ON MANAGEMENT ECONOMICS AND INDUSTRIAL ENGINEERING 2015 مدیریت، اقتصاد و مهندسی صنایع

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از برنامه‌ریزی منعطف

حسین خنجرپناه[۱ ،*]، میرسامان پیشوایی[۲]، آرمین جبارزاده[۳]
مشخصات نویسنده اول
۱ و *- نویسنده مسوول: دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی سیستم‌های اقتصادی اجتماعی، دانشکده مهندسی پیشرفت، دانشگاه علم و صنعت ایران. Email: khanjarpanah@pgre.iust.ac.ir

مشخصات نویسنده دوم
۲- استادیار، گروه سیستم‌های اقتصادی اجتماعی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران.

مشخصات نویسنده سوم
۳- استادیار، گروه سیستم‌های اقتصادی اجتماعی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران.

چکیده
از جمله نگرانی‌های سهامداران از سرمایه‌گذاری، کسب سود بالا توسط انتخاب سهم‌هایی است که ریسک کمی داشته باشند. در این مقاله، ابتدا مدل جدیدی بر اساس نظریه سبدسهام مدرن و با اضافه کردن محدودیت‌هایی نظیر تعداد سهام و انعطاف‌پذیری وزن سهام در سبد سهام ارائه می‌شود. در اعمال محدودیت انعطاف‌پذیری وزن سهام، حالتی ایجاد می‌شود که در ارضای محدودیت، انعطاف وجود دارد و دارای عدم قطعیت هستیم که برای مدل کردن این انعطاف از روابط فازی استفاده شده است. علاوه بر عدم قطعیت ذکر شده، بازده سهام نیز خود دارای عدم قطعیت شناختی است. بنابراین برای برخورد با عدم قطعیت از رویکرد فازی استفاده شده است، که در این‌جا از هر دو نوع برنامه‌ریزی منعطف و امکانی که از زیرمجموعه‌های برنامه‌ریزی فازی هستند، برای تبدیل مدل به یک مسئله ساده استفاده شده است.
برای حل مدل و ارزیابی آن از ۳۰ شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است، به این صورت که بازده یک ماه این شرکت‌ها در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از مدل‌های ارائه شده نشان می‌دهد که در سطح اطمینان پایین‌تر، می‌توان سود بالایی را با ریسک کم از طریق انتخاب یک سبد سهام معقول به دست آورد.

واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه‌ریزی امکانی و منعطف، برنامه‌ریزی فازی، بورس اوراق بهادار تهران، سبد سهام.

Portfolio Optimization using flexible programming

Abstract
Earining high profit with choosing low risk stocks, is one of the investors concerns. In this paper, we propose a new model based on modern portfolio theory that have some constraints such as cardinality and flexiblity of stock's weights in portfolio. In flexiblity of stock's weights, we face with uncertainty of constraint satisfaction and fuzzy relationships applied to handle it. Uncertainty exists in stock's returns, too. To handle uncertatinties, fuzzy method is used. Here, flexible and possibilistic programming are applied to convert model to crisp one.
To slove and evaluation of model, returns of ۳۰ companies of Tehran Stock Exchange in a month is considered. The results of proposed model showed it is possible to earn high profit with lower risk by choosing a reasonoble portfolio at lower values of confidence level.

Keywords: Fuzzy programming; Goal programming; Portfolio; Possibilistic and flexible programming; Tehran stock exchange.

۱- مقدمه

مسائل مالی، مانند مسئله انتخاب سبد سهام از جمله مسائل جذاب در زمینه برنامه‌ریزی در عدم قطعیت هستند. در سال‌های اخیر شاهد افزایش مطالعات در حوزه مالی بوده‌ایم که در انتخاب سبد سهام و مدیریت آن نیز تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است و روش‌های مختلفی برای انتخاب سهام ارائه گردیده است. مطالعه سبد سهام از آن جهت دارای اهمیت است که با سودآوری ارتباط دارد و ارائه یک مدل بهتر برای انتخاب سبد، می‌تواند منجر به سود بالاتر شود. اولین مدل برای مسئله سبد سهام توسط مارکویتز (۱۹۵۲) ارائه شد. او بیان کرد که یک سرمایه‌گذار منطقی فقط بر روی ماکزیمم کردن بازده سبد سهام دقت نمی‌کند، بلکه علاوه بر بازده بر ریسک آن نیز توجه دارد. در مدل‌سازی ریسک به عنوان واریانس مدل شناخته می‌شود. بنابراین با توجه به موارد ذکرشده، دو هدف برای سرمایه‌گذاران از تشکیل سبد سهام شکل می‌گیرد که این مسئله سبد سهام را به یک مسئله چند هدفه تبدیل می‌کند.

آن چیزی که شرایط را در حل مسائل دشوار می‌کند وجود عدم قطعیت در مسائل است. عدم قطعیت را می‌توان عدم اطلاع کامل درباره رخدادهای آینده توصیف کرد که می‌تواند با جمع‌آوری اطلاعات آن را کم کرد، اما نمی‌توان آن را حذف نمود. وقوع بحران اقتصادی در سال ۲۰۰۸ باعث شد تا عدم قطعیت در مسائل مالی اهمیت خاصی پیدا کند و مطالعات فراوانی در زمینه مقابله با عدم قطعیت در این مسائل انجام گرفت. مسئله انتخاب سبد سهام نیز از جمله مسائلی است که در شرایط عدم قطعیت بررسی می‌گردد، چون سرمایه‌گذار نمی‌تواند میزان دقیق بازدهی یک سهام را پیش‌بینی کند. وجود هر نوع عدم قطعیت در مدل‌سازی بازارهای مالی و عوامل موثر برآن موجب بروز مقداری ریسک در فرآیند تصمیم-گیری می‌شود. ریسک‌های مختلفی در عملکردهای مالی بسیار متنوع بوده که از جمله این ریسک‌ها می‌توان به ریسک بازار، ریسک عملیاتی، ریسک سیاسی، ریسک نقدینگی و ریسک مدل اشاره کرد. رویکردهای برخورد با عدم قطعیت در ادبیات محدود بوده و می‌توان آن برنامه‌ریزی فازی و استوار در این زمینه اشاره کرد.

وجود اطلاعات فراوان و عوامل تاثیرگذار دیگر، تصمیم‌گیری فردی جهت انتخاب سبد سهام مناسب را سخت می‌کند، تا آن‌جا که اغلب افراد معیار خود جهت تصمیم‌گیری در مورد انتخاب سهام را، به میزان حجم صف‌های خرید و فروش، اخبار و شایعات شنیده شده در بازار و مسائلی از این دست تقلیل داده‌اند. این حجم انبوه از اطلاعات و استفاده از آن در بهبود تصمیم‌گیری از موضوعات سخت است. تنوع روش‌های سرمایه‌گذاری و پیچیدگی تصمیم‌های مزبور در چند دهه اخیر افزایش چشم‌گیری داشته است. این رشد گسترده، نیاز فزاینده‌ای به مدل‌های فراگیر و یکپارچه ایجاد نمود. بازار سرمایه کشور ما، کارایی لازم را ندارد و برای کسب بازده فقط نمی‌توان به اطلاعات موجود اکتفا کرد (امیری و همکاران، ۱۳۸۹). بنابراین با توجه به اطلاعات فراوان و عدم کارایی بازار، نیاز است تا مدلی که حداکثرسازی بازده و حداقل کردن ریسک سبد سهام را بتواند انجام بدهد. در این‌جا یک مدل منطقی جدید ارائه می‌گردد که در آن محدودیت‌های کاربردی که سرمایه‌گذاران همواره آن‌ها را در نظر می‌گیرند به مدل افزوده شده است که از جمله آن می‌توان به محدودیت‌های انعطاف در وزن سهام و تعداد سهام در سبد اشاره کرد.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲، مبانی نظری پژوهش عنوان می‌شود و همچنین تحقیقات گذشته در این زمینه نیز در این بخش مرور می‌شود. در بخش ۳، روش شناسی پژوهش ارائه شده است که ابتدا مقدماتی در مورد روش فازی و سپس به انواع برنامه‌ریزی ریاضی فازی اشاره شده است. نتایج تحقیق در بخش ۴ ارائه شده است و نهایتا در بخش ۵، نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده ارائه شده است.

۲- مبانی نظری و پیشینه تحقیق

یک سبد سهام مجموعه‌ای از دارایی‌های مالی هستند. سبدهای سهام توسط افراد و سازمان‌های مختلفی نظیر بانک و صندوق‌های سرمایه-گذاری تشکیل و مدیریت می‌شود. بعد از آن که مارکویتز مدل اولیه سبد سهام را ارائه کرد، واریانس به عنوان عامل غیرمطلوب و بازده به عنوان عامل مطلوب شناخته شد. عوامل دیگری نیز در انتخاب سهام تاثیر دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به زمان و اهداف سرمایه‌گذاری اشاره کرد. نتایج تجربی در تشکیل سبد سهام نشان می‌دهدکه سرمایه‌گذاری روی سهم‌های مختلف می‌تواند به کاهش ریسک سبد سهام کمک کند، بنابراین بهتر است که در مسئله سبد سهام حدهایی را برای وزن هر سهم موجود در سبد تعیین کنیم. به طور کلی بهینه‌سازی یک سبد سهام باید این موارد را برای ما مشخص کند: چه سهم‌هایی باید داخل سبد باشند، وزن سهم‌های داخل سبد چقدر است و بازده و ریسک حاصل از سرمایه‌گذاری چگونه است.

اگر بخواهیم نحوه کار مدل مارکویتز را به صورت ریاضی بیان کنیم، با فرض اینکه $r(i), i=1,\dots,k$ بازده سهام، $\sigma(i,j), i,j=1,\dots,k$ کواریانس بین دو سهم و $x(i), i=1,\dots,k$ وزن سهم در سبد باشد، مدل سبد سهام به گونه‌ای $x(1),\dots,x(n)$ را انتخاب می‌کند که

$$\sum_{i=1}^{k} x(i)=1 \quad ,0\le x(j)\le 1 \tag{۱}$$

و بازده سبد ماکزیمم گردد:

$$r_v=\sum_{i=1}^{k} r(i)x(i) \tag{۲}$$

و همچنین ریسک سبد مینیمم شود:

$$\sigma_v=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x(j)x(i)\sigma(i,j). \tag{۳}$$

که همان‌طور که مشخص است این مسئله یک مسئله چندهدفه می‌باشد. در زمینه بهینه‌سازی سبد سهام تحقیقات گسترده‌ای صورت گرفته است و روش‌ها بسیاری برای بهینه‌سازی آن پیشنهاد شده است. افشارکاظمی و همکاران (۱۳۹۱)، روشی را با تلفیق روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی آرمانی، برای انتخاب سبد سهام در بورس اوراق بهادار تهران پیشنهاد دادند. خدامرادی و همکاران (۱۳۹۲)، در پژوهشی به ارائه یک رویکرد دومرحله‌ای ریاضی برای انتخاب سبد سهام پرداختند که در آن هدف عملیاتی ساختن تحلیل بنیادی در انتخاب سهام بود. در این پژوهش ابتدا با رویکرد تحلیل سلسله مراتبی اولویت عوامل موثر در انتخاب صنایع تعیین شد و سپس با حل مدل برنامه‌ریزی خطی، اوزان صنایع با توجه به محدودیت‌های آن‌ها به دست آمد. در نهایت هم اوزان مربوط به سهام در صنعت با به‌کار گیری مدل برنامه‌ریزی آرمانی مشخص شد. تکنیک تاپسیس[۱] نیز در (امیری و همکاران، ۱۳۸۹) استفاده شده است. الگوریتم‌های فراابتکاری نیز در بهینه‌سازی سبد سهام روش‌های کارایی هستند. درخشان و همکاران (۱۳۹۱)، روشی مبنی بر ترکیب دو روش بهینه‌یابی اجتماع مورچکان و شبیه‌سازی تبرید-تدریجی پارتو پیشنهاد شد. همچنین برای اعتبار سنجی روش پیشنهاد شده عملکرد آن در بورس اوراق بهادار تهران با چند روش فراابتکاری دیگر مقایسه شد که نتایج بدست آمده حاکی از برتری روش پیشنهادی بوده است. از دیگر کارهایی که با الگوریتم فراابتکاری کار شده است می‌توان به (خالوزاده و امیری، ۱۳۸۴؛ گرکز و همکاران، ۱۳۸۹) اشاره کرد که از الگوریتم ژنتیک برای انتخاب سبد سهام استفاده کردند. در برخی مطالعات بیش از دو هدف برای مسئله سبد سهام در نظر گرفته می‌شود که از جمله این تحقیقات می‌توان به (قندهاری و همکاران، ۱۳۹۱) اشاره کرد. در تحقیق دیگری خیامم و همکاران (۱۳۹۱) یک مدل چندهدفه فازی برای به روز رسانی سبدسهام با درنظر گرفتن هزینه‌های معاملات، معرفی کردند. نتایج نشان داد که مدل ارائه شده عملکرد بهتری نسبت به شاخص بازار ارائه کردند. این تحقیقات، نمونه‌ای بود که در داخل کشور در زمینه انتخاب سبد سهام انجام گرفته‌اند. اما مسئله سبد سهام در تحقیقات خارجی نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. هانگ و کیائو (۲۰۱۲)، در مورد انتخاب سهام در یک سبد سهام چند دوره‌ای تحقیق کردند که بازده سهام آن توسط ارزیابی‌های خبرگان تعیین شده است در این تحقیق آن‌ها یک مدل شاخص ریسک تعدیل شده را ارائه کردند. دنگ و ژائو (۲۰۱۳) به ارائه برخی روش‌های تمرینی برای بدست آوردن جواب‌های دقیق برای مدل مارکویتز در بازده مقادیر ریسک پرداختند.

در سال‌های اخیر، توجه بیشتری به برنامه‌ریزی فازی برای روبرویی با عدم قطعیت، شده است. تئوری مجموعه فازی برای اولین بار توسط زاده (۱۹۷۳)، ارائه گردید. لیو و ژانگ (۲۰۱۳) یک مدل بهینه‌سازی سبد سهام در محیط فازی را در نظر گرفتند که در این مطالعه بازده سهام و حجم معاملات به عنوان متغیرهای فازی در نظر گرفته شدند. همچنین ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴) نیز یک مدل چند هدفه فازی سبد سهام را مطالعه کردند که این مدل تلاش می‌کند تا ثروت نهایی را با کنترل ریسک حداکثر کند. در این تحقیق مقادیر بازده سهام با استفاده از مقادیر میانگین امکانی بدست

[۱] Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS)

آمده و کنترل ریسک هم از انحراف استاندارد امکانی ایجاد شده است. در این تحقیق همچنین هزینه معاملات و محدودیت‌های تعداد سهام در مدل لحاظ شده‌اند. هوانگ (۲۰۱۰) به بررسی انتخاب سبد سهام در حالت عدم قطعیت در زمانی که داده‌های تاریخی نمی‌توانند به خوبی بازده‌های سرمایه را مشخص کنند، پرداخت. در این تحقیق او یک نمودار ریسک را معرفی کرد و مدل میانگین-ریسک را توسعه داد. ژو و همکاران (۲۰۱۵) تکنیک‌های سری زمانی فازی را با بهینه‌سازی سبد سهام ترکیب کردند. آن‌ها تکنیک سری زمانی فازی را به عنوان یک روش مناسب و کارا در زمینه داده‌های مالی معرفی کردند و نتایج حاصل از تحقیق آن‌ها نشان دهنده کارایی مدل پیشنهادی بود. تحقیقات بسیاری در زمینه برنامه‌ریزی فازی سبد سهام صورت گرفته است و روش‌های بسیار زیادی برای بهینه‌سازی آن پیشنهاد شده است که از جمله این تحقیقات می‌توان به (دوان و استاهلکر، ۲۰۱۱؛ کادناس و همکاران، ۲۰۱۲؛ وو و لیو، ۲۰۱۲) اشاره کرد. در پیشینه تحقیق آن چیزی که به ندرت شاهد آن هستیم برنامه‌ریزی منعطف در مسائل می‌باشد. این نوع از برنامه‌ریزی که در بخش‌های بعدی بیشتر به آن پرداخته می‌شود برای نوع خاصی از عدم قطعیت کاربرد دارد. در نظر گرفتن محدودیت‌های سبد سهام به عنوان محدودیت‌های منعطف نیز از جمله کارهایی است که در مقالات گذشته به آن پرداخته نشده است، هرچند که این محدودیت کاملا منطقی است. این محدودیت برآن تاکید دارد که نمی‌توان حد ثابتی را برای وزن سهام در نظر گرفت و امکان انعطاف در حد بالا و پایین وزن سهام در سبد وجود دارد. بنابراین در این تحقیق به دنبال آن هستیم که مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را به نحوی معرفی و مدل‌سازی کنیم تا این مسئله کاربردی و کاملا منطقی باشد.

۳- روش‌شناسی پژوهش

هر ترکیبی از دارایی‌ها برای سرمایه‌گذاری را سبد سهام می‌گویند. در هر سبد سهام دو عامل مطلوب وجود دارد که یکی بازده بالای سبد سهام و دیگری ریسک کم آن است. بنابراین ترکیب سهام در سبد باید به گونه‌ای انتخاب گردد که این دو هدف را ارضا کند. بنابراین ما با یک مسئله چندهدفه روبرو هستیم. در این مقاله ما حالت تک دوره‌ای از یک مدل سبد سهام را بررسی می‌کنیم که محدودیت‌های گفته شده روی آن اعمال شده است. همچنین مفروضاتی را نیز در این مدل در نظر گرفتیم که عبارتند از: عدم فروش کوتاه مدت و منعطف بودن محدودیت حدود وزن سهم اشاره کرد. بنابراین مسئله بهینه سازی سبد سهام که در این مقاله بررسی می‌شود به صورت زیر است:

$$\max E\left(\tilde{k}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{r}_i \tag{۴}$$

$$\min Var\left(\tilde{k}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j cov\left(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j\right) \tag{۵}$$

$$Subject\ to:$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{۶}$$

$$lm_i \mathrel{\tilde{\le}} x_i \mathrel{\tilde{\le}} um_i \tag{۷}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = N \tag{۸}$$

$$x_i \ge 0, i=1,\dots,n \tag{۹}$$

$$m_i \in \{0,1\}, i=1,\dots,n \tag{۱۰}$$

که در آن، $\tilde{k}$ بازده غیرقطعی کل سبد، $\tilde{r}_i$ بازده غیرقطعی سهم iام، $cov\left(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j\right)$ کواریانس بین بازده سهم‌های i,j، l و u به ترتیب حد پایین و بالا برای وزن هر سهم در سبد، N تعداد سهمی که ما در سبد می‌خواهیم داشته باشیم، x_i متغیر وزن سهم iام در سبد، m_i متغیر باینری که زمانی صفر است که سهم i در سبد نیست و زمانی ۱ است که سهم iام در سبد است. معادله (۴) نشان‌دهنده ماکزیمم کردن بازده سبد سهام و معادله (۵) مینیمم کردن واریانس سبد سهام که همان ریسک محسوب می‌شود را نشان می‌دهد. محدودیت (۶) محدودیت بودجه است و نشان می‌دهد که جمع وزن سهام قرار گرفته در سبد سهام باید برابر با ۱ باشد. اگر سهمی در سبد سهام قرار بگیرد محدودیت‌های برای کران بالا و پایین آن در نظر گرفته می‌شود که این کران‌ها دارای انعطاف نیز هستند که این محدودیت‌ها را معادله (۷) نشان می‌دهد. محدودیت (۸) نشان می‌دهد که ما تعداد ثابتی سهم را می‌توانیم در سبد سهام انتخاب کنیم. در نهایت معادلات (۹) و (۱۰) نشان‌دهنده غیرمنفی بودن و محدودیت باینری بودن متغیرهای تصمیم است. در این پژوهش از برنامه ریزی ریاضی فازی برای مدل‌سازی و حل مسئله سبد سهام تعریف شده استفاده شده

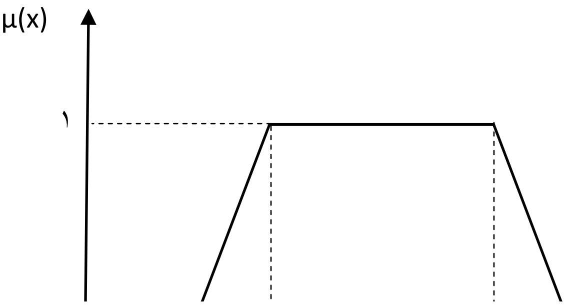
است. بر اساس نوع عدم قطعیت، برنامه‌ریزی ریاضی فازی می‌تواند به دو بخش تقسیم شود (مولا و همکاران، ۲۰۰۶؛ زهیری و همکاران، ۲۰۱۴): برنامه‌ریزی منعطف[۱] و برنامه‌ریزی امکانی[۲]. در این پژوهش ما با هر دو دسته از این برنامه‌ریزی‌ها روبرو هستیم.

۳-۱- مقدمات و تعاریف

در این‌جا ابتدا مقدمات و تعاریفی را در رابطه با برنامه‌ریزی ریاضی فازی مطرح می‌کنیم. ξ یک عدد فازی است زمانی که $\xi \in F(R)$ نرمال و مجموعه فازی محدب R باشد. این اعداد به مقادیر امکانی وابسته هستند که دامنه این مقادیر وزن $[0,1]$ است. این وزن تابع عضویت نامیده می‌شود و تابع عضویت ξ را با $\mu_{\xi}(x)$ نشان می‌دهند. سطح اطمینان γ از عدد فازی به صورت $[\xi]^{\gamma} = \{x \in \mathrm{R} | \mu_{\xi}(x) \geq \gamma\}, \gamma \in [0,1]$ نشان داده می‌شود. ξ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است هرگاه به صورت $\xi = (\xi(1), \xi(2), \xi(3), \xi(4))$ بیان شود و تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \xi(1), x \geq \xi(4) \\ \dfrac{x-\xi(1)}{\xi(2)-\xi(1)}, & \xi(1) \leq x \leq \xi(2) \\ 1, & \xi(2) \leq x \leq \xi(3) \\ \dfrac{\xi(4)-x}{\xi(4)-\xi(3)}, & \xi(3) \leq x \leq \xi(4) \end{cases} \quad (۱۱)$$

شکل ۱ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد. عدد فازی مثلثی نوع خاصی از ذوزنقه‌ای می‌باشد که در آن $\xi(2) = \xi(3)$ است. برای آشنایی بیشتر با روش فازی به (ساکاوا، ۲۰۱۳) رجوع کنید.



شکل (۱). توزیع امکانی عدد فازی ذوزنقه‌ای

۳-۲- برنامه‌ریزی منعطف

برنامه‌ریزی منعطف برای حالتی است که در ارضای محدودیت و یا دستیابی به مقادیر هدف توابع هدف، انعطاف وجود دارد. در مسئله سبد سهام ارائه شده، محدودیت (۷)، یک محدودیت منعطف است. این محدودیت بدین معنی است که سرمایه‌گذار مقدار دقیقی را برای حد بالا و پایین وزن هر سهم تعیین نمی‌کند و امکان دارد که این حدود دارای انحرافات جزئی باشند، که این انحرافات در این محدودیت مدل می‌شود. این محدودیت یک محدودیت منطقی و کاربردی است چرا که سرمایه‌گذاران در عمل یک حد دقیق برای محدودیت وزن هر سهم تعیین نمی‌کنند. این محدودیت را می‌توان به صورت زیر تفکیک کرد:

$$\begin{aligned} x_i &\tilde{\leq} um_i \\ x_i &\tilde{\geq} lm_i \end{aligned} \quad (۱۲)$$

---

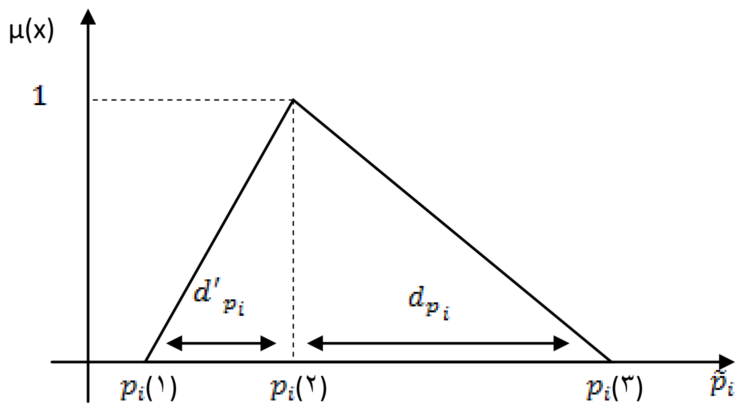
[۱] Flexible Programming

[۲] Possibilistic Programming

برای مقابله با چنین عدم قطعیتی می‌توان از روش پیدرو و همکاران (۲۰۰۹) استفاده کرد که محدودیت‌های منعطف را به محدودیت‌های ساده تبدیل می‌کند. بنابراین طبق روش وی، معادله ۱۲ قابل تبدیل به معادلات زیر است.

$$x_i \tilde{\leq} um_i \rightarrow x_i \leq um_i + \left(p_i(2) + \frac{d_{p_i} - d'_{p_i}}{3} \right)(1-\gamma)$$
$$x_i \tilde{\geq} lm_i \rightarrow -x_i \tilde{\leq} -lm_i \rightarrow x_i \geq lm_i - \left(p_i(2) + \frac{d_{p_i} - d'_{p_i}}{3} \right)(1-\gamma) \quad (۱۳)$$

فرم معادله فوق، قطعی بوده و پارامتر عدم قطعیتی در آن ملاحظه نمی‌شود. در این معادله، $p_i(2)$ نقطه مرکزی عدد فازی مثلثی و d'_{p_i} و d_{p_i} به ترتیب حاشیه‌های چپ و راست آن است (شکل ۲، عدد فازی مثلثی را نشان می‌دهد).



شکل (۲). توزیع امکانی عدد فازی مثلثی

۳-۳- برنامه‌ریزی امکانی

برنامه‌ریزی امکانی برای حالتی است که عدم قطعیت شناختی در داده‌های مسئله وجود دارد.

۳-۳-۱- میانگین و واریانس امکانی در مسئله سبد سهام

همان‌گونه که گفته شد، بازده سهام دارای عدم قطعیت است و در این جا برای روبرویی با عدم قطعیت در مورد بازده از عدد فازی ذوزنقه‌ای استفاده شده است. بنابراین بازده سهم iام را می‌توان به صورت $r_i = (r_i(1), r_i(2), r_i(3), r_i(4)), i = 1,\dots,n$ نشان داد. کارلسون و همکاران (۲۰۰۲)، میانگین و واریانس امکانی را برای سبد سهام به دست آوردند. معادلات میانگین و واریانس امکانی با توجه به ذوزنقه‌ای بودن عدد فازی به صورت زیر است:

$$E(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[r_i(1) + r_i(2) + \frac{1}{3}\left(r_i(4) - r_i(3) - r_i(2) + r_i(1)\right) \right] x_i \quad (۱۴)$$

$$Var(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[r_i(2) - r_i(1) + \frac{1}{3}(r_i(2) - r_i(1) + r_i(4) - r_i(3)) \right] x_i \right)^2 +$$
$$\frac{1}{72}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(r_i(2) - r_i(1) + r_i(4) - r_i(3)\right) x_i \right)^2 \quad (۱۵)$$

در (بازارا و همکاران، ۲۰۰۶) اثبات محدب بودن معادلاتی مشابه معادله واریانس فوق آورده شده است و بر این اساس نتیجه می‌گیریم که این تابع یک تابع محدب است.

۳-۴- برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی[۱] توسط چارنز و همکاران (۱۹۵۵) برای اولین بار ارائه گردید و سپس توسط ایجیری (۱۹۶۵) به مسائل تصمیم‌گیری مالی تعمیم داده شد. برنامه‌ریزی آرمانی نوع خاصی از برنامه‌ریزی ریاضی است که دارای توابع چندهدفه است. برنامه‌ریزی آماری اختلاف بین مقدار مطلوب و مقدار واقعی نتایج را کم می‌کند. در این مقاله از این نوع برنامه‌ریزی استفاده شده است تا بتوان مسئله چندهدفه مورد بررسی را به یک مسئله ساده تبدیل کرد، بنابراین می‌توان معادله‌های ۲۲و۲۳ را به یک تابع هدف به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
& Max\ E\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) - \rho\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{+} + d_i^{-}\right) \\
& s.t: \\
& var\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} d_i^{-} - \sum_{i=1}^{n} d_i^{+} = G \\
& d_i^{-}, d_i^{+}, x_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

مقدار مطلوب واریانس همواره صفر است و واریانس همواره یک عدد مثبت است، بنابراین با استفاده از $G = 0, d_i^{-} = 0, and\ d_i^{+} \geq 0$ می‌توان معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
& Max\ E\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) - \rho\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{+}\right) \\
& s.t: \\
& var\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} d_i^{+} = 0 \\
& d_i^{+}, x_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

بنابراین در نهایت می‌توان مسئله سبد سهام پیشنهادی را به صورت زیر نوشت:

[۱] Goal Programming

$$
\begin{aligned}
& Max\ E\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) - \rho\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{+}\right) \\
& s.t: \\
& var\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} d_i^{+} = 0 \\
& x_i \le um_i + \left(p_i(2) + \frac{d_{p_i} - d'_{p_i}}{3}\right)(1-\gamma) \\
& x_i \ge lm_i - \left(p_i(2) + \frac{d_{p_i} - d'_{p_i}}{3}\right)(1-\gamma) \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& \sum_{i=1}^{n} m_i = N \\
& x_i \ge 0, i = 1,\dots,n \\
& m_i \in \{0,1\}, i = 1,\dots,n \\
& 0.5 < \gamma \le 1
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

که در آن γ سطح اطمینان محدودیت شانسی در فرمول فوق می‌باشد که توسط تصمیم‌گیرنده مقدار آن باید تعیین گردد.

۴- یافته‌های پژوهش

در این‌جا بازده ۳۰ شرکت از بورس اوراق بهادار تهران، در ماه آبان سال ۱۳۹۳، برای اجرای مدل در نظر گرفته شده‌اند. روش‌های مختلفی برای تبدیل داده‌های تاریخی به اعداد فازی در مرور ادبیات وجود دارد که در این‌جا از روش آزاده و همکاران (۲۰۱۰) استفاده شده است. همچنین اعداد فازی مثلثی برای انحرافات وزن سهام در سبد، طبق نظر خبرگان و سرمایه‌گذاران در مورد هر سهام مشخص شد. بنابراین در جدول ۱ نمادهای در نظر گرفته شده از بورس تهران به همراه عددفازی انحراف وزن آن‌ها در سبد و عدد فازی بازده آن‌ها در یک ماه، آورده شده است.

جدول (۱). بازده و انحرافات وزن در سبد برای هر سهم به صورت عدد فازی

نماد شرکت پذیرفته شده در بورس تهران	انحراف وزن سهام در سبد $(p_i(1), p_i(2), p_i(3))$	بازده سهام (٪) $(r_i(1), r_i(2), r_i(3), r_i(4))$
پتایر	(۰،۰,۰۱،۰,۰۵)	(۳,۲۶،۵,۲،۶,۴،۸,۹۵)
خودرو	(۰،۰,۰۵،۰,۱)	(۱۷,۰۴،۲۲,۸۲،۲۳,۶۳،۲۹,۲۵)
رتاپ	(۰،۰,۰۲،۰,۰۳)	(-۰,۶۹،۰,۶۷،۱,۷۴،۳,۷)
رانفور	(۰،۰,۰۵،۰,۰۷)	(-۰,۷۴،۱,۰۹،۴,۶۱،۶,۳۷)
رمپنا	(۰،۰,۰۴،۰,۰۶)	(۵,۷۴،۱۲,۴۳،۱۶,۸۸،۲۲,۲۳)
ساراب	(۰،۰,۰۳،۰,۰۸)	(-۰,۱۹،۴,۰۴،۴,۱۰،۸,۲۷)
سشرق	(۰،۰,۰۵،۰,۰۹)	(-۱,۶۹،۳,۸۲،۴,۰۵،۹,۳۴)
شاراک	(۰،۰,۰۳،۰,۰۷)	(-۹,۹۲,-۷,۱,-۲,۳۲,-۱,۳۳)
شاملا	(۰،۰,۰۶،۰,۱)	(۱,۶۳،۷,۶۵،۲۹,۶۷،۳۳,۵۳)
غالبر	(۰،۰,۰۴،۰,۰۶)	(-۵,۶۷,-۲,۶،۸,۷۷،۱۱,۸۵)
فاذر	(۰،۰,۰۱،۰,۰۴)	(۲۱,۴۲،۲۷,۴۲،۵۴,۸۷،۶۴,۶۷)

فلوله	(۰،۰,۰۷،۰,۰۹)	(-۱۰,۳۲,-۶,۹۱,-۵,۸,-۱,۲۹)
قشهد	(۰،۰,۰۴،۰,۰۷)	(-۹,۲۴,-۷,۳۹,-۱,۴۲،۰,۱۲)
کاذر	(۰،۰,۰۵،۰,۱۱)	(۴,۰۵،۱۱,۷۲،۱۳,۴۱،۱۹,۴)
کفرا	(۰،۰,۰۴،۰,۰۵)	(-۴,۲۳,-۰,۱۳،۱,۶۹،۵,۷۷)
کگاز	(۰،۰.۰۶،۰,۱)	(۸,۷۱،۱۴,۳۹،۱۹,۵۵،۲۱,۸)
لخزر	(۰،۰,۰۳،۰,۰۹)	(-۳,۷۳،۱,۲۴،۱۳,۳۹،۱۶,۴۵)
ملت	(۰،۰,۰۷،۰,۰۹)	(-۴,۱۴،۱,۵۴،۶,۲۷،۷,۵۲)
واتی	(۰،۰,۰۴،۰,۰۷)	(۱۶,۰۵،۲۶,۳،۲۶,۸،۳۷,۶۳)
وبصادر	(۰،۰,۰۷،۰,۱۵)	(۶,۶۴،۱۴,۵۵،۱۹,۵۴،۲۵,۵۲)
اخابر	(۰،۰,۰۳،۰,۰۸)	(۱,۲۶،۵,۷۳،۸,۱۵،۱۰,۷۲)
بتراس	(۰،۰,۰۵،۰,۰۹)	(۳,۱،۱۰,۳۴،۲۱,۶۴،۲۵.۴۹)
بکاب	(۰،۰,۰۲،۰,۰۶)	(-۱۰,۶۹,-۰,۱۷،۹,۵۷،۱۴,۸)
توریل	(۰،۰,۰۴،۰,۰۹)	(-۰,۴۷،۴,۲۳،۶,۱۱،۹,۲۳)
حسینا	(۰،۰,۰۴،۰,۱۲)	(-۱,۵۹،۲,۴۷،۵,۶۷،۱۰)
کرمان	(۰،۰,۰۷،۰,۱)	(۲۱,۷۹،۵۳,۶۱،۱۲۸,۳۱،۱۳۹,۵۲)
مارون	(۰،۰,۰۵،۰,۱)	(۵,۲۳،۶,۹۳،۹,۴۸،۱۰,۱۱)
کی بی سی	(۰،۰,۰۶،۰,۰۸)	(-۹,۶۹,-۷,۲,-۵,۰۴,-۱,۰۷)
ستران	(۰،۰,۰۳،۰,۰۷)	(-۱,۵۳،۴,۱۴،۱۵,۹۶،۲۰,۵۵)
افرا	(۰،۰,۰۷،۰,۱۴)	(-۹,۱۸,-۶,۷۵,-۴,۳۳،۰,۳۶)

برای اجرای مدل و کدنویسی مسئله از نرم‌افزار گمز[۱] استفاده شده است. کاناپت[۲] به عنوان سالور[۳] برای حل مدل غیرخطی ارائه شده استفاده شده است. در این‌جا مسئله با دو مقدار مختلف برای سطح اطمینان γ اجرا شده است. دو مقدار ۰/۷ و ۰/۸ برای مقادیر γ انتخاب شدند که نتایج آن با هم مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است به دلیل آن که به ازای مقادیر بالاتر از ۰/۸ جواب مدل به مراتب بدتر شد از ارائه آن نتایج پرهیز شد، همچنین مقادیر کمتر از ۰/۷ برای تصمیم‌گیرنده جذابیت ندارد. جدول ۲ نتایج حاصل از اجرای مدل در دو مقدار متفاوت از سطح اطمینان γ را نشان می‌دهد که در آن سهام انتخابی و مقدار وزن آن‌ها در سبد مشخص است.

جدول (۲). عملکرد مدل تحت داده‌های اسمی

$\gamma = 0.7$			$\gamma = 0.8$		
نام سهام	وزن سهام در سبد		نام سهام	وزن سهام در سبد	
خودرو	۰/۲۲۹		خودرو	۰/۲۹	
فاذر	۰/۴۷۱	Z= ۲۲/۳۶۴	فاذر	۰/۳۵۱	Z= ۲۱/۹۰۲
واتی	۰/۱۵۵	Var=۲۲/۰۰۱	واتی	۰/۲۱۲	Var= ۲۲/۱۰۹
کرمان	۰/۱۳۹		کرمان	۰/۱۴۷	

در جدول فوق مقدار وزن هرکدام از سهم‌ها در دو مقدار مختلف سطح اطمینان به دست آمده است. همچنین مقدار واریانس و تابع هدف که ترکیبی از بازده و واریانس است نیز در جداول فوق نشان داده شده‌اند. برای اعتبارسنجی و مقایسه روش‌ها نمی‌توان به نتایج بالا استناد کرد و باید در واقعیت آن‌ها را با هم مقایسه کرد، اما از آن‌جا که مقایسه در واقعیت هم وقت‌گیر است و هم هزینه‌بر، لذا می‌توان از راه‌کار ماشین زمان استفاده کرد. ماشین زمان برای ما واقع نمایی[۴] می‌کند و بدین صورت زمان را به جلو می‌برد و نتایج حاصل از مدل‌ها را برای ما به صورت واقعیت اتفاق افتاده در

---

[۱] GAMS
[۲] CONOPT
[۳] Solver
[۴] Realization

می‌آورد. بدین صورت در این‌جا ۱۰ واقع نمایی برای مقایسه انجام می‌گیرد. زمانی که ما با عدد ذوزنقه‌ای کار می‌کنیم می‌توانیم عدد ξ^{real} از توزیع یکنواخت $[\xi(1),\xi(2)]$ انتخاب کرد. بنابراین فرم مسئله بهینه سازی تحت شرایط واقع نمایی به فرم زیر تغییر پیدا می‌کند:

$$\begin{aligned}
&Max \sum_{i=1}^{n} r_i^{real} x_i^{*} - \rho\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{+}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} R_i^{u}\right) - \omega\left(\sum_{i=1}^{n} R_i^{l}\right)\\
&s.t:\\
&var\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{real} x_i^{*}\right) - d_i^{+} = 0\\
&x_i^{*} \le u m_i^{*} + p_i^{real} + R_i^{u}\\
&x_i^{*} + R_i^{l} \ge l m_i^{*} - p_i^{real}\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i^{*} = 1\\
&\sum_{i=1}^{n} m_i^{*} = N\\
&R_i^{u}, R_i^{l} \ge 0, i = 1,\dots,n
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که در معادلات فوق R_i^{l}, R_i^{u} نشان‌دهنده انحراف از محدودیت‌ها تحت واقع نمایی هستند. حال برای مقایسه دو مدل می‌توان از شاخص عملکرد این واقع‌نمایی‌های انجام شده استفاده کرد که در این‌جا از شاخص عملکرد میانگین و انحراف معیار استفاده شده است. نتایج حاصل از واقع-نمایی، میانگین و انحراف معیار دومدل در جدول ۳ نمایش داده شده است.

جدول (۳). عملکرد مدل‌ها تحت واقع‌نمایی

مدل / تکرار	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	میانگین	انحراف استاندارد
$\gamma = 0.7$	۳۰/۴۴	۲۱/۶۶	۲۶/۴۸	۳۰/۲۴	۲۰/۵۶	۳۲/۰۳	۱۸/۴۴۳	۲۶/۸۶	۱۶/۵۷	۲۷/۱۳	۲۵/۰۴۳	۴/۸۷۶
$\gamma = 0.8$	۲۱/۴۲	۲۱/۴۲	۳۱/۷	۱۷/۴۲	۱۶/۰۴	۱۳/۹۱	۲۴/۰۸۲	۲۳/۸۳۲	۲۷/۲۹۹	۱۲/۸۵۷	۲۱/۰۰	۵/۴۴۳

مشخص است که در واقع‌نمایی، معیارهای عملکرد برتری سطح اطمینان ۰/۷ را تایید می‌کنند، چرا که همانطور که در جدول ۳ نیز مشاهده می‌شود میانگین مقدار تابع هدف مدل ۰/۷ در تکرارهای واقع‌نمایی بالاتر از میانگین مدل ۰/۸ است و همچنین انحراف استاندارد مدل ۰/۷ از مدل رقیب کمتر است که این معیار نیز به برتری این مدل اشاره دارد. این نتایج نشان می‌دهد که برای تصمیم‌گیری در مورد سبد سهام، اگر بتوان سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده را مقدار ۰/۷ قرار داد، آن‌گاه می‌توان با ریسک کمتر، انتظار بازده سود بالاتری را داشت.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

مسئله سبد سهام همواره یکی از جذاب‌ترین مسائل در زمینه مالی به حساب می‌آید که با انتخاب سهام و تخصیص وزن سبد، سر و کار دارد. در این پژوهش یک مسئله سبد سهام تعریف گردید که یک مسئله چندهدفه و یک دوره‌ای بود. همچنین در مسئله بیان‌شده محدودیت‌هایی منطقی نظیر انعطاف در وزن سهام و تعداد سهم در سبد سهام لحاظ شدند. بازده سهام به عنوان یک متغیر که دارای عدم قطعیت است در نظر گرفته شد و برای رفع عدم قطعیت در مدل، از رویکرد فازی استفاده شد. برای اجرای مسئله سبد سهام معرفی شده، نمونه‌ای از شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفته شد. نتایج برای دو مقدار متفاوت از سطح اطمینان محدودیت شانسی ارائه گردید.

پژوهش‌های آینده زیادی در این حوزه می‌تواند پیشنهاد شود که از جمله آن‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد: ۱) استفاده از بهینه‌سازی استوار به جای رویکرد فازی در برخورد با عدم قطعیت، ۲) استفاده از رویکرد بیان شده برای مسئله‌های سبد سهام متفاوت، نظیر سبد سهام چند

دوره‌ای، ۳) استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای برخورد با چند هدفه بودن مسئله و ۴) استفاده از روش‌های فراابتکاری برای حل مسئله ارائه شده.

منابع و مراجع

[۱] افشارکاظمی، م. خلیلی عراقی، م. سادات کیایی، ا. (۱۳۹۱) "انتخاب سبد سهام در بورس اوراق بهادار تهران با تلفیق روش تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی آرمانی"، فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، شماره ۱۳.

[۲] امیری، م. شریعت‌پناهی، م. بناکار، م. (۱۳۸۹) " انتخاب سبد سهام بهینه با استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره"، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۱۱، صفحات ۵-۲۴.

[۳] خالوزاده، ح. امیری، ن. (۱۳۸۵) " تعیین سبد سهام بهینه در بازار بورس ایران بر اساس نظریه ارزش در معرض ریسک"، مجله تحقیقات اقتصادی، شماره ۷۳، صفحات ۲۱۱-۲۳۱.

[۴] خدامرادی، س. ترابی گودرزی، م. راعی عزآبادی، م. " رویکرد دو مرحله‌ای ریاضی در بهینه‌سازی سبد سهام"، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادر، شماره ۱۴.

[۵] خیامیم، آ. میرزازاده، ا. نادری، ب. (۱۳۹۳) " یک مدل فازی برای به روز رسانی پورتفوی با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملات: پیاده‌سازی در بورس اوراق بهادار تهران"، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، شماره ۲، صفحات ۷۵-۹۳.

[۶] درخشان، م. گل مکانی، ح. حنفی‌زاده، پ. (۱۳۹۱) " رویکردی فراابتکاری برای انتخاب سبد سهام با اهداف چندگانه در بورس اوراق بهادار تهران"، نشریه بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید، شماره ۳، صفحات ۳۱۷-۳۳۱.

[۷] قندهاری، م. فغانی، ف. طباطبایی، س. م. (۱۳۹۱) " مدل‌سازی آرمانی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه با گشتاورهای بالا"، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، شماره ۴، صفحات ۵۵-۶۹.

[۸] گرکز، م. عباسی، ا. مقدسی، م. (۱۳۸۹) "انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک بر اساس تعاریف متفاوتی از ریسک"، فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی دانشگاه آزاد اسلامی، شماره ۱۱.

[۹] Azadeh, A., Ebrahim, R. M. and Eivazy, H. (۲۰۱۰) 'Parameter optimization of tandem queue systems with finite intermediate buffers via fuzzy simulation', *Performance Evaluation*, ۶۷(۵), pp. ۳۵۳-۳۶۰.

[۱۰] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C.(۲۰۰۶)' Nonlinear Programming'; Wiley.

[۱۱] Cadenas, J. M., Carrillo, J. V., Garrido, M. C., Ivorra, C. and Liern, V. (۲۰۱۲) 'Exact and heuristic procedures for solving the fuzzy portfolio selection problem', *Fuzzy Optimization and Decision Making*, ۱۱(۱), pp. ۲۹-۴۶.

[۱۲] Carlsson, C., Fullér, R. and Majlender, P. (۲۰۰۲) 'A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score', *Fuzzy sets and systems*, ۱۳۱(۱), pp. ۱۳-۲۱.

[۱۳] Charnes, A., Cooper, W. W. and Ferguson, R. O. (۱۹۵۵) 'Optimal estimation of executive compensation by linear programming', *Management science*, ۱(۲), pp. ۱۳۸-۱۵۱.

[۱۴] Deng, X. and Zhao, J.-f. (۲۰۱۳) 'Some new results on value ranges of risks for mean–variance portfolio models', *Information Sciences*, ۲۳۴, pp. ۲۱۷-۲۲۵.

[۱۵] Duan, L. and Stahlecker, P. (۲۰۱۱) 'A portfolio selection model using fuzzy returns', *Fuzzy Optimization and Decision Making*, ۱۰(۲), pp. ۱۶۷-۱۹۱.

[۱۶] Huang, X. (۲۰۱۰) 'Mean-risk model for uncertain portfolio selection' , *Fuzzy Optimization and Decision Making*, ۱۰ , pp. ۷۱-۸۹.

[۱۷] Huang, X. and Qiao, L. (۲۰۱۲) 'A risk index model for multi-period uncertain portfolio selection', *Information Sciences*, ۲۱۷, pp. ۱۰۸-۱۱۶.

[۱۸] Ijiri, Y. (۱۹۶۵) *Management goals and accounting for control*. North Holland Pub. Co.

[۱۹] Liu, Y.-J. and Zhang, W.-G. (۲۰۱۳) 'Fuzzy portfolio optimization model under real constraints', *Insurance: Mathematics and Economics*, ۵۳(۳), pp. ۷۰۴-۷۱۱.

[۲۰] Markowitz, H. (۱۹۵۲) 'Portfolio selection*', *The journal of finance*, ۷(۱), pp. ۷۷-۹۱.

[۲۱] Mula, J., Poler, R. and Garcia, J. (۲۰۰۶) 'MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach', *Fuzzy Sets and Systems*, ۱۵۷(۱), pp. ۷۴-۹۷.

[۲۲] Peidro, D., Mula, J., Poler, R. and Verdegay, J.-L. (۲۰۰۹) 'Fuzzy optimization for supply chain planning under supply, demand and process uncertainties', *Fuzzy Sets and Systems*, ۱۶۰(۱۸), pp. ۲۶۴۰-۲۶۵۷.

[۲۳] Sakawa, M. (۲۰۱۳) *Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization*. Springer Publishing Company, Incorporated.

[۲۴] Wu, X.-L. and Liu, Y.-K. (۲۰۱۲) 'Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming', *Fuzzy Optimization and Decision Making*, ۱۱(۴), pp. ۴۱۱-۴۴۹.

[۲۵] Zadeh, L. A. (۱۹۷۳) 'Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes', *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (۱), pp. ۲۸-۴۴.

[۲۶] Zahiri, B., Tavakkoli-Moghaddam, R. and Pishvaee, M. S. (۲۰۱۴) 'A robust possibilistic programming approach to multi-period location–allocation of organ transplant centers under uncertainty', *Computers & Industrial Engineering*, ۷۴, pp. ۱۳۹-۱۴۸.

[۲۷] Zhang, P. and Zhang, W.-G. (۲۰۱۴) 'Multiperiod mean absolute deviation fuzzy portfolio selection model with risk control and cardinality constraints', *Fuzzy Sets and Systems*, ۲۵۵, pp. ۷۴-۹۱.

[۲۸] Zhou, R., Yang, Z., Yu, M. and Ralescu, D. A. (۲۰۱۵) 'A portfolio optimization model based on information entropy and fuzzy time series', *Fuzzy Optimization and Decision Making*, pp. ۱-۱۷.