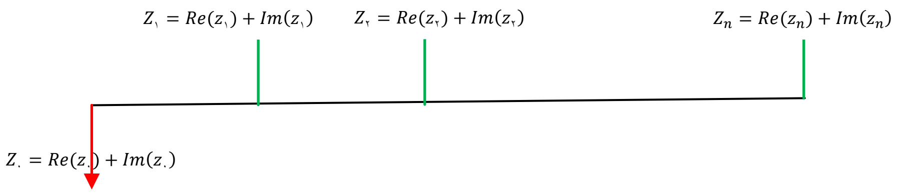
$$PV(Z|r) = z_۰ + \frac{z_۱}{۱+r} + \frac{z_۲}{(۱+r)^۲} + \frac{z_۳}{(۱+r)^۳} + \cdots + \frac{z_n}{(۱+r)^n} \qquad (۱۱)$$

$$PV(Z|r) = \mathrm{Re}(z_۰) + \mathrm{Im}(z_۰) + \frac{\mathrm{Re}(z_۱)}{۱+r} + \frac{\mathrm{Im}(z_۱)}{۱+r} + \cdots + \frac{\mathrm{Re}(z_n)}{(۱+r)^n} + \frac{\mathrm{Im}(z_n)}{(۱+r)^n} \qquad (۱۲)$$

$$PV(Z|r) = PV(\mathrm{Re}(Z)|r) + PV(\mathrm{Im}(Z)|r) * i \qquad (۱۳)$$

$$PV(Z|r) = \mathrm{Re}(PV(Z|r)) + \mathrm{Im}(PV(Z|r)) * i \qquad (۱۴)$$

[۱] -Real
[۲] -Complex



شکل(۱):نیمرخ جریان نقدی یک جریانم فرضی مختلط(ماخذ:نویسنده)

۱۰.قضیه اساسی جبر

اگر $\mathbf{P_n}(x) = \sum_{j=۰}^{n} p_j x^j$ یک چندجمله ای درجه **n** باشد ، آنگاه $\mathbf{P_n}$ دقیقا شامل **n** ریشه(اعم از حقیقی یا مختلط) مثل $x_۱, x_۲, x_۳, \dots, x_n$ بوده و می توان $\mathbf{P_n}$ به شکل زیر نوشت.(Brounen , Jong &Koedijk,۲۰۰۴)

$$\mathbf{P_n}(x) = p_n * \prod_{j=۱}^{n}(x - x_j) \qquad (۱۵)$$

قضیه(۵): اگر $Z = (z_۰, z_۱, \dots, z_n)$ یک پروژه با طول عمر n باشد و تغییر متغیر $x = \frac{۱}{۱+r}$ را روی ضابطه ارزش فعلی Z اعمال کنیم، فرمول ارزش فعلی($PV(Z|r)$) به یک چندجمله ای درجه n بر حسب x تبدیل می شود($PV(Z|x)$). پر واضح است که اگر x یک ریشه برای این چندجمله ای باشد ، آنگاه $r = \frac{۱}{x} - ۱$ یک ریشه(نرخ بازگشت داخلی) برای تابع ارزش فعلی($PV(Z|r)$) خواهد بود. لذا به سادگی می توان تابع $PV(Z|r)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$PV(Z|r) = \frac{z_n}{(۱+r)^n} * \prod_{j=۱}^{n} \frac{r_j - r}{۱+r_j} \qquad (۱۶)$$

اثبات:

با توجه به اینکه $PV(Z|x)$ یک چندجمله ای درجه n است طبق قضیه اساسی جبر و رابطه(۱۵) می توان $PV(Z|x)$ را به کمک ریشه های آن(x_j ها) به صورت زیر بسط داد:

$$PV(Z|x) = z_n * \prod_{j=۱}^{n}(x - x_j) \qquad (۱۷)$$

اکنون با بازگردانی متغییر ها به حالت اولیه داریم:

$$PV(Z|r) = z_n * \prod_{j=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۱+r} - \frac{۱}{۱+r_j}\right) \qquad (۱۷)$$

$$PV(Z|r) = z_n * \prod_{j=۱}^{n}\left(\frac{(۱+r_j)-(۱+r)}{(۱+r_j)*(۱+r)}\right) \qquad (۱۸)$$

$$PV(Z|r) = z_n * \prod_{j=۱}^{n} \frac{r_j - r}{(۱+r_j)*(۱+r)} \qquad (۱۹)$$

$$PV(Z|r) = \frac{z_n}{(۱+r)^n} * \prod_{j=۱}^{n} \frac{r_j - r}{(۱+r_j)} \qquad (۲۰)$$

قضیه(۶): اگر r_k یک نرخ بازگشت دلخواه از مجموعه نرخ های بازگشت Z باشد، می توان رابطه(۱۶) را به صورت زیر بسط داد(r را به عنوان تابعی از x فرض شده است):

$$PV(Z|x) = \frac{r_k - r}{(۱+r)^n} * z_n * \prod_{j=۱, j \neq k}^{n} \frac{r_j - r}{(۱+r_j)} \qquad (۲۱)$$

اثبات:

طبق رابطه(۱۶) داریم:

$$PV(Z|r) = \frac{z_n}{(۱+r)^n} * \prod_{j=۱}^{n} \frac{r_j - r}{(۱+r_j)} \qquad (۲۲)$$

با خارج نمون $(r_k - r)$ از عبارت ضربی نتیجه زیر حاصل می شود:

$$PV(Z|r) = \frac{r_k - r}{(۱+r)^n} * z_n * \prod_{j=۱, j \neq k}^{n} \frac{r_j - r}{(۱+r_j)} \qquad (۲۳)$$

اثبات تمام است.

قضیه(۷): اگر r_k یک نرخ بازگشت دلخواه از مجموعه نرخ های بازگشت Z باشد، می توان رابطه(۲۱) را به صورت زیر بسط داد:

$$PV(Z|x) = \frac{r_k - r}{۱+r} * z_n * \prod_{j=۱, j \neq k}^{n}(x - x_j) \qquad (۲۴)$$

اثبات:

طبق قضیه(۵) می توان گفت:

$$PV(Z|r)=\frac{r_k-r}{(1+r)^n}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}\frac{r_j-r}{(1+r_j)} \quad (۲۵)$$

$$PV(Z|r)=\frac{r_k-r}{(1+r)^n}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}\frac{(1+r_j)-(1+r)}{(1+r_j)} \quad (۲۶)$$

با درنظر گرفتن تغییر متغیر $r=\frac{1}{x}-1$ در رابطه(۲۶) می توان گفت:

$$PV(Z|x)=\frac{r_k-r}{(1+r)^n}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}\frac{\frac{1}{x_j}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x_j}} \quad (۲۷)$$

$$PV(Z|x)=\frac{r_k-r}{(1+r)^n}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}\frac{\frac{x-x_j}{x_j*x}}{\frac{1}{x_j}} \quad (۲۸)$$

$$PV(Z|x)=\frac{r_k-r}{(1+r)^n}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}\frac{x-x_j}{x} \quad (۲۹)$$

$$PV(Z|x)=\frac{r_k-r}{(1+r)^n*x^{n-1}}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}(x-x_j) \quad (۳۰)$$

$$PV(Z|x)=\frac{r_k-r}{1+r}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}(x-x_j) \quad (۳۱)$$

اینک طبق گفته های قبلی می توان گفت رابطه $\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}(x-x_j)$ بیانگر یک چندجمله ای از درجه $(n-1)$ می باشد. به بیان دیگر $\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}(x-x_j)$ بیانگر مقدار ارزش فعلی یک جریان نقدی با طول عمر $(n-1)$ می باشد. (توجه:جهت محاسبه مقدار ضرایب این چندجمله ای(یا همان جریان نقدی) می توان از قواعد تقسیم چندجمله ای ها استفاده نمود.) لذا مقدار ارزش فعلی جریان نقدی را می توان به صورت زیر بیان نمود(Burden, Faires,۲۰۱۱):

$$PV(Z|x)=\frac{r_k-r}{1+r}*\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}(x-x_j) \quad (۲۸)$$

اثبات تمام است.

قضیه(۸):اگر $Z=(z_0,z_1,\dots,z_n)$ یک پروژه با طول عمر n باشد و k نرخ بازگشتی حقیقی یا مختلط برای جریان نقدی Z باشد، آنگاه جریانی نقدی مانند $B=(b_0,b_1,\dots,b_{n-1})$ وجود دارد بطوریکه:

$$PV(Z|r)=\frac{k-r}{1+r}*PV(B|r) \quad (۲۹)$$

اثبات:

کافیست در قضیه قبل در رابطه(۲۸) ، ضرایب چندجمله ای از درجه $(\mathrm{n}-1)$ یعنی($\mathrm{z_n}*\prod_{\mathrm{j}=1,j\neq k}^{\mathrm{n}}(x-x_j)$) را به عنوان درایه های جریان نقدی B تعریف نماییم(ضریب x^j $b_j=$).

اثبات تمام است. لذا حکم برقرار است:

$$PV(Z|r)=\frac{k-r}{1+r}*PV(B|r) \quad (۳۰)$$

قضیه(۹):اگر $Z=(z_0,z_1,\dots,z_n)$ یک پروژه با طول عمر n باشد و k نرخ بازگشتی حقیقی یا مختلط برای جریان نقدی Z باشد، آنگاه جریانی نقدی مانند $B=(b_0,b_1,\dots,b_{n-1})$ وجود دارد بطوریکه:

$$sgn\big(PV(Z|r)\big)=sgn\big((Re(k)-r)\mathrm{Re}\big(PV(B|r)\big)\big) \quad (۳۱)$$

اثبات:

با توجه به فرض قضیه r یک عدد حقیقی و k یک عدد موهومی می باشد

(یعنی $k=Re(k)+Im(k)*i$)، لذا در حالت کلی $PV(B|r)$ نیز موهومی درنظر می گیریم پس می توان رابطه (۳۰) را به صورت زیر نوشت:

$$PV(Z|r)=\left\{\frac{(Re(k)+Im(k)*i)-r}{1+r}\right\}*\{\mathrm{Re}\big(PV(B|r)\big)+Im\big(PV(B|r)\big)*i\} \quad (۳۲)$$

$$PV(Z|r)=\left\{\frac{(Re(k)-r)+Im(k)*i}{1+r}\right\}*\{\mathrm{Re}\big(PV(B|r)\big)+Im\big(PV(B|r)\big)*i\} \quad (۳۳)$$

$$PV(Z|r)=\frac{1}{1+r}\{(Re(k)-r)\mathrm{Re}\big(PV(B|r)\big)+(Re(k)-r)Im\big(PV(B|r)\big)*i+Im(k)*i*\mathrm{Re}\big(PV(B|r)\big)+Im(k)*i*Im\big(PV(B|r)\big)*i\} \quad (۳۴)$$

$$PV(Z|r)=\frac{۱}{۱+r}\{(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))+((Re(k)-r)Im(PV(B|r))+Im(k)\mathrm{Re}(PV(B|r)))*i-Im(k)Im(PV(B|r))\} \quad (۳۵)$$

با توجه به فرض قضیه، جریان نقدی Z و r هردو حقیقی می باشند لذا بدیهیست که $PV(Z|r)$ نیز حقیقی خواهد بود پس می توان گفت $Im(PV(Z|r))=۰$ لذامی توان رابطه قبل را ساده تر نمود، پس:

$$PV(Z|r)=\frac{۱}{۱+r}\{(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))-Im(k)Im(PV(B|r))\} \quad (۳۶)$$

هچنین می توان نتیجه گرفت :

$$(Re(k)-r)Im(PV(B|r))+Im(k)\mathrm{Re}(PV(B|r))=۰ \quad (۳۷)$$

$$Im(k)=-\frac{(Re(k)-r)Im(PV(B|r))}{\mathrm{Re}(PV(B|r))} \quad (۳۸)$$

حال از دو رابطه(۳۶)و(۳۸) نتیجه می شود:

$$PV(Z|r)=\frac{۱}{۱+r}\{(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))+\frac{(Re(k)-r)Im(PV(B|r))}{\mathrm{Re}(PV(B|r))}\ Im(PV(B|r))\} \quad (۳۹)$$

$$PV(Z|r)=\frac{۱}{۱+r}\{(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))+(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))\left(\frac{Im(PV(B|r))}{\mathrm{Re}(PV(B|r))}\right)^{۲}\} \quad (۴۰)$$

$$PV(Z|r)=\frac{(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))}{۱+r}\{\underbrace{۱+\left(\frac{Im(PV(B|r))}{\mathrm{Re}(PV(B|r))}\right)^{۲}}_{\geq 0}\} \quad (۴۱)$$

با توجه به اینکه عبارت داخل آکولاد همواره بزرگتر یا مساوی یک می باشد (پس مثبت است) لذا تاثیری در علامت PV(Z|r) نخواهد داشت. با توجه به مثبت بودن ارزش زمانی پول عبارت $\frac{۱}{۱+r}$ همواره مثبت است، این عبارت نیز در علامت PV(Z|r) بی تاثیر است. پس به سادگی درمی یابیم که علامت PV(Z|r) تنها به عبارت $(Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))$ بستگی خواهد داشت. از نظر ریاضی می توان گفت:

$$sgn(PV(Z|r))=sgn((Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))) \quad (۴۲)$$

اثبات تمام است.

قضیه(۱۰): فرض کنید k یک نرخ بازگشت سرمایه داخلی حقیقی یا مختلط برای جریان نقدی حقیقی $Z=(z_۰,z_۱,\dots,z_n)$ باشد و همچنین $B=(b_۰,b_۱,\dots,b_{n-۱})$ یک جریان نقدی مشتق شده از Z تحت نرخ بهره ثابت r و نرخ بازگشت k باشد، آنگاه می توان گفت:

الف) $Re(PV(B|r))>۰$ است و $Re(k)>r$، اگر و فقط اگر $PV(Z|r)>۰$.

ب) $Re(PV(B|r))>۰$ است و $Re(k)<r$، اگر و فقط اگر $PV(Z|r)<۰$.

ج) $Re(PV(B|r))<۰$ است و $Re(k)>r$، اگر و فقط اگر $PV(Z|r)<۰$.

د) $Re(PV(B|r))<۰$ است و $Re(k)<r$ اگر و فقط اگر $PV(Z|r)>۰$.

ه) $Re(PV(B|r))=۰$ است و یا $Re(k)=r$ اگر و فقط اگر $PV(Z|r)=۰$.

اثبات:

با توجه به قضیه(۷) داریم:

$$sgn(PV(Z|r))=sgn\left((Re(k)-r)\mathrm{Re}(PV(B|r))\right)=sgn(Re(k)-r)*sgn(\mathrm{Re}(PV(B|r))) \quad (۴۳)$$

لذا به سادگی می توان گفت:

$$PV(Z|r)>۰ \Leftrightarrow Re(PV(B|r))>۰ \text{ and } Re(k)>r \quad (۴۴)$$

$$PV(Z|r)<۰ \Leftrightarrow Re(PV(B|r))>۰ \text{ and } Re(k)<r \quad (۴۵)$$

$$PV(Z|r)<۰ \Leftrightarrow Re(PV(B|r))<۰ \text{ and } Re(k)>r \quad (۴۶)$$

$$PV(Z|r)>۰ \Leftrightarrow Re(PV(B|r))<۰ \text{ and } Re(k)<r \quad (۴۷)$$

$$PV(Z|r)=۰ \Leftrightarrow Re(PV(B|r))=۰ \quad \text{or } Re(k)>r \quad (۴۸)$$

اثبات تمام است.

۱۱.مثال عددی

جریان نقدی Z =(-۳, ۲,۵,-۲, ۱,۵) با نرخ بهره ثابت ۱۰درصد مفروض است. مشاهده می کنیم که این جریان نقدی دارای سه نرخ بازگشت IRR={$r_۱$ = -۰,۲۰۹۷, $r_۲$ = -۰,۹۷۸۵ - ۰,۷۹۵۱i, $r_۳$ = -۰,۹۷۸۵ + ۰,۷۹۵۱i} می باشد. جدول(۱) دربرگیرنده جریان اصلی و زیرجریان های مرتبط با نرخ های بازگشت می باشد.

جدول(۱)

سال سوم	سال دوم	سال اول	سال شروع	نرخ بازگشت مختلط
۱.۵	−۲	۲.۵	−۳	
۱.۵	−۰.۱۰۲۰	۲.۳۷۰۹		$r_۱ = -۰.۲۰۹۷$
۱.۵	−۱.۹۴۹۰ + ۱.۸۸۵۱i	۰.۶۴۵ − ۲.۳۸۵۳i		$r_۲ = -۰.۹۷۸۵ - ۰.۷۹۵۱i$
۱.۵	−۱.۹۴۹۰ − ۱.۸۸۵۱i	۰.۶۴۵ + ۲.۳۸۵۳i		$r_۳ = -۰.۹۷۸۵ + ۰.۷۹۵۱i$

(ماخذ:نویسنده)

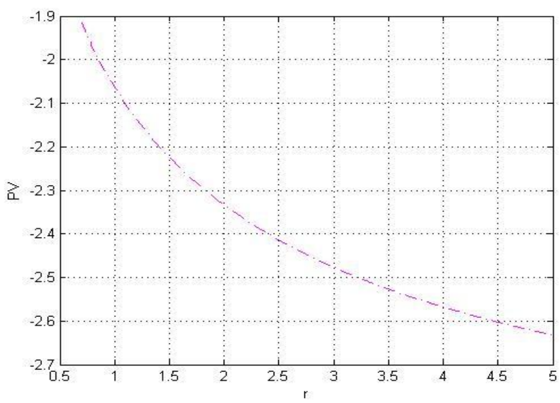
طبق رویکرد جدید قسم موهومی زیرجریان های نقدی و نرخ بازگشت را کنار گذاشته و حاصل در جدول(۲) نشان داده شده است.

جدول(۲)

تصمیم نهایی بر اساس قضیه(۹)	$Re(PV(B\|r = ۰.۱۰))$	قسمت حقیقی درسال سوم	قسمت حقیقی درسال دوم	قسمت حقیقی درسال اول	قسمت حقیقی درسال شروع	قسمت حقیقی نرخ های بازگشت داخلی سرمایه
	-۱,۲۵۳۲	۱,۵	-۲	۲,۵	-۳	
رد	۳,۵۱۷۸	۱,۵	-۰,۱۰۲۰	۲,۳۷۰۹		$Re(r_۱) = -۰.۲۰۹۷$
رد	۰,۱۱۲۹	۱,۵	-۱,۹۴۹۰	۰,۶۴۵		$Re(r_۲) = -۰.۹۷۸۵$
رد	۰,۱۱۲۹	۱,۵	-۱,۹۴۹۰	۰,۶۴۵		$Re(r_۳) = -۰.۹۷۸۵$

(ماخذ:نویسنده)

همانطور که در جدول(۲) می بینیم پروژه مورد نظر غیر اقتصادی می باشد و لذا رد می شود.همچنین شکل(۱) نمودار مربوط به ارزش فعلی جریان نقدی اصلی(Z) را به تصویر می کشد.



شکل(۱):نمودار ارزش فعلی جریان نقدی(Z) (ماخذ:نویسنده)

۱۲.نتیجه گیری

هرچند رویکرد (مصلحی و پاکباز،۱۳۸۳) چشم انداز جدیدی جهت رفع ابهامات و تناقضات روش نرخ بازگشت داخلی ارائه نمود ، اما با توجه به اینکه همیشه نرخ های بازگشت ، حقیقی نمی باشند ، در این مقاله سعی شد تا با معرفی رویکردی نو از یک زاویه دیگر به تعمیم

روش مصلحی و پاکباز در شرایط مختلط بودن نرخ(های) بازگشت ، پرداخته شود . همچنین رویکرد جاری یک روش تصمیم گیری دو معیاره را جهت ارزیابی طرح ها و پروژه های چند نرخی پیشنهاد می کند و نرخ بازگشت سرمایه را معیاری کافی برای تصمیم گیری صحیح نمی پذیرد.لازم به ذکر است که به کمک رویکرد جاری می توان تنها مطلوبیت پروژه ها را توسط نرخ های بازگشت حقیقی و موهومی، سنجید و به طور کلی نرخ های بازگشت مختلط و همچنین رتبه بندی پروژه ها را مورد بررسی قرار نداده است اکنون یک پیشنهاد جهت تحقیقات آتی تعمیم رویکرد جاری جهت ارزیابی های اقتصادی پروژه ها توسط نرخ های بازگشت مختلط می باشد.دومین پیشنهاد تعمیم روش جاری جهت رتبه بندی پروژه ها و طرح ها می باشد.

۱۳.منابع و مآخذ

[۱].اسکونژاد، م.اقتصاد مهندسی. چاپ سی و نهم . تهران :انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر؛۱۳۹۱

[۲].کرامتی،م.ع. شیخان، ع. جعفری، ح.(۱۳۹۴). ارائه مدلی ساده در ارزیابی نرخ بازگشت داخلی چندگانه . چهارمین کنفرانس ملی مدیریت و حسابداری.

[۳].فرخو، ل.ریاضی عمومی ۱.چاپ اول.تهران:اتشارات دانشگاه پیام نور؛**۱۳۸۵**

[۴].مصلحی،ق.، خاکباز،ح. (۱۳۸۳). استفاده از روش نرخ بازگشت داخلی(IRR) برای ارزیابی پروژه های چند نرخی.دومین کنفرانس بین المللی مدیریت.

[۵].Brounen, D., De Jong, A., &Koedijk, K. (۲۰۰۴). Corporate finance in Europe:Confronting theory with practice. Financial Management, ۳۳(۴).

[۶].Burden, R. L., Faires, J. D. (۲۰۱۱). Numerical Analysis. Canada: Richard Stratton.

[۷].Kierulff, H.(۲۰۰۸). MIRR: A better measure. Business Horizons, ۵۱،۳۲۱-۳۲۹.

[۸]. Norstrom, C.J. (۱۹۷۲). A sufficient condition for a unique non-negative internal rate of return. Journal of Financial and Quantitative Analysis, ۷(۳), ۱۸۳۵–۱۸۳۹.