



روشی موثر برای کاهش زمان محاسباتی در تحلیل غیرخطی سازه‌ها

ایمان منصوری^۱، صادق اعتدالی^۲

۱- عضو هیأت علمی، دانشگاه صنعتی بیرجند، mansouri@birjandut.ac.ir

۲- عضو هیأت علمی، دانشگاه صنعتی بیرجند

چکیده

امروزه جهت آنالیز سازه‌ها به ندرت از تحلیل‌های خطی استفاده می‌شود چرا که تحلیل‌های خطی دارای فرضیاتی می‌باشد که بیش از حد رفتار واقعی سازه را ساده سازی می‌کند، ضمن اینکه در بارهای نزدیک بار نهایی دیگر فرضیات تحلیل‌های خطی برقرار نمی‌باشد. بنابراین در بسیاری از موارد تحلیل‌های غیر خطی جایگزین تحلیل‌های خطی شده‌اند. سیستم‌های غیرخطی معمولاً توسط روش‌های نموی-تکراری حل می‌شوند. زمان بر بودن محاسبات مشکل اساسی اغلب این روش‌ها است. در حالتی که تعداد درجات آزادی سازه زیاد باشد، تعداد تکرارها و به طبع آن زمان محاسبات افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. در این مقاله، روشی مورد بررسی قرار گرفته و رابطه سازی آن جهت استفاده از این روش در تحلیل غیر خطی سازه‌ها ارائه گردیده است. با ارائه نتایج عددی سعی شده است دقت و کارایی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گیرد. نتایج نشان می‌دهد که، بکارگیری این روش، با کاهش تعداد تکرارها موجب کاهش در حجم و زمان محاسبات می‌گردد.

کلمات کلیدی: تحلیل غیرخطی، روش‌های نموی-تکراری، زمان محاسباتی

۱- مقدمه

در رابطه با تحلیل استاتیکی غیرخطی سازه‌ها برای اولین بار ماتریس سختی مماسی در دستگاه اویلرین با استفاده از تئوری تیر - ستون بدون در نظر گرفتن اندرکنش خمش و پیچش توسط Oran در سال ۱۹۷۳ [۱] ارائه شده است. در مطالعات وی اثرات انحناء در تغییر طول محور عضو منظور شده است. همچنین Oran ماتریس راهنمای گرهی برای دوران‌های کوچک گره‌ها را نیز معرفی کرده است، لیکن ماتریس ارائه شده متعامد نبوده و خطاهای عددی در محاسبات ایجاد می‌کند. مقدار دقیق ماتریس راهنمای گرهی توسط Kassimali [۲، ۴] توسعه داده شده است، این مراجع از دستگاه مختصات لاگرانژین استفاده کرده‌اند. به طوریکه اثرات دوران‌های بزرگ اعضای سازه در محاسبات مربوط به روابط نیرو - تغییر مکان منظور شده است [۳، ۶، ۵]. Abbasnia در سال ۱۹۹۵ [۷] رابطه‌سازی مناسبی جهت تحلیل غیرخطی قابهای ۳ بعدی با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های بزرگ و رفتار غیرخطی مواد ارائه کرده است. در بعضی مراجع دیگر نقاط حدی بر روی مسیر ایستایی حاصل از رفتار غیرخطی سازه را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۸]. در برخی مطالعات، براساس دستگاه مختصات لاگرانژین بهنگام شده، رفتار غیرخطی هندسی و مواد را برای المان تیر - ستون ارائه کرده‌اند [۹]. در مراجع اخیر، برای حل معادلات غیرخطی از روش نموی - تکراری، نیوتن رافسون استفاده نموده‌اند. لازم به ذکر است، روش نیوتن - رافسون علاوه بر صرف زمان و هزینه‌ی زیاد، در عبور از نقاط حدی ناتوان است. برای رفع این مشکل، روش‌های نموی

- تکراری پیشرفته از آغاز دهه‌ی هفتاد میلادی مورد توجه محققین قرار گرفته است. به طوریکه در سال 1971 Wampher و بعد از او Riks در سال ۱۹۷۹ محدودی تکرار را با شعاع ثابت و بر روی یک صفحه‌ی فرضی قائم پیشنهاد کرده‌اند [۱۱،۱۰]. بر همین اساس Crisfield و Ramm در مقالاتی جداگانه، روش نمودی - تکراری را براساس مسیر طول قوس ارائه دادند. روش اخیر به طور چشمگیری، مورد توجه قرار گرفته و در اغلب الگوریتم‌های نرم‌افزارهای تحلیل غیرخطی استفاده شده است. زیرا در روش طول قوس، علاوه بر کاهش زمان مورد نیاز برای انجام روند تکرار، توانایی عبور از نقاط حدی را نیز فراهم کرده است [۱۲،۱۳،۱۴]. در سال ۱۹۸۹ روند نیوتن - رافسون اصلاح شده جهت تحلیل غیرخطی، به روش پلاستیسیته گسسته توسط Zienkiewicz و Taylor [۱۵] ارائه شده است. در مطالعه‌ی اخیر، با استفاده از تکنیک نمودی - تکراری اصلاح شده جهت هر مرحله‌ی تحلیل، ماتریس سختی مماسی فقط در شروع گام بارگذاری تشکیل می‌گردد و تا پایان مرحله‌ی تصحیح، ثابت می‌ماند. بنابراین، سرعت تحلیل افزایش می‌یابد، لیکن روند تحلیل در گذر از نقطه‌های حدی رفتارهای غیرخطی پیچیده، موفق نخواهد بود [۱۵]. Clarke و Hancock [۱۶] نیز، براساس روش طول قوس، روند تکراری جدیدی را پیشنهاد کرده‌اند. در روش‌های تحلیل غیرخطی سازه‌ها، شکل آشکار و صریحی از حل دستگاه معادلات غیرخطی وجود ندارد و به این سبب توسط محققان روش‌های عددی گوناگونی برای حل این معادله‌ها ارائه شده است. باید افزود نقطه‌های حدی و همچنین برگشت‌های مسیر در منحنی بار - تغییر مکان سازه نقش بسزایی در الگوی تحلیل خواهند داشت. به طوریکه برخی از الگوها در هنگام عبور از این نقاط ناتوان بوده و قادر به ارائه‌ی رفتار واقعی سازه نخواهند بود. از میان روش‌های گوناگون حل دستگاه معادلات غیرخطی، تکنیک نمودی - تکراری نیوتن - رافسون بیشترین کاربرد را دارد [۱۷]. اما این روش در تحلیل سازه‌های بزرگ نیازمند هزینه و صرف زمان زیاد خواهد بود و از طرفی هنگام گذر از نقاط حدی دچار واگرایی می‌شود. زیرا در سازه‌های با رفتار پیچیده، منحنی بار - تغییر مکان ترکیبی از حالت‌های نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی با نقاط حدی است. در نتیجه تحلیل چنین سازه‌هایی با روش‌های نمودی - تکراری ساده میسر نمی‌باشد.

روش‌های نمودی - تکراری ساده به صورت نمودی یا نمودی جابه‌جایی انجام می‌شود. در روش نمودی به دلیل ثابت بودن تراز بار امکان گذر از نقاط حدی بار وجود نداشته و همچنین در صورتی که سختی بار - تغییر مکان دارای تغییرات شدید باشد، تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی تحلیل آنها افزایش می‌یابد. از سوی دیگر به طور مشابه، در روش نمودی جابه‌جایی مشکل عبور از نقاط حدی جابه‌جایی وجود خواهد داشت. برای رفع این مشکل روش‌های تحلیل پیشرفته به وجود آمده‌اند. در این روش‌ها نیاز به استفاده از یک معادله‌ی کمکی در حل معادله‌ی ایستایی خواهد بود. جهت نوشتن این رابطه، روش‌های گوناگونی از جمله روش Wampner [۱۰]، روش Riks [۱۱]، روش Crisfield [۱۲ و ۱۳] در روش فورد و همکاران [۱۸] و یا روش Al-Rasby [۱۹] ساختار روش‌های نمودی - تکراری پیشرفته بر پایه‌ی روش طول قوس است. بر این اساس مطابق ضریب بار بدست آمده در هر تکرار، تراز بار به طور مناسبی به سوی منحنی مسیر ایستایی برگردانده می‌شود. این کار تا آنجا ادامه می‌یابد که همگرایی با دقت قابل قبولی حاصل شود. در این روش‌ها، برخلاف روش‌های نمودی - تکراری ساده امکان عبور از نقاط حدی وجود دارد. از معایب روش‌های نمودی - تکراری پیشرفته‌ی موجود ناتوانی عبور از نقطه‌ی حدی در حالت رفتار غیرخطی شدید است [۱۴،۸].

در این مقاله روش Quasi minimal residual (QMR) جهت افزایش سرعت تحلیل غیرخطی استاتیکی در هر گام بارگذاری جهت رسیدن به منحنی تعادل ارائه می‌گردد.

۲- معادلات غیرخطی هندسی

شکل ۱ میله ای با سطح مقطع A و مدول یانگ E که تحت بار F به اندازه V جابجا شده را نشان می دهد. رابطه ی زیر بر اساس معادله تعادل در امتداد قائم بدست آمده است:

$$F = Q \sin \theta = \frac{Q(Z+V)}{L'} \cong \frac{Q(Z+V)}{L} \quad (1)$$

که در آن Q نیروی محوری میله می باشد و فرض شده است که زاویه ی θ کوچک می باشد. بنابر قضیه ی فیثاغورث تغییر طول نسبی میله برابر است با:

$$\epsilon = \frac{((Z+V)^2 + L^2)^{\frac{1}{2}} - (Z^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}}{(Z^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

$$\epsilon \cong \left(\frac{Z}{L}\right)\left(\frac{V}{L}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{L}\right)^2 \quad (3)$$

با توجه به اینکه رابطه ی (۳) تقریبی می باشد آن را می توان در محدوده ی ارتجاعی خرابی کم ارتفاع (θ کوچک) و برای نشان دادن روند حل غیر خطی بکار گرفت. از رابطه ی (۳) نیروی محوری میله را می توان بصورت زیر بدست آورد:

$$Q = EA\epsilon = EA\left(\left(\frac{Z}{L}\right)\left(\frac{V}{L}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{L}\right)^2\right) \quad (4)$$

با استفاده از معادله ی (۱) رابطه ی بین نیروی خارجی F و تغییر مکان V حاصل می شود

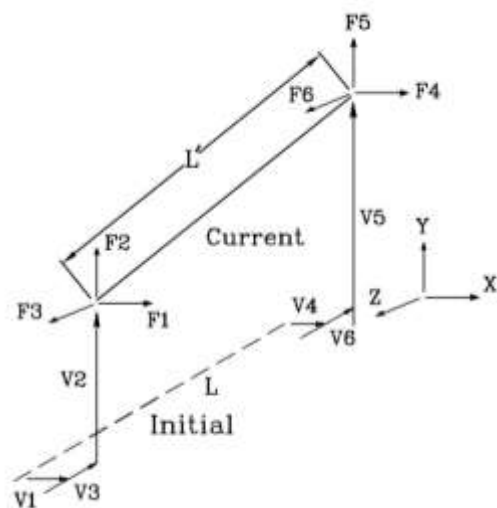
$$F = \frac{EA}{L^3} \left(Z^2 V + \frac{3}{2} Z V^2 + \frac{1}{2} V^3 \right) \quad (5)$$

در تحلیل غیرخطی، ماتریس سختی مماسی، دقیقاً نقش ماتریس سختی را در تحلیل خطی ایفا می کند تنها فرق آن این است که ماتریس مماسی تغییرات کوچک بار را به تغییرات کوچک تغییر مکان ربط می دهد. در این حالت ماتریس سختی مماسی عبارتست از مقدار عددی dF/dV که با روابط قبلی قابل محاسبه است.

$$K_t = \frac{dF}{dV} = \left(\frac{Z+V}{L}\right) \frac{dQ}{dV} + \frac{Q}{L} \quad (6)$$

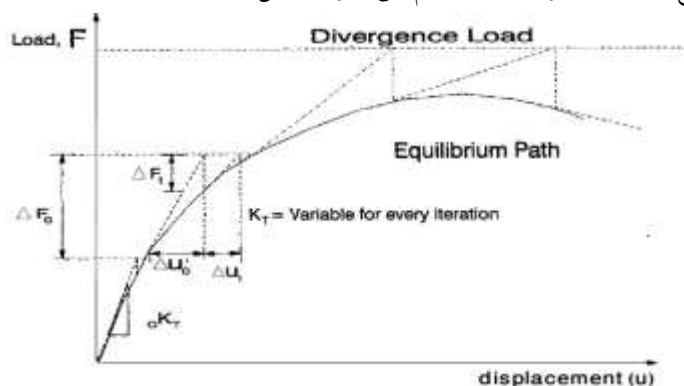
$$K_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{Z}{L}\right)^2 + \frac{EA}{L} \left(\frac{2ZV + V^2}{L^2}\right) + \frac{Q}{L} \quad (7)$$

در صورتی که بجای Q از معادله ی (۵) جایگذاری گردد K_t تابعی از هندسه اولیه و تغییر مکان V می گردد و در رابطه ی (۷) عبارت اول در سمت راست تغییر مکان اولیه (شیب اولیه) نامیده می شود و در صورتیکه عبارت دوم هندسی (تنش اولیه) نامیده می شود.



شکل ۱: عضو خرپا قبل و بعد از تغییر شکل

روش نیوتن - رافسون یکی از روش های مناسب برای حل معادلات غیر خطی حاصل از تحلیل غیر خطی سازه ها می باشد. در این روش که بر اساس تکرار می باشد در هر مرحله از تکرار معادلات تعادل جهت بدست آوردن تغییر مکان ها و نیروهای نموی حل می شوند. در پایان هر مرحله تکرار تغییر مکان و نیرو ها جدید خواهند شد و بردار نیروی نا متعادل که برابر اختلاف نیروهای خارجی با نیروهای داخلی در هر کدام از گره هاست بدست می آید و به عنوان بردار نیروی خارجی جدید بر سازه تغییر شکل داده وارد می شود. روند به همین ترتیب ادامه می یابد تا معیار همگرایی برقرار گردد. در این موقع بارگذاری مرحله بعد انجام می گیرد (شکل ۲).



شکل ۲: روش کنترل بار (نیوتن رافسون)

۳- روش Quasi minimal residual-Newton Raphson

برای مسائل غیرخطی، حل بخش غیرخطی دستگاه معادلات معمولاً بیشترین زمان محاسباتی را می گیرد. از آنجا که روش نیوتن رافسون همگرایی از مرتبه دو دارد، لذا روشی مرسوم برای حل معادلات غیرخطی بشمار می آید. هرچند در روند آنالیز سازه لازم است در هر گام تکرار نیوتن رافسون یک دستگاه معادلات خطی حل شود. در میان روشهای تکراری الگوریتم QMR روش موثری است چراکه در روند حل دستگاه

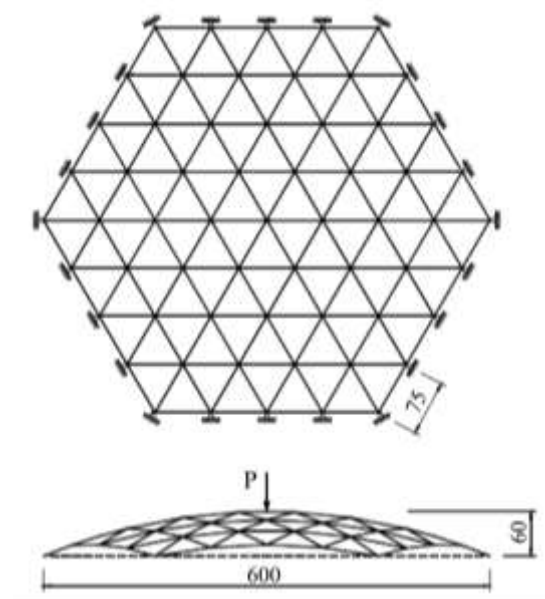
معادلات، عملیات وارون سازی ماتریس سختی مماسی که یک بخش کاملاً وقت گیر است را حذف می کند. الگوریتم و کد Matlab این روش برای حل دستگاه $kx=F$ به صورت زیر است:

```
n = 100;
on = ones(n,1);
k = spdiags([-2*on 4*on -on],[-1:1,n,n]);
b = sum(A,2);
tol = 1e-8;
maxit = 15;
M1 = spdiags([on/(-2) on],[-1:0,n,n]);
M2 = spdiags([4*on -on],0:1,n,n);
x1 = qmr(@afun,F,tol,maxit,M1,M2);
```

```
function y = afun(x,transp_flag)
if strcmp(transp_flag,'transp') % y = k'*x
y = 4 * x;
y(1:n-1) = y(1:n-1) - 2 * x(2:n);
y(2:n) = y(2:n) - x(1:n-1);
elseif strcmp(transp_flag,'notransp') % y = k*x
y = 4 * x;
y(2:n) = y(2:n) - 2 * x(1:n-1);
y(1:n-1) = y(1:n-1) - x(2:n);
end
end
end
```

۴- مثال های عددی

۴-۱ مشخصات هندسی گنبد خرپایی ژئودزیک شکل ۳ که از مرجع شماره ۲۰ انتخاب شده است. این خرپا دارای ۱۵۶ عضو با سطح مقطع یکسان به مساحت $6/5 \text{ cm}^2$ و ممان اینرسی 1 cm^4 بوده و دارای ۶۱ گره می باشد. گره های پیرامونی پایین مطابق شکل ۳ به صورت مفصلی می باشد. همچنین مدول الاستیسیته برای کلیه اعضا $E=6895 \text{ kN/cm}^2$ لحاظ شده است.



شکل ۳: گنبد خرابایی ژئودزیک - تمام اندازه ها به سانتی متر

در جداول ۱ و ۲، خلاصه ای از زمان CPU و همچنین تعداد تکرارهای به کار برده شده برای روش نیوتن رافسون کلاسیک و همچنین روش ترکیبی QMR با نیوتن رافسون، نشان داده شده است.

جدول ۱: مقایسه زمان CPU (ثانیه) در روش های مختلف برای مثال ۱

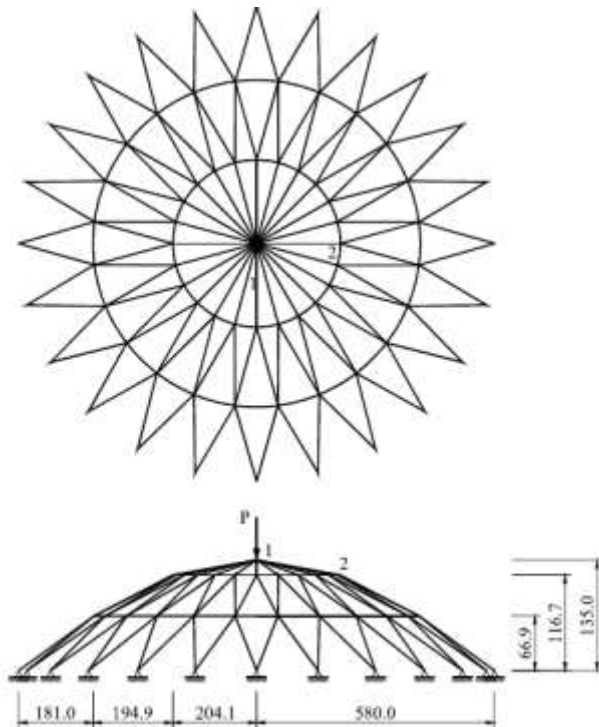
Method	Elastic Analysis
Newton-Raphson (N-R)	۲۷/۵۳۰۶
N-R +QMR	۲۰/۴۴۶۲

جدول ۲: مقایسه تعداد تکرارها در روش های مختلف برای مثال ۱

Method	Elastic Analysis
Newton-Raphson (N-R)	۱۱۱
N-R +QMR	۹۵

۲-۴- خرابای مدور نشان داده شده در شکل ۴ که از مرجع ۲۱ آورده شده است، دارای ۱۶۸ المان و ۷۳ گره بوده که تعداد کل درجات آزادی آن برابر ۱۴۷ می باشد. همچنین بار قائمی به مقدار 500 kN در راس این خرپا وارد شده و حرکت خارج از صفحه این خرپا توسط تکیه گاههای

مفصلی مهار شده است. سطح مقطع و ممان اینرسی برای تمام اعضای این خرپا به ترتیب عبارتست از 50.431 cm^2 و 52.94 cm^4 و مدول الاستیسیته و تنش تسلیم اعضا به ترتیب $E=2.04 \times 10^4$ و $F_y=25 \text{ kN/cm}^2$ می باشد.



شکل ۴: خرپای گنبدی مدور- تمام اندازه ها به سانتی متر

زمان محاسباتی به وسیله CPU و تعداد تکرار های لازم جهت همگرایی در جداول ۳ و ۴ نشان داده شده است. با توجه به داده های موجود، در میان همه روش ها، روش نیوتن-رافسون ترکیب شده با روش QMR به کمترین زمان محاسباتی توسط CPU و تکرار لازم جهت همگرایی نیاز دارد.

جدول ۳: مقایسه زمان CPU (ثانیه) در روش های مختلف برای مثال ۲

Method	Elastic Analysis
Newton-Raphson (N-R)	۳۴/۲۱۰۸
N-R +QMR	۲۴/۵۷۶۱

جدول ۴: مقایسه تعداد تکرارها در روش های مختلف برای مثال ۲

Method	Elastic Analysis
Newton-Raphson (N-R)	۱۸۸
N-R +QMR	۱۷۳

۵- نتیجه گیری

این تحقیق روش های متعددی برای بهبود روند همگرایی تحلیل استاتیکی غیر خطی خرپاها با یکدیگر مقایسه شده اند. برای این منظور برنامه های تحلیل غیرخطی و الگوریتم موثر ریاضی در محیط نرم افزار MATLAB نوشته شد. در این روش ها با توجه به ساختار الگوی روش های تکراری و سازگاری بین الگوریتم های پیشنهادی در این مقاله و روش های حل غیر خطی، تغییرات قابل توجهی در روش های ریاضی اعمال شد تا بتوان زمان و نیز تعداد تکرارها را در پروسه ی تحلیل غیر خطی کاهش داد.

مثال های عددی بر روی دو خرپای ۳ بعدی با درجات آزادی بالا نشان می دهد که استفاده از الگوریتم پیشنهادی در این تحقیق می تواند تا حدود ۲۰ درصد زمان محاسباتی را کم کند.

مراجع

- [1] Oran, C.; "Tangent stiffness in space frames"; *Journal of the Structural Division, ASCE***99**, No. 6 (1973) 987-1001
- [2] Kassimali, A.; "Large deformation analysis of elastic-plastic frame"; *Journal of Structural Engineering, ASCE***109**, No. 8 (1983) 1869-1885
- [3] Papadrakakis, M., Ghionis, P.; "Conjugate gradient algorithms in nonlinear structural analysis problems"; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering***59**, No. 1 (1986) 11-27
- [4] Kassimali, A., Bidhendi, E.; "Stability of trusses under dynamic loads"; *Computers and Structures***29**, No. 3 (1988) 381-392.
- [5] Jagannathan, D. S., Epstein, H. I., Christiano, P.; "Nonlinear Analysis of ReticulatedSpace Frames"; *J. Struct. Div., ASCE***101**, No. ST12 (1975) 2641-2658
- [6] Papadrakakis, M. "Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods"; *Computers and Structures***14**, No. 5-6 (1981) 393-402
- [7] Kassimali, A., Abbasnia, R.; "Large deformation analysis of elastic space frame"; *Journal of Constructional Steel Research***35**, No. 3 (1995) 275-290
- [8] Pecknold, D. A., Ghaboussi, J., Healey, T. J.; "Snap-through and bifurcation in a simple structure"; *Journal of Engineering Mechanics***111**, No. 7 (1985) 909-922
- [9] Meek, J. L., Lin, W. J.; "Geometric and material nonlinear analysis of thin-walled beam-columns"; *Journal of structural engineering New York., N.Y.***116**, No. 6 (1990) 1473-1490
- [10] Wempner, G. A.; "Discrete approximations related to nonlinear theories of solids"; *International Journal of Solids and Structures***7**, No. 11 (1971) 1581-1599
- [11] Riks, E.; "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems"; *International Journal of Solids and Structures***15**, No. 7 (1979) 529-551
- [12] Crisfield, M. A.; "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through"; *Computers and Structures***13**, No. 1-3 (1981) 55-62
- [13] Crisfield, M. A.; "Arc-length method including line searches and accelerations"; *International Journal for Numerical Methods in Engineering***19**, No. 9 (1983) 1269-1289
- [14] Ramm, E.; "Strategies for tracing non-linear responses near limit points, in: W. Wunderlich, E. Stein, K. J. Bathe Non-linear Finite Element Anlalysis in Structural Mechanics"; *Proc. Europe-U.S. Workshop, Bochum, Springer, New York, (1981) 68-89*
- [15] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.; "The Finite Element Method Set"; 4th Edition, (1989) McGrawHill, N.Y.
- [16] Clarke, M. J., Hancock, G. J.; "A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses"; *International Journal for Numerical Methods in Engineering***29**, No. 7 (1990) 1365-1391
- [17] Batoz, J. L., Dhett, G.; "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problem"; *International Journal of Numerical Methods in Engineering***14**, (1979) 1262-1267
- [18] Forde, B. W. R., Stierner, S. F.; "Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis"; *Computers and Structures***27**, No. 5 (1987) 625-630
- [19] Al-Rasby, S. N. "Solution techniques in nonlinear structural analysis"; *Computers and Structures***40**, No. 4 (1991) 985-993
- [20] Ramesh, G., and Krishnamoorthy, C. S.; "Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method" *Int. J. Numer. Methods Eng***37**, No. 21 (1994) 3633-3657
- [21] Thai, H. T., Kim, S. E.; "Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method" *Journal of Constructional Steel Research***65**, (2009) 1987-1994