



کد مقاله: ۱-۱۷۴

تحلیل خمشی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با استفاده از توابع پایه هموار به شکل بدون

شبکه محلی (MLEBFs)

علیرضا معتمدی قهفرخی^۱، بیژن برومند^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ar.moatamedi@cv.iut.ac.ir

۲- عضو هیأت علمی، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

در تحقیق حاضر، یک روش عددی بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه حل در فرم محلی به منظور بررسی رفتار خمشی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای نسبتاً ضخیم تحت بارگذاری استاتیکی بدون محدودیت در شکل هندسی و شرایط مرزی ورق و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی درجه اول میندلین ارایه می‌گردد. در این روش ابتدا دامنه حل به وسیله یک سری از نقاط گره‌ای (نقاط حاوی مجهولات درجات آزادی) گسسته می‌شود. این نقاط داخل دامنه و بر روی مرز واقع می‌شوند. سپس در هریک از این نقاط یک ابر (زیر دامنه) شامل تعدادی از نقاط مجاور در نظر گرفته می‌شود. هر ابر شامل نقاط دیگری به جز نقطه مرکزی آن است. هم چنین ابرهای مجاور باید با یکدیگر همپوشانی داشته باشند و اجتماع آنها باید تمام دامنه را بپوشاند. در این روش، جواب مسئله برای تغییر شکل ورق از دو بخش جواب خصوصی و همگن تشکیل می‌شود. بخش همگن برای هر زیر دامنه به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه نمایی هموار با ضرایب ثابت تقریب زده می‌شود. پاسخ خصوصی نیز با استفاده از سری دیگری و با روندی مشابه با حل همگن بدست می‌آید. در این مقاله نتایج عددی حاصل از این روش برای برخی از مسایل دارای حل دقیق به منظور بررسی کارایی و دقت این روش ارایه شده است.

کلمات کلیدی: ورق کامپوزیت، تغییر شکل برشی مرتبه اول، روش بدون شبکه، توابع پایه نمایی

مقدمه

کاربرد ورق‌های کامپوزیت در ساخت اعضای سازه‌ای سبک با مقاومت و سختی بالا موجب پیدایش جایگاه ویژه‌ی این ورق‌ها در صنایع مختلف از جمله صنعت دریانوردی، هوافضا، حمل‌ونقل و نیز سایر شاخه‌های علوم مهندسی گردیده است. از رایج‌ترین کاربرد این ورق‌ها می‌توان به ساخت بدنه کشتی‌ها و سازه‌های زیر دریایی، هواپیما، لوله‌ها، مخازن صنعتی و پل‌ها اشاره کرد. در چند دهه‌ی اخیر مطالعات گسترده‌ای در زمینه‌ی تحلیل و طراحی سازه‌های کامپوزیتی به منظور برآورد دقیقی از تغییر شکل‌ها و تنش‌های ایجاد شده در ورق‌ها و پوسته‌ها و همچنین بررسی رفتار کمانشی و ارتعاشی آنها صورت گرفته است.

مواد کامپوزیتی از تلفیق دو یا چند ماده با خواص فیزیکی و مکانیکی مختلف به دست می‌آیند. مواد کامپوزیتی الیافی از پرکاربردترین مواد کامپوزیتی هستند که همانند یک ماده ارتوتروپیک عمل می‌کنند. از روی هم‌گذاری لایه‌های متعددی از این نوع مواد، کامپوزیت‌های لایه‌ای الیافی

به دست می‌آیند. به دلیل پیچیدگی خواص فیزیکی و مکانیکی، تئوری‌ها و روش‌های متعددی برای بررسی رفتار این گونه ورق‌ها توسعه داده شده است. وجود خواص فیزیکی و مکانیکی متفاوت در بین لایه‌ها و اثر گذاری همزمان کرنش‌های عمودی و برشی در میدان جابه‌جایی، باعث می‌شود مواد کامپوزیت لایه‌ای نسبت به مواد ایزوتروپیک رفتار برشی پیچیده‌تری نشان دهند و به همین دلیل به سازه‌های ساخته شده از مواد لایه‌ای، سازه‌های با تغییر شکل عرضی زیاد اطلاق می‌شود. اثر تغییر شکل‌های برشی خارج از صفحه در ورق‌های کامپوزیت با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق مشهودتر خواهد بود. از این رو محققین به منظور در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های برشی عرضی بر تغییر شکل‌های خمشی ورق‌های ضخیم دسته‌ای از تئوری‌ها موسوم به تئوری‌های تغییر شکل برشی را توسعه دادند که از بارزترین آن‌ها می‌توان به تئوری تغییر شکل برشی درجه اول میندلین [۱] اشاره کرد. در این تئوری، المان خطی عمود بر میان صفحه پس از تغییر شکل ورق همچنان خطی باقی می‌ماند. این تئوری موجب حصول کرنش‌ها و تنش‌های برشی عرضی ثابت در راستای ضخامت ورق می‌شود که با فرض صفر بودن تنش در سطوح بالایی و پایینی ورق در تناقض است. برای جبران این تناقض، به ضریب اصلاح برشی k_s در بین لایه‌ها نیاز است. البته برآورد ضریب اصلاح برشی برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای بسیار مشکل است، چرا که این ضریب به آرایش لایه‌ای ورق، شکل هندسی آن، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است. پس از این تئوری، تئوری‌های مرتبه بالاتر ورق توسعه پیدا کرد [۲-۴] که برای بیان دقیق‌تر تغییر مکان در راستای ضخامت ورق از چند جمله‌ای‌های با درجات بالاتر برای تقریب جابه‌جایی‌های درون صفحه در راستای ضخامت ورق استفاده می‌شود.

روش‌های تحلیلی برای ورق‌ها محدود به شکل هندسی و شرایط مرزی است. محدودیت‌ها در روش‌های تحلیلی محققان را به سمت روش‌های عددی سوق داده است. از جمله مهمترین این روش‌ها می‌توان المان محدود* (FEM) را نام برد که از پیشینه‌ای طولانی در حل مسائل متعدد مکانیک جامدات برخوردار است [۵، ۶]. اخیراً بررسی جامعی در ارتباط با پیشرفت‌های این روش در حوزه‌ی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای توسط ژانگ و یانگ [۷] صورت گرفته است.

لزوم شبکه بندی، وقوف بر اطلاعات اتصال المان‌ها و همچنین شبکه بندی مجدد در حل برخی مسائل امری است زمان‌بر و پر هزینه که ایده‌ی حذف المان را در ذهن محققان به وجود آورد. از جمله مزایای روش‌های بدون شبکه می‌توان به افزایش سرعت، کاهش هزینه محاسبات، برخورداری از نرخ‌های بالاتری از همگرایی، توانایی در ایجاد پیوستگی مراتب بالاتر و همچنین مدل نمودن ناپیوستگی‌ها با استفاده از غنی نمودن توابع پایه اشاره کرد. در طول یک دهه اخیر روش‌های عددی بدون نیاز به شبکه بندی دامنه حل مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. وجه مشترک این دسته از روش‌ها، تقریب توابع مجهول بر روی نقاطی است که دامنه حل را گسسته می‌کنند. از میان این روش‌ها می‌توان به روش المان آزاد گالرکین [۸، ۹] اشاره نمود، گرچه این روش نیازمند یک شبکه المان بندی زمینه به منظور انتگرال گیری عددی است. روش بدون شبکه پترو- گالرکین محلی [۱۰] با به کارگیری فرم محلی ضعیف امکان انتگرال گیری بدون نیاز به یک شبکه المان بندی را فراهم می‌سازد. فریرا از روشی موسوم به روش توابع پایه شعاعی برای تحلیل ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای استفاده کرده است [۱۱].

در این تحقیق از روشی بدون نیاز به شبکه بندی المان و به فرم محلی استفاده خواهد شد که برای اولین بار توسط برومند و همکاران [۱۲] توسعه داده شده است. در ادامه پس از ارائه معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی، روش حل بخش همگن، خصوصی و همچنین نحوه تشکیل معادلات و ارتباط بین درجات آزادی یک ورق کامپوزیت لایه‌ای متقارن تشریح می‌شود. به منظور بررسی صحت نتایج، برخی از مسایلی که حل دقیق برای آن‌ها موجود است ارائه می‌شود.

روابط حاکم

یک ورق کامپوزیت لایه‌ای به شکل دلخواه با ضخامت یکنواخت h متشکل از چند لایه ارتوتروپیک را در نظر بگیرید، به گونه ای که صفحه میانی آن منطبق بر صفحه xy دستگاه مختصات است و محور Z به منظور سهولت رو به پایین و عمود بر صفحه میانی اختیار شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار خمشی چنین ورقی بر اساس فرضیات تئوری تغییر شکل برشی درجه اول قابل تعیین است. از این رو با بهره جستن از میدان جابه‌جایی تعریف شده در این تئوری و محاسبه کرنش‌ها و تنش‌ها و با استفاده از اصل جابه‌جایی مجازی می‌توان معادله مورد نظر را بدست آورد. روابط تغییرشکل‌های درون صفحه و برون صفحه ورق بر اساس این تئوری عبارتند از:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \quad (2)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مولفه‌های در راستای x ، y و Z دستگاه مختصات، u_0 ، v_0 ، w_0 مولفه‌های تغییر مکان یک نقطه دلخواه از میان صفحه و ϕ_x ، ϕ_y به ترتیب چرخش‌های مستقل یک المان خطی عمود بر میان صفحه حول محورهای x و y است. برای یک ورق کامپوزیت با آرایش لایه‌ای متقارن و تحت بارگذاری عمود بر سطح ورق $q(x, y)$ ، معادلات دیفرانسیل خمشی آن بر حسب متغیرهای مجهول جابجایی ورق به فرم ماتریسی رابطه (۴) بیان می‌شود:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{u} = \{w, \phi_x, \phi_y\}^T, \quad \mathbf{q} = \{q(x, y), 0, 0\}^T \quad (4)$$

که در آن \mathbf{L} ماتریسی 3×3 شامل اپراتورهای دیفرانسیلی ورق است که در ضمیمه تعریف شده است. قابل توجه است که در یک ورق کامپوزیت متقارن تغییر شکل‌های برون صفحه‌ای w ، ϕ_y ، ϕ_x مستقل از تغییر شکل‌های درون صفحه u_0 ، v_0 بدست می‌آیند.

شرایط مرزی

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میندلین بر روی هر یک از لبه‌های ورق سه شرط مرزی باید ارضاء شود. شرایط مرزی در ورق میندلین عبارتند از:

$$\text{Free Edge} \quad : \quad Q_n, M_{ns}, M_{nm} \quad (5)$$

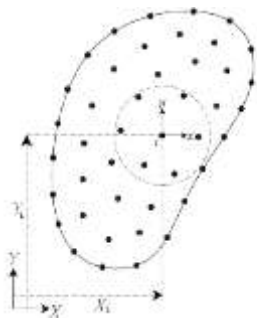
$$\text{Simply Support} \quad : \quad w_0, \phi_s, M_{nm} \quad (6)$$

$$\text{Fixed Support} \quad : \quad w_0, \phi_s, \phi_n \quad (7)$$

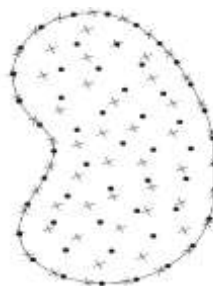
که در این روابط اندیس‌های s, n بیانگر جهات عمود و مماس بر لبه ورق است. تعاریف کاملی از منته‌های تنش‌های خمشی M_{ij} و منته‌های تنش‌های برشی عرضی Q_{ij} و سایر پارامترهای موجود در روابط (۳-۵) در مرجع [۱۳] ارائه شده است.

شرح روش حل

پس از مدل نمودن ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی میندلین یک دستگاه معادله غیر همگن حاصل می‌شود که در این مقاله حل این دستگاه معادلات با استفاده از روش‌های بدون شبکه محلی دنبال می‌شود. در این روش دامنه حل به وسیله یک سری از نقاط گره‌ای گسسته می‌شود. این نقاط داخل دامنه و بر روی مرز واقع می‌شوند. سپس روی هر یک از این نقاط یک ابر (زیر دامنه) شامل تعدادی از نقاط گره‌ای مجاور در نظر گرفته می‌شود. در اینجا مجهولات در نظر گرفته شده در این مجموعه نقاط اصطلاحاً "درجات آزادی" نامیده می‌شوند. در این روش علاوه بر شبکه نقاط گره‌ای، از شبکه نقاط دیگری که در سرتاسر دامنه حل پراکنده شده‌اند به منظور تشکیل معادلات استفاده شده است. این مجموعه نقاط، نقاط واسطه نام گذاری می‌شوند. نقاط گره‌ای که در آن‌ها درجات آزادی تعریف می‌شوند با نقطه و نقاط واسطه با ضربدر در شکل (۱) نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در نقاط واسطه هیچ درجه آزادی برای پاسخ معادله دیفرانسیل در نظر گرفته نشده و این نقاط صرفاً محل تشکیل معادلات نهایی هستند. این معادلات باید به گونه‌ای نوشته شوند که موجب پیوستگی حل ابرهای مجاور در نقاط واسطه‌ی داخل دامنه و ارضاء شرایط مرزی برای نقاط واسطه‌ی واقع بر مرز شوند. بدین منظور در هر یک از نقاط واسطه نیز یک ابر شامل تعدادی از نقاط گره‌ای مجاور در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲- موقعیت دستگاه مختصات محلی ابر نسبت به مختصات کلی



شکل ۱- نمایش دامنه حل، نقاط واسطه و گره‌ای

در مرکز هر ابر یک دستگاه مختصات محلی در نظر گرفته می‌شود و پاسخ معادله دیفرانسیل در محدوده‌ی هر ابر بر حسب مختصات محلی آن نوشته می‌شود. با توجه به این که دستگاه مختصات محلی با دستگاه مختصات کلی موازی و هم جهت است (شکل ۲)، ماتریس ژاکوبین تبدیل بین دو دستگاه مختصات برابر ماتریس یکه بوده و نیاز به تبدیل خاصی برای محاسبه مشتقات در دستگاه محلی نیست.

$$X = x + X_i \quad (۸)$$

$$Y = y + Y_i$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial X / \partial x & \partial Y / \partial x \\ \partial X / \partial y & \partial Y / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

در این روش پاسخ معادله دیفرانسیل در مختصات محلی هر ابر به صورت مجموع دو بخش همگن و خصوصی نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p \quad (10)$$

بدین ترتیب:

$$\mathbf{L} \mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{u}_p = \mathbf{q} \quad \text{in } \Omega \quad (12)$$

$$\mathbf{L}_B \mathbf{u}_h = \mathbf{u}'_h \quad \text{on } \partial\Omega \quad (\mathbf{u}'_h = \mathbf{u}'_B - \mathbf{u}'_p), \quad (\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_N \text{ or } \mathbf{L}_B = \mathbf{L}_D) \quad (13)$$

اندیس p مربوط به بخش خصوصی و اندیس h مربوط به بخش همگن است. \mathbf{L}_B عملگر شرایط مرزی و \mathbf{L} عملگر معادله دیفرانسیل بر روی دامنه حل است. شرایط مرزی می‌تواند به صورت نیومان (\mathbf{L}_N) یا دیریشله (\mathbf{L}_D) و یا ترکیبی از هر دو در مسائل ورق مطرح شود. \mathbf{u}'_B مقادیر شرایط مرزی را تعیین می‌کند و \mathbf{u}'_p مقادیر متناظر شرایط مرزی حاصل از جواب خصوصی است، که اختلاف آن‌ها (\mathbf{u}'_h) باید توسط پاسخ همگن ارضا شود. پس پاسخ خصوصی با حل معادله (۱۲) به دست می‌آید. پاسخ همگن نیز با حل معادلات (۱۱) و (۱۳) حاصل می‌شود.

پاسخ همگن

با علم به ثابت بودن عملگر \mathbf{L} در معادله ورق می‌توان ادعا نمود که تابع نمایی در دستگاه معادله همگن صدق می‌کند. بنابراین می‌توان دسته‌ای از توابع نمایی را به کاربرد که پیوستگی و شرایط مرزی را نیز ارضاء نماید. به این منظور پاسخ همگن به صورت یک سری از توابع پایه نمایی در هر ابر فرض می‌شود:

$$\mathbf{u}_h(x, y) = \sum_i c_i \mathbf{h}(\alpha_i, \beta_i) e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (14)$$

در این رابطه، اندیس i شمارنده‌ی موده‌های پاسخ است و $\mathbf{h}(\alpha_i, \beta_i) e^{\alpha_i x + \beta_i y}$ مود i ام حل را تشکیل می‌دهد که c_i ضریب این مود و مقدار آن برای ابرهای مختلف، متفاوت است. با جایگذاری \mathbf{u}_h در معادله (۱۱) رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\Lambda(\alpha_i, \beta_i) \mathbf{h}(\alpha_i, \beta_i) = \mathbf{0} \quad (15)$$

که در آن $\mathbf{\Lambda}(\alpha_i, \beta_i) = \mathbf{L}(e^{\alpha_i x + \beta_i y})$ است. پاسخ‌های غیر صفر معادله (۱۵) از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل می‌شوند. به این ترتیب معادله مشخصه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\det(\mathbf{\Lambda}(\alpha_i, \beta_i)) = 0 \quad (16)$$

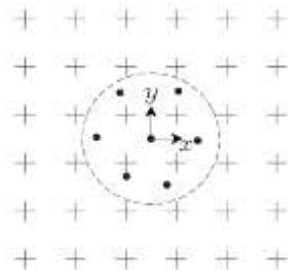
با این کار معادله مشخصه‌ای به صورت چند جمله‌ای درجه شش برای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول بر حسب α_i و β_i حاصل می‌گردد که با حل آن رابطه بین ضرایب α_i و β_i بدست می‌آید. بردار $\mathbf{h}(\alpha_i, \beta_i)$ جواب غیر بدیهی دستگاه معادله همگن است که معادل با فضای پوچ ماتریس ضرایب $\mathbf{\Lambda}(\alpha_i, \beta_i)$ است.

پاسخ خصوصی

بخش خصوصی معادله دیفرانسیل (\mathbf{u}_p) صرفاً به منظور ارضاء معادله در داخل دامنه حل اضافه می‌گردد و به شرایط مرزی بستگی ندارد. بنابراین این بخش از حل معادله یکتا نبوده و هر تابعی که دارای این خصوصیت باشد و معادله را ارضاء کند می‌تواند به عنوان جواب خصوصی ایفای نقش کند. گاهی پیدا نمودن این توابع کار ساده‌ای نیست. از این رو بخش خصوصی معادله در محدوده هر ابر و در دستگاه محلی آن ابر به صورت ترکیب خطی از تعدادی مود بیان می‌شود:

$$\mathbf{u}_p(x, y) = \sum_k \mathbf{h}_k^p e^{\alpha_k x + \beta_k y} \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (17)$$

جهت بدست آوردن ضرایب \mathbf{h}_k^p از یک سری شبکه نقاط محلی همانند شکل (۳) با آرایش مستطیلی در اطراف نقطه مرکزی ابر مورد نظر استفاده می‌شود. محدوده‌ی این شبکه نقاط باید کمی بزرگتر از شعاع ابر باشد. بر اساس تجربه‌های عددی محدوده مناسب بین ۱/۵ تا ۲ برابر شعاع ابر پیشنهاد می‌گردد [۱۴]. ضرایب \mathbf{h}_k^p با ارضاء نمودن معادله دیفرانسیل (۱۲) در نقاط مربوط به حل خصوصی در اطراف ابر بدست می‌آید. در اینجا باید توجه داشت که بخش خصوصی پاسخ معادله دیفرانسیل نیز همانند بخش همگن برای هر ابر به صورت مخصوص به آن تعریف می‌شود.



شکل ۳- شبکه نقاط مربوط به حل خصوصی

نحوه تشکیل معادلات در دامنه حل

برای تشکیل معادلات ابتدا بخش همگن پاسخ معادله دیفرانسیل به فرم ماتریسی زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{u}_h = \Psi_h \cdot \mathbf{c}_h \quad (18)$$

با محاسبه رابطه فوق در نقاط داخل ابر (به جز نقطه مرکزی) رابطه ماتریسی زیر بیان می شود:

$$\mathbf{u}_h^R = \Psi_h^R \cdot \mathbf{c}_h \quad (19)$$

که در آن \mathbf{u}_h^R ، بخش همگن درجات آزادی در نقاط مجاور و Ψ_h^R یک ماتریس مستطیلی با ابعاد $n \times m_h$ بوده که n تعداد نقاط مجاور در هر ابر و m_h تعداد پایه های حل همگن هستند. با قرار دادن معادله (19) در معادله (18) چنین حاصل می شود:

$$\mathbf{u}_h = \Psi_h (\Psi_h^R)^{-1} \mathbf{u}_h^R \quad (20)$$

$$\Phi_h = \Psi_h (\Psi_h^R)^{-1} \quad (21)$$

بدین ترتیب رابطه ای بین جواب همگن در نقطه مرکزی (\mathbf{u}_h) و نقاط مجاور (\mathbf{u}_h^R) در هر ابر بدست می آید:

$$\mathbf{u}_h = \Phi_h \mathbf{u}_h^R \quad (22)$$

با استفاده از رابطه (10) و قرار دادن در رابطه (22) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\mathbf{u} = \Phi_h (\mathbf{u}^R - \mathbf{u}_p^R) + \mathbf{u}_p \quad (23)$$

در رابطه (23) \mathbf{u}^R و \mathbf{u}_p^R به ترتیب جواب کلی و جواب خصوصی نقاط مجاور (به جز نقطه مرکزی) در هر ابر است.

در این روش برای نقاط واسطه واقع بر روی مرز شرایط مرزی ارضاء می‌شود و برای بقیه نقاط شرایط پیوستگی در دستور کار قرار می‌گیرد. برای نقاط در داخل دامنه حل به گونه‌ای تنظیم می‌شود که پاسخ معادله دیفرانسیل در ابرهای مجاور تا حد امکان به یکدیگر نزدیک شود. این کار با تشکیل یک عبارت باقیمانده در هر یک از نقاط واسطه در داخل دامنه حل صورت می‌گیرد. بنابراین برای هر یک از نقاط واسطه داخل دامنه (غیر واقع بر مرز) شرایط پیوستگی بدین صورت توسعه داده می‌شود:

$$R_i^\Omega = \sum_{j=1}^{n^i} \square \mathbf{w}_u^i (\mathbf{u}^i|_{x_i} - \mathbf{u}^j|_{x_i})^2 + \sum_{j=1}^{n^i} \square \mathbf{w}_\theta^i (\nabla \mathbf{u}^i|_{x_i} - \nabla \mathbf{u}^j|_{x_i})^2 \quad (24)$$

که در آن $\mathbf{u}^i|_{x_i}$ حل مربوط به ابر نقطه واسطه i ام در نقطه مرکزی ابر x_i و $\mathbf{u}^j|_{x_i}$ حل مربوط به ابر نقطه گره‌ای j ام در محل x_i است. همچنین نماد \square معرف طول بردار و n^i تعداد نقاط گره‌ای موجود در ابر i ام است. در رابطه فوق منظور از $\nabla \mathbf{u}$ گرادیان تک تک مولفه‌های بردار \mathbf{u} است که خود به صورت یک بردار نوشته شده است. مولفه‌های بردار \mathbf{u} همان درجات آزادی در هر نقطه هستند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u} = \{w, \phi_x, \phi_y\}^T, \quad \nabla \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_x}{\partial y}, \frac{\partial \phi_y}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right\}^T \quad (25)$$

در رابطه (24) از دو ضریب \mathbf{w}_u^i و \mathbf{w}_θ^i استفاده شده است. این دو ضریب که به شکل دو ماتریس قطری هستند، ضرایب وزنی نامیده می‌شوند. ابعاد این ماتریس‌ها نیز با توجه به بعد بردار \mathbf{u} تعیین می‌گردد. بدین ترتیب ماتریس ضرایب \mathbf{w}_u^i و \mathbf{w}_θ^i به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{w}_u^i = \begin{bmatrix} w_w & 0 & 0 \\ 0 & w_{\phi_x} & 0 \\ 0 & 0 & w_{\phi_y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_\theta^i = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

واضح است که در صورت نیاز می‌توان به سادگی با اضافه یا کم نمودن جملاتی در رابطه (24) مرتبه این پیوستگی را افزایش یا کاهش داد، که این خود از مزایای این روش است. اکنون با در نظر گرفتن رابطه (23) و قرار دادن در رابطه (24) رابطه‌ای بر حسب درجات آزادی متناظر با هر ابر بدست می‌آید:

$$R_i^\Omega = \sum_{j=1}^{n^i} \square \mathbf{w}_u^i \left(\Phi_h^i \Big|_{x_i} \mathbf{u}^{R,i} - \Phi_h^j \Big|_{x_i} \mathbf{u}^{R,j} \right) + \mathbf{w}_u^i \mathbf{a}_u^{i,j} \square^2 + \sum_{j=1}^{n^i} \square \mathbf{w}_\theta^i \left(\nabla \Phi_h^i \Big|_{x_i} \mathbf{u}^{R,i} - \nabla \Phi_h^j \Big|_{x_i} \mathbf{u}^{R,j} \right) + \mathbf{w}_\theta^i \mathbf{a}_\theta^{i,j} \square^2$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_u^{i,j} = \left(\mathbf{u}_p^i \Big|_{x_i} - \mathbf{u}_p^j \Big|_{x_i} \right) - \left(\Phi_h^i \Big|_{x_i} \mathbf{u}_p^{R,i} - \Phi_h^j \Big|_{x_i} \mathbf{u}_p^{R,j} \right) \\ \mathbf{a}_\theta^{i,j} = \left(\nabla \mathbf{u}_p^i \Big|_{x_i} - \nabla \mathbf{u}_p^j \Big|_{x_i} \right) - \left(\nabla \Phi_h^i \Big|_{x_i} \mathbf{u}_p^{R,i} - \nabla \Phi_h^j \Big|_{x_i} \mathbf{u}_p^{R,j} \right) \end{cases} \quad (27)$$

ارضاء شرایط مرزی

در مسائل ورق شرایط مرزی می‌تواند به صورت دیریشله یا نیومان و یا ترکیبی از هر دو باشد. بنابراین ترم مربوط به هردو در نظر گرفته شده و در صورت نبودن هر کدام از شرایط مرزی ترم متناظر آن حذف می‌شود:

$$R_i^\Gamma = \square \mathbf{w}_N^i \left(\mathbf{L}_N \left[\mathbf{u}^i \right] \Big|_{x_i} - \mathbf{F}_N \right) \square^2 + \square \mathbf{w}_D^i \left(\mathbf{L}_D \left[\mathbf{u}^i \right] \Big|_{x_i} - \mathbf{F}_D \right) \square^2 \quad (28)$$

به طریق مشابه و با در نظر گرفتن رابطه (۲۳) و (۲۸)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$R_i^\Gamma = \square \mathbf{w}_N^i \left(\mathbf{L}_N \left[\Phi_h^i \right] \Big|_{x_i} \mathbf{u}_i^R + \mathbf{a}_N^i \right) \square^2 + \square \mathbf{w}_D^i \left(\mathbf{L}_D \left[\Phi_h^i \right] \Big|_{x_i} \mathbf{u}_i^R + \mathbf{a}_D^i \right) \square^2 \quad (29)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_N^i = \mathbf{L}_N \left[\mathbf{u}_p^i \right] \Big|_{x_i} - \mathbf{L}_N \left[\Phi_h^i \right] \Big|_{x_i} \mathbf{u}_p^{R,i} - \mathbf{F}_N \\ \mathbf{a}_D^i = \mathbf{L}_D \left[\mathbf{u}_p^i \right] \Big|_{x_i} - \mathbf{L}_D \left[\Phi_h^i \right] \Big|_{x_i} \mathbf{u}_p^{R,i} - \mathbf{F}_D \end{cases}$$

همان‌گونه که در رابطه بالا اشاره شد \mathbf{L}_N نشان دهنده عملگر شرایط مرزی نیومان و \mathbf{L}_D نشان دهنده عملگر شرایط مرزی دیریشله است. \mathbf{F}_N و \mathbf{F}_D نیز به ترتیب بردار مقادیر معلوم بر روی شرایط مرزی نیومان و دیریشله هستند. نهایتاً تمامی باقیمانده‌ها را با هم جمع کرده و یک تابع پیوسته و مشتق پذیر از درجات آزادی بدست می‌آید:

$$R^T = \sum_{i=1}^{n^m} (R_i^\Gamma + R_i^\Omega) \quad (30)$$

در رابطه بالا نشان دهنده تعداد نقاط واسطه است. سپس با مشتق گیری از R^T نسبت به درجات آزادی و برابر صفر قرار دادن، معادلات متناظر را استخراج نموده و به این ترتیب دستگاه معادلات نهایی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$

که بردار \mathbf{U} شامل تمامی درجات آزادی است و با حل نمودن معادله (۳۱) مقادیر آن بدست آمده و سازه تحلیل می‌گردد.

نحوه‌ی محاسبه ضرایب وزنی

انتخاب ضرایب مناسب وزنی موجود در عبارت باقیمانده می‌تواند باعث افزایش دقت نتایج و ارتقاء کیفیت حل شود. ضرایب وزنی مورد استفاده در عبارت باقیمانده برای هر یک از نقاط واسطه عبارتند از: $\mathbf{W}_D^i, \mathbf{W}_N^i, \mathbf{W}_\theta^i, \mathbf{W}_u^i$ ، که دو ضریب اول به نقاط داخل دامنه و ضرایب سوم و چهارم به ترتیب به نقاط روی مرزهای نیومان و دیریشله مربوط هستند. تاثیر گذاری ضرایب فوق بر نتایج حاصله به نسبت بین این ضرایب بستگی دارد (نه صرفاً مقدارشان). برای این منظور ماتریس \mathbf{W}_u^i را برابر ماتریس واحد انتخاب کرده و سایر ضرایب نسبت به آن تعیین می‌شوند. از طرف دیگر با توجه به استفاده از توابع نمایی در تقریب تابع \mathbf{u} ، در صورت بزرگ یا کوچک بودن نماهای به کار رفته در توابع پایه، مشتقات مربوطه نیز بزرگ یا کوچک خواهند بود. در صورتی که این مشتقات بیش از اندازه بزرگ یا کوچک باشند، باعث کاهش دقت نتایج می‌شوند. برای جلوگیری از این موضوع مولفه‌های ماتریس \mathbf{W}_θ^i به گونه‌ای تعیین می‌گردد که این اثر تا حد امکان تعدیل شود. مولفه‌های ماتریس \mathbf{W}_θ^i از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$P_x = \frac{\text{Mean}(\text{Abs}(\Psi \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{F}_h^c))}{\text{Mean}(\text{Abs}(D_x \Psi \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{F}_h^c))} \quad (32)$$

که در آن منظور از $Mean$ و Abs به ترتیب میانگین و قدر مطلق مقادیر داخل براکت است. همچنین $\Psi \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{F}_h^c$ و $D_x \Psi \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{F}_h^c$ به ترتیب مقدار توابع پایه و مشتقات آن‌ها نسبت به مختصه x در نقطه مرکزی ابر است. ضریب P_y نیز به صورت مشابه تعریف می‌گردد. ابعاد عمگرهای \mathbf{L}_D و \mathbf{L}_N بسته به نوع شرایط مرزی متفاوت است. بنابراین در حالت کلی تعداد شرایط مرزی نیومان و دیریشله به ترتیب با n_N و n_D نمایش داده می‌شود. از آن جا که ارضاء شرایط مرزی دریشله به شکل دقیق از اهمیت بالایی برخوردار است، جملات مربوط به این شرایط باید از وزن بیشتری نسبت به سایر جملات برخوردار باشند. تجربه نشان می‌دهد که انتخاب این ضرایب در محدوده زیر معمولاً نتایج مناسبی را به همراه دارد:

$$\mathbf{w}_D^i = (10^4 \square 10^6) \mathbf{I}_{n_D \times n_D} \quad (33)$$

در رابطه (۳۳) ماتریس $\mathbf{I}_{n_D \times n_D}$ ماتریس همانی و از مرتبه n_D است. در نتیجه \mathbf{w}_D^i نیز یک ماتریس قطری و هم مرتبه با ماتریس همانی است. وجود ضرایب سختی در شرایط مرزی نیومان می‌تواند باعث بزرگ شدن بیش از حد ضرایب شده و دقت نتایج را کاهش دهد. از این رو \mathbf{w}_N^i به منظور تعدیل این اثر و به صورت یک ماتریس قطری با مرتبه n_N تعریف می‌شود. با تعریف \mathbf{b}_r^i به عنوان درایه‌ی Γ ام قطر اصلی \mathbf{w}_N^i و تعریف \mathbf{ln}_r^i به عنوان سطر Γ ام \mathbf{L}_N (متناظر با نقطه‌ی واسطه‌ی \mathbf{i} ام) می‌توان درایه‌های قطر اصلی ماتریس \mathbf{w}_N^i را به صورت زیر بدست آورد:

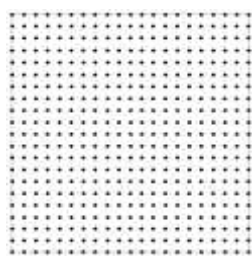
$$b_r^i = 10^3 \frac{Mean(Abs(\Psi EBF_h^c))}{Mean(Abs(\ln_r^i[\Psi_h]^c))}, \quad r = 1, \dots, n_N \quad (34)$$

که در آن منظور از $\ln_r^i[\Psi_h]^c$ اعمال شرط مرزی نیومان Γ ام بر توابع شکل درجات آزادی در نقطه مرکزی ابر است. Ψ_h به دلیل وجود ضرایب $\mathbf{h}(\alpha_i, \beta_i)$ در آن، توابع شکل تمام درجات آزادی در هر نقطه است. در صورتی که ΨEBF_h صرفاً یک ماتریس سطری و شامل توابع پایه (بدون در نظر گرفتن فضای پوچ ماتریس) است.

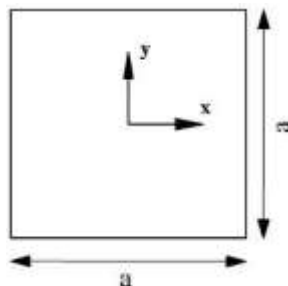
نتایج عددی

یک ورق چهار طرف مفصل با آرایش لایه‌ای $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ به طول $a = 20m$ و ضخامت h مطابق با شکل (۴) در نظر بگیرید. خواص مکانیکی هر لایه عبارت است از:

$$E_2 = E_3 = 10Gpa; E_1 = 25E_2; G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; G_{23} = 0.2E_2; \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \quad (35)$$



شکل ۵ - آرایش شبکه نقاط گره ای و واسطه



شکل ۴ - ورق مربعی به ضلع a

رفتار خمشی ورق تحت دو نوع بارگذاری یکنواخت و بارگذاری کسینوسی (نسبت به دستگاه مختصات در شکل ۴) مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$q(x, y) = q_0 \quad (36)$$

$$q(x, y) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \quad (37)$$

که در آن $q_0 = 100kN / m^2$ حداکثر مقدار بار است. مقادیر بدون بعد تغییر مکان قائم و تنش‌های خمشی و برشی در نقاط مختلفی از ورق نسبت به دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل (۴) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

(۳۸)

$$\bar{w} = \frac{100h^3 E_2}{q_0 a^4} w(a/2, a/2)$$

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}(a/2, a/2, z), \quad \sigma_{yy}^{(k)} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{yy}(a/2, a/2, z), \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xy}(a, a, z)$$

$$\sigma_{xz}^{(k)} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}(-a/2, 0, z), \quad \sigma_{yz}^{(k)} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yz}(0, -a/2, z)$$

در رابطه (۳۸) اندیس k شماره لایه مورد نظر را مشخص می‌کند. مطابق شکل (۵) دامنه حل با یک شبکه مربعی از نقاط و با فاصله $a/20$ گسسته سازی شده است. از این شبکه نقاط برای تعریف نقاط واسطه و نقاط گره‌ای استفاده می‌شود. جدول ۱ مقادیر بی بعد تغییر مکان قائم و تنش‌های خمشی و برشی را برای ورق $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ تحت بارگذاری سینوسی (SSL) و یکنواخت (UDL) برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت a/h ارائه و با مقادیر بدست آمده از حل ناویر [۱۳] مقایسه می‌کند. لازم به ذکر است که دستگاه مختصات در حل ناویر بر روی دو ضلع مجاور در نظر گرفته می‌شود و به همین دلیل (اختلاف مبدا مختصات در صورت مسئله و حل ناویر) بارگذاری حل ناویر از فرم کسینوسی خارج شده و فرم سینوسی به خود می‌گیرد.

جدول ۱- مقادیر تغییر مکان قائم و تنش‌های بدون بعد ورق $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ چهار طرف مفصل تحت بارگذاری سینوسی و یکنواخت

a/h	Method	\bar{w}	$\sigma_{11}^{(4)}(h/2)$	$\sigma_{22}^{(2)}(h/4)$	$\sigma_{12}^{(1)}(-h/2)$	$\sigma_{23}^{(2)}(0)$	$\sigma_{13}^{(1)}(-h/4)$
۱۰	SSL	۰/۶۶۹۳	۰/۵۱۳۴۰۲	۰/۳۶۱۴۲	۰/۰۲۵۱۸	۰/۰۹۱۴۵	۰/۴۰۸۸۸
		(۰/۶۶۹۳)	(۰/۵۱۳۴۱)	(۰/۳۶۱۴۲)	(۰/۰۲۵۱۷)	(۰/۰۹۱۴۵)	(۰/۴۰۸۸۸)
	UDL	۱/۲۱۹۲	۰/۷۷۱۹۱	۰/۳۰۷۴۳	۰/۰۵۱۴۴	۰/۳۳۱۳۵	۰/۷۷۰۴۹
		(۱/۲۱۸۸)	(۰/۷۷۱۸۷)	(۰/۳۰۷۲۲)	(۰/۰۵۱۳۸)	(۰/۳۳۱۰۷۵)	(۰/۷۵۴۸۶)
۲۰	SSL	۰/۴۹۲۱۴	۰/۵۳۱۸۳	۰/۱۹۹۶۶۷	۰/۰۲۲۳۳	۰/۰۷۵۸۷۷	۰/۴۲۰۵۶
		(۰/۴۹۲۱۴)	(۰/۵۳۱۸۳)	(۰/۱۹۹۶۷)	(۰/۰۲۲۳۳)	(۰/۰۷۵۸۸)	(۰/۴۲۰۵۶)
	UDL	۰/۷۵۷۲۴	۰/۷۹۸۳۶	۰/۲۲۲۹۴	۰/۰۴۵۱۵	۰/۳۱۰۷	۰/۷۸۵۳۳
		(۰/۷۵۷۲۳)	(۰/۷۹۸۳۲)	(۰/۲۲۲۷۴)	(۰/۰۴۵۲۸)	(۰/۲۹۰۱۹)	(۰/۷۶۹۷۰)
۱۰۰	SSL	۰/۴۳۳۷	۰/۵۳۸۴۷	۰/۱۸۰۳۸۳	۰/۰۲۱۳۳	۰/۰۷۰۳۸	۰/۴۲۴۷۹
		(۰/۴۳۳۷)	(۰/۵۳۸۴۱)	(۰/۱۸۰۳۹)	(۰/۰۲۱۳۲۵)	(۰/۰۷۰۳۱)	(۰/۴۲۴۷۳)
	UDL	۰/۶۶۹۸۹	۰/۸۰۷۴۵	۰/۱۹۲۶۴	۰/۰۴۲۷۶	۰/۳۰۴۹۳	۰/۷۹۰۴۵
		(۰/۶۶۹۶۹)	(۰/۸۰۷۱۷)	(۰/۱۹۲۵۱)	(۰/۰۴۲۶۵)	(۰/۲۸۴۲۱)	(۰/۷۷۴۴۶)

() مقادیر داخل پرانتز از مرجع [۱۳] و بر اساس حل دقیق مسئله نقل شده است.

نتیجه گیری

در مقاله حاضر روشی بدون نیاز به شبکه‌بندی به منظور حل مسائل خمشی ورق‌های کامپوزیت ضخیم تحت بارهای استاتیکی ارائه گردید. اساس این روش بدین صورت است که جواب همگن به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه نمایی هموار و با ضرایب متفاوت در هر ابر تقریب زده

می‌شود و این ضرایب با برآورده کردن شرایط مرزی در لبه های ورق و ایجاد پیوستگی در دامنه حل بدست می‌آیند. پاسخ خصوصی نیز با استفاده از یک سری دیگر از توابع پایه نمایی و با روندی مشابه با پاسخ همگن بدست می‌آید. نتایج ارائه شده حاکی از دقت بالای این روش و کارایی آن است. قابل ذکر است که این روش برای سایر ورق‌ها با شکل‌های نامنظم و سایر شرایط مرزی با هر نوع آرایش لایه‌ای قابل کاربرد است.

ضمیمه

ضرایب L_{ij} در رابطه (۴):

$$\begin{aligned} L_{11} &= -k_s (A_{55}d_1^2 + 2A_{45}d_1d_2 + A_{44}d_2^2) & L_{22} &= D_{11}d_1^2 + 2D_{16}d_1d_2 + D_{66}d_2^2 - k_s A_{55} \\ L_{12} &= -k_s (A_{55}d_1 + A_{45}d_2) & L_{23} &= D_{16}d_1^2 + (D_{12} + D_{66})d_1d_2 + D_{26}d_2^2 - k_s A_{45} \\ L_{13} &= -k_s (A_{45}d_1 + A_{44}d_2) & L_{33} &= D_{66}d_1^2 + 2D_{26}d_1d_2 + D_{22}d_2^2 - k_s A_{44} \end{aligned}$$

که ضرایب سختی A_{ij} و D_{ij} در مرجع [۱۳] تعریف شده است و:

$$d_1^m = \frac{\partial^m}{\partial x^m}, \quad d_2^m = \frac{\partial^m}{\partial y^m}, \quad k_s = \frac{5}{6}$$

مراجع

- [1] Mindlin, R. D.; "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates"; *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, (1951) pp. 31-38.
- [2] Reddy, J. N.; "A simple higher-order theory for laminated composite plates"; *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, (1984) pp. 745-752.
- [3] Lo, K., Christensen, R. and Wu, E.; "A high-order theory of plate deformation—part 2: laminated plates"; *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, (1977) pp. 669-676.
- [4] Levinson, M.; "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates"; *Mechanics Research Communications*, vol. 7, (1980) pp. 343-350.
- [5] Yildiz, H. and Sarikanat, M.; "Finite-element analysis of thick composite beams and plates"; *Composites Science and Technology*, vol. 61, (2001) pp. 1723-1727.
- [6] Kocak, S. and Hassis, H.; "A higher order shear deformable finite element for homogeneous plates"; *Engineering Structures*, vol. 25, (2003) pp. 131-139.
- [7] Zhang, Y. and Yang, C.; "Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates"; *Composite Structures*, vol. 88, (2009) pp. 147-157.
- [8] Donning, B. M. and Liu, W. K.; "Meshless methods for shear-deformable beams and plates"; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 152, (1998) pp. 47-71.
- [9] Belinha, J. and Dinis, L.; "Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method"; *Computers & Structures*, vol. 84, (2006) pp. 1547-1559.
- [10] Atluri, S. and Zhu, T.; "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics"; *Computational Mechanics*, vol. 22, (1998) pp. 117-127.
- [11] Ferreira, A.; "Thick composite beam analysis using a global meshless approximation based on radial basis functions"; *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 10, (2003) pp. 271-284.
- [12] Soleimanifar, E., Boroomand, B. and Mossaiby, F.; "A meshless method using local exponential basis functions with weak continuity up to a desired order"; *Computational Mechanics*, vol. 53, (2014) pp. 1355-1374.
- [13] Reddy, J. N.; "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis"; CRC Press, (2004).

[۱۴] مسیبی، ف؛ «حل مسائل مکانیک جامدات در محیط های محدود و نامحدود توسط روش های نیمه تحلیلی و اجزاء محدود»؛ رساله دکترا، دانشکده مهندسی عمران،