



کد مقاله: ۲-۱۳۳

## کمانش پوسته های استوانه ای کامپوزیتی با مقطع بیضی با استفاده از روش نوار

### محدود اسپیلاین تحت اثر فشار محوری

ندا کرکنی<sup>۱</sup>، داوود پورویس<sup>۲</sup>، شاپور مرادی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، [Nedkorkeai@gmail.com](mailto:Nedkorkeai@gmail.com)

۲ و ۳- عضو هیأت علمی، دانشگاه شهید چمران اهواز

### چکیده

پوسته های استوانه ای با مقطع بیضی عناصر سازه ای جدار نازک می باشند که در صنایع مختلف نظیر هوافضا و دریایی کاربرد دارند. این سازه ها به دلیل ظرافت خاص، تحت بار فشاری، مستعد کمانش بوده و از ظرفیت پس از کمانش آنها نیز استفاده می شود، بنابراین پایداری آنها اهمیت می یابد. در این مقاله بار کمانش، با استفاده از تحلیل خطی مقدار ویژه بدست می آید. در این تحقیق از روش نوار محدود اسپیلاین استفاده می گردد که در آن از توابع اسپیلاین درجه ۳ در جهت طولی و از توابع انتروپولاسیون لاگرانژ با مرتبه های مختلف در جهت محیطی استفاده می شود. مواد مصرفی از نوع الاستیک خطی شامل ارتوترپ است. از معایب مواد کامپوزیتی مقاومت پایین آنها در برش می باشد، و با توجه به اینکه تئوری کلاسیک از تغییر شکل برشی صرف نظر می کند برای تحلیل از تئوری تغییر شکل مرتبه اول استفاده می شود. روابط کرنش تغییر مکان از تئوری غیرخطی ساندرز بدست می آید. نتایج حاصل با نرم افزار المان محدود آباکوس و با تحقیقات پیشین مقایسه و صحت سنجی می شوند.

**کلمات کلیدی:** کامپوزیت، پوسته استوانه ای با مقطع بیضی، نوار محدود اسپیلاین، مقدار ویژه

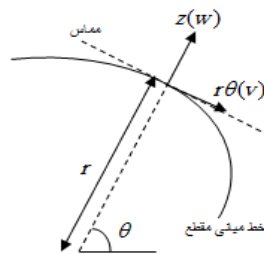
### ۱- مقدمه

پوسته های استوانه ای کاربردهای بسیار زیادی در صنایع مختلف نظیر هوافضا و دریایی دارند، به همین علت تحقیقات نظری و تجربی در مورد پوسته ها روز به روز افزایش چشمگیری داشته است. پوسته های استوانه ای با مقطع دایره، مؤلفه های سازه ای ساده ای دارند ولی ممکن است به علت ملاحظات خاص طراحی و یا فرایند ساخت، مقطع غیر دایره ای باشد. این امر نه تنها پیچیدگی هندسه پوسته را به همراه دارد بلکه پایداری سازه را نیز تحت تاثیر قرار می دهد. از طرفی استفاده از مواد کامپوزیتی به دلیل مقاومت، سختی زیاد، وزن کم یکی از موارد بسیار مناسب برای به کارگیری در این عناصر می باشند. کاربرد این مواد در ساخت بدنه کشتی ها، هواپیماها، سیلواها، مخازن و قطعات الکترونیکی و غیره روز به روز افزایش می یابد. به دلیل ظرافت خاص پوسته های استوانه ای کامپوزیتی، در اثر اعمال بار فشاری به آنها مستعد کمانش بوده و معمولاً از ظرفیت پس از کمانش این سازه ها نیز استفاده می شود. بابو و ردی [1] فرکانس های طبیعی یک پانل استوانه ای که در دو لبه منحنی خود مفصلی و در دو لبه مستقیم آزاد می باشد را به کمک روش نوار محدود محاسبه کردند. آقایان فن و چونگ [2] اولین کسانی بودند که از روش نوار محدود اسپیلاین در مهندسی استفاده کردند. آنها برای اولین بار از توابع اسپیلاین موضعی برای درونیابی طولی نوارها در تحلیل صفحات استفاده کردند.

بعدها نیز این توابع توسط یانگ و چنگ [3] و میزوزو [4] در تحلیل سازه ها به کار گرفته شدند. چن و ژانگ [5] با استفاده از روش نوار محدود مرکب بار کمانش پوسته های استوانه ای تقویت شده با رینگ را تحت اثر فشار هیدرواستاتیکی محاسبه کردند. شرایط تکیه گاهی استوانه موردنظر در دو انتها مفصلی بوده و با استفاده از روش مقدار ویژه بار کمانش در مدهای مختلف محاسبه شده است. اویسی و فضیلتی [6] مسئله پایداری ورق های کامپوزیتی و پوسته های استوانه ای کامپوزیتی را با استفاده از روش نیمه تحلیلی نوار محدود بررسی کردند. آقایان پاتل، مونتو، گوپتا [7] پایداری استوانه ای با مقطع بیضی شکل را تحت فشار محوری به روش المان محدود بررسی کردند.

## ۲- تئوری و استخراج معادلات پوسته

مقطع پوسته استوانه ای بیضی شکل می باشد و دارای شعاع انحنا و زاویه انحنای متغیر است که از این دو ویژگی هندسی مقطع در روابط مربوطه استفاده شده است [۸].



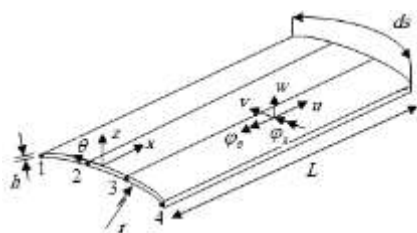
شکل ۱- هندسه مقطع بیضی

$$r(\theta) = \frac{A^2 B^2}{(A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

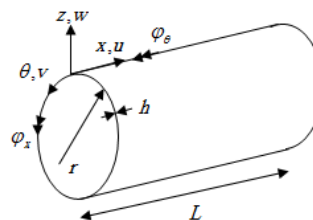
$$\theta = a \operatorname{rctan}\left(\frac{A}{B} \tan \alpha\right)$$

در رابطه (۱) A و B به ترتیب شعاع بزرگ و شعاع کوچک مقطع است و **Error! Reference source not found.** رابطه ی بین زاویه ی مرکز بیضی ( $\alpha$ ) و زاویه انحنای ( $\theta$ ) را نشان می دهد. شعاع انحنای  $r(\theta)$  و زاویه انحنای ( $\theta$ ) از رابطه (۱) به دست می آید.

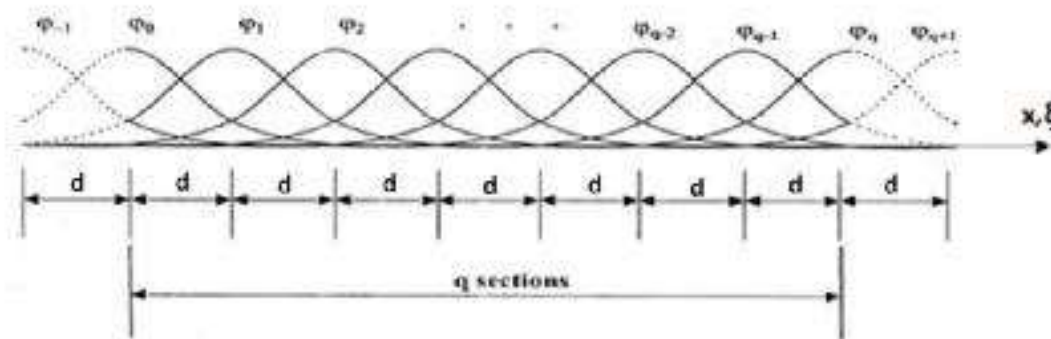
در این مقاله برای تحلیل کمانش خطی پوسته استوانه ای از المان های نواری طولی که از توابع درجه ۳ اسپیلاین در راستای طول آنها و توابع لاگرانژ درجه ۴ در جهت محیط استفاده می شود، همچنین از سیستم مختصات  $(x, \theta, z)$  مطابق شکل استفاده شده است.



شکل ۳- المان های نواری مورد استفاده



شکل ۲- درجات آزادی و سیستم مختصات  $(x, \theta, z)$



شکل ۴- وضعیتی از قرارگرفتن اسپیلاین ها روی طول المان

به دلیل اهمیت تغییرشکل برشی در سازه های ساخته شده از مصالح کامپوزیتی باید از یک تئوری که بتواند تغییرشکل برشی را در معادلات لحاظ کند، استفاده کرد. به همین دلیل، تمامی تحلیل های انجام شده در این تحقیق با در نظرگرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول صورت گرفته است.

(۲)

$$U(x, \theta, z) = u(x, \theta) + z \cdot \varphi_s(x, \theta)$$

$$V(x, \theta, z) = v(x, \theta) + z \cdot \varphi_\theta(x, \theta)$$

$$W(x, \theta, z) = w(x, \theta)$$

در تحلیل حاضر برای تخمین توابع تغییرمکان و جابجایی از بسط توابع لاگرانژ و توابع اسپیلاین به صورت زیر استفاده می شود.

(۳)

$$\begin{aligned}
u(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=-1}^{q+1} u_{mn} N_m^u(\theta) \phi_n^u(x) \\
v(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=-1}^{q+1} v_{mn} N_m^v(\theta) \phi_n^v(x) \\
w(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=-1}^{q+1} w_{mn} N_m^w(\theta) \phi_n^w(x) \\
\varphi_x(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=-1}^{q+1} \varphi_{xmn} N_m^{\varphi_x}(\theta) \phi_n^{\varphi_x}(x) \\
\varphi_\theta(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=-1}^{q+1} \varphi_{\theta mn} N_m^{\varphi_\theta}(\theta) \phi_n^{\varphi_\theta}(x)
\end{aligned}$$

در رابطه (۳)،  $\phi(x)$  توابع اسپیلین درجه ۳ و  $N(\theta)$  توابع لاگرانژ درجه ۳ می باشد که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\phi_i(x) = \frac{1}{3!} \begin{cases} 0 & -2 \geq \xi \\ (\xi+2)^3 & -2 \leq \xi \leq -1 \\ (\xi+2)^3 - 4(\xi+1)^3 & -1 \leq \xi \leq 0 \\ (2-\xi)^3 - 4(1-\xi)^3 & 0 \leq \xi \leq 1 \\ (2-\xi)^3 & 1 \leq \xi \leq 2 \\ 0 & \xi \geq 2 \end{cases} \quad (۴)$$

(۵)

$$N_1(\zeta) = -\frac{9}{16}(\eta^3 - \eta^2 - \frac{1}{9}\eta + \frac{1}{9})$$

$$N_2(\zeta) = \frac{27}{16}(\eta^3 - \frac{1}{3}\eta^2 - \eta + \frac{1}{3})$$

$$N_3(\zeta) = -\frac{27}{16}(\eta^3 + \frac{1}{3}\eta^2 - \eta - \frac{1}{3})$$

$$N_4(\zeta) = \frac{9}{16}(\eta^3 + \eta^2 - \frac{1}{9}\eta - \frac{1}{9})$$

بار کمانش پوسته با استفاده از رابطه (۶) و از حل مقدار ویژه حاصل می شود. در این رابطه  $\lambda_{cr}$  ضریب بار کمانش پوسته می باشد و از ضرب  $\lambda_{cr}$  در بار وارده به پوسته بار کمانش بدست می آید.

$$|\mathbf{K}_L - \lambda_{cr} \mathbf{K}_G| = 0 \quad (۶)$$

در این رابطه  $K_L$  ماتریس سختی خطی و  $K_G$  ماتریس سختی هندسی می باشد و با استفاده از اصل کارمجازی طبق رابطه (۷) محاسبه می شوند.

$$\delta W_{int}^{sh} = \int_V \left[ \sigma_{xx} \times \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \times \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{x\theta} \times \delta \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \times \delta \gamma_{xz} + \tau_{\theta z} \times \delta \gamma_{\theta z} \right] dV \quad (۷)$$

روابط میان مولفه های خطی کرنش با تغییر مکان طبق تئوری پوسته ساندرز به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right\} & \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \kappa_x &= \frac{\partial \beta_S}{\partial s} & \kappa_\theta &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} & \kappa_{x\theta} &= \frac{\partial \beta_\theta}{\partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \beta_S}{\partial \theta} + \frac{1}{2R} \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \\ \gamma_{xz} &= \beta_s + \frac{\partial w}{\partial s} & \gamma_{\theta z} &= \beta_\theta + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right\} \end{aligned} \quad (۸)$$

در رابطه (۸)،  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_x$  کرنش های نرمال،  $\gamma_{x\theta}$  کرنش برشی سطح میانی پوسته،  $\kappa_x, \kappa_\theta$  انحناهای نرمال،  $\kappa_{x\theta}$  انحنا پیچشی سطح میانی پوسته و  $\gamma_{\theta z}, \gamma_{xz}$  کرنش های برشی در جهت ضخامت پوسته می باشد.

مولفه های غیر خطی کرنش با تغییر مکان طبق تئوری پوسته ساندرز به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{nl} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^2 + \frac{1}{8R^2} \left\{ R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\}^2 & \gamma_{x\theta}^{nl} &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \left\{ \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right\} \\ \varepsilon_\theta^{nl} &= \frac{1}{2R^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right\}^2 + \frac{1}{8R^2} \left\{ R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\}^2 \end{aligned} \quad (۹)$$

و همچنین نیروهای درونی پوسته با کرنش ها به صورت زیر بیان می شوند.

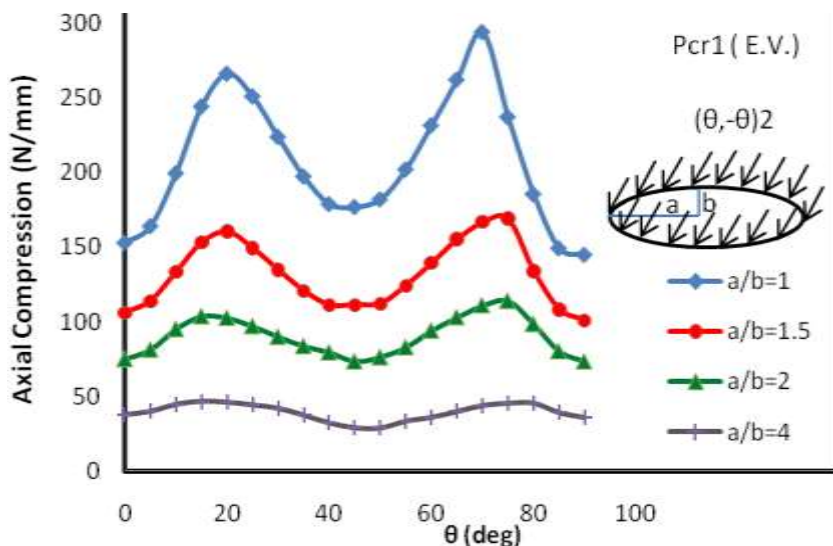
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_x \\ \gamma_\theta \end{Bmatrix} \quad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰)،  $A_{ij}, B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب سختی کششی، سختی پیچشی و سختی خمشی پوسته کامپوزیتی چند لایه می باشد.  $N_x, N_\theta$  نیروهای نرمال و  $M_x, M_\theta$  لنگرهای خمشی و  $Q_x, Q_\theta$  نیروهای برشی می باشند.

### ۳- نتایج

**مسئله ۱:** در این مثال بارکمانش پوسته استوانه ای دو سر مفصل تحت اثر فشار محوری برای لایه بندی  $[\theta/-\theta]_2$  برای طول ۱۰۰ میلیمتر و ضخامت ۱ میلی متر برای نسبت شعاع های متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. در این مثال از ۳۰ المان با چهارگره در محیط استفاده شده است. طول هر المان نواری نیز به ۲۰ قسمت تبدیل شده است.

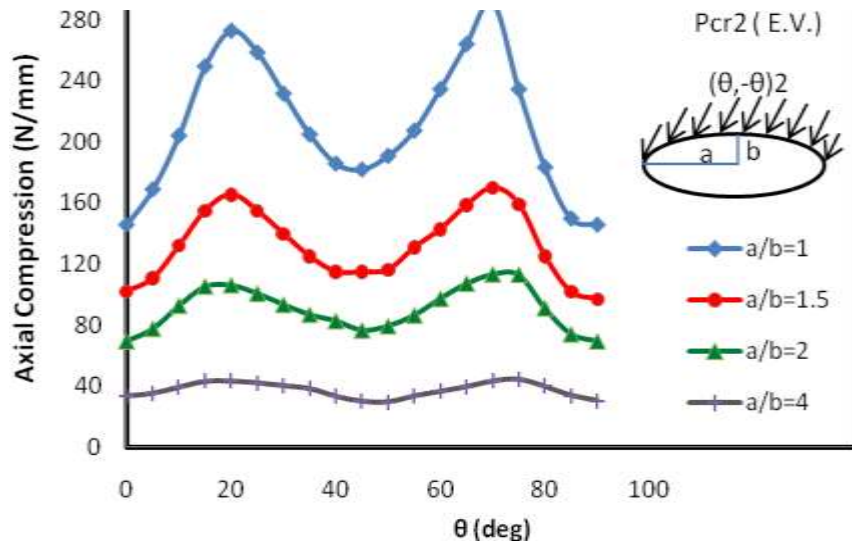
$$E_1 = 206.844 \text{GPa}, E_2 = E_3 = 18.6159 \text{GPa}, G_{12} = G_{13} = 4.48162 \text{GPa}, G_{23} = 2.551 \text{GPa}, \nu = 0.21$$



تحت بارگذاری یکنواخت

شکل ۵: تأثیر نسبت های شعاعی متفاوت بر روی بار کمانش از تحلیل مقدار ویژه پوسته استوانه ای کامپوزیتی با لایه بندی

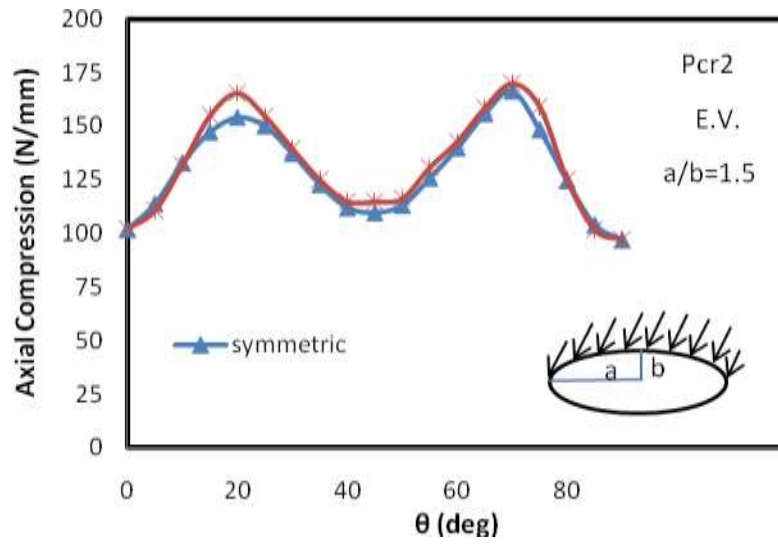
محوری



شکل ۶: تأثیر نسبت‌های شعاعی متفاوت بر روی بار کماتش از تحلیل مقدار ویژه پوسته استوانه ای کامپوزیتی با لایه بندی تحت بارگذاری غیر یکنواخت محوری وارد شده بر روی نیمه بزرگ تر محیط مقطع

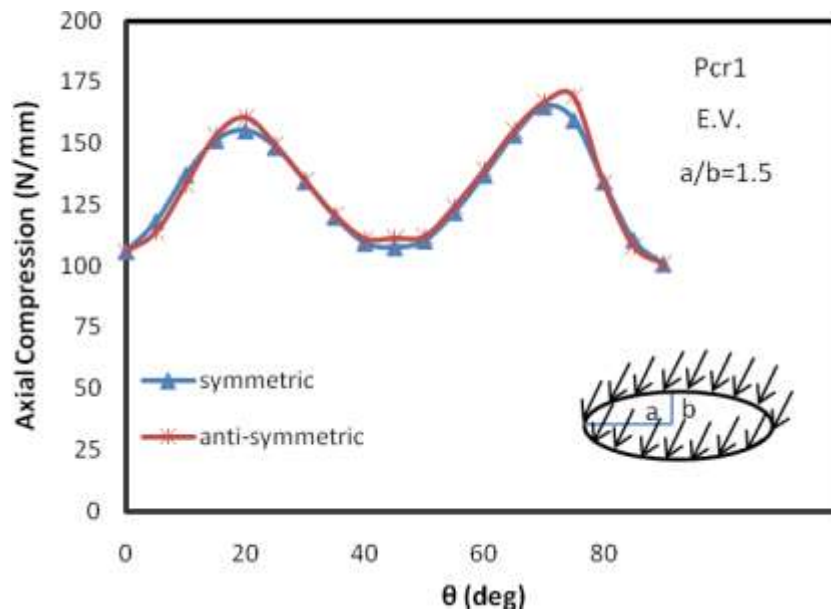
**مسئله ۲:** در این مثال بار کماتش پوسته استوانه ای دو سر مفصل تحت اثر فشار محوری برای لایه بندی  $[\theta/-\theta]_s$  و  $[\theta/-\theta]_2$  برای طول ۱۰۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ میلی‌متر برای نسبت شعاع های متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. در این مثال از ۳۰ المان با چهارگره در محیط استفاده شده است. طول هر المان نواری نیز به ۲۰ قسمت تبدیل شده است.

$$E1 = 206.844 \text{ GPa} , E2 = E3 = 18.6159 \text{ GPa} , G12 = G13 = 4.48162 \text{ GPa} , G23 = 2.551 \text{ GPa} , \nu = 0.21$$



شکل ۷: تأثیر دو لایه‌بندی

و بر روی بار کمانش از تحلیل مقدار ویژه پوسته استوانه ای کامپوزیتی با نسبت شعاعی ۱,۵ و تحت بارگذاری غیر یکنواخت محوری وارد شده بر روی نیمه بزرگ تر محیط مقطع



شکل ۸: تأثیر دو لایه‌بندی  $(\theta, -\theta)_s$  و  $(\theta, -\theta)_2$  بر روی بار کمانش از تحلیل مقدار ویژه پوسته استوانه ای کامپوزیتی با نسبت شعاعی ۱,۵۰ و تحت بارگذاری یکنواخت محوری وارد شده بر محیط بیضی



**مسئله ۳:** در این مثال بارکمانش پوسته استوانه ای دو سر مفصل تحت اثر فشار محوری یکنواخت توسط برنامه نوشته شده محاسبه شده است و نتایج بدست آمده از آن با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. در این مثال از ۴۰ المان با چهارگره در محیط استفاده شده است. طول هر المان نواری نیز به ۲۰ قسمت تبدیل شده است.

$$R = 100\text{mm}, t = 1\text{mm}, E_{11} = 176\text{Gpa}, E_{22} = 7.04\text{Gpa}, \nu_{12} = 0.25, G_{12} = G_{13} = 3.52\text{Gpa}, G_{23} = 1.408\text{Gpa}$$

جدول ۱: مقایسه نتایج تحلیل مقدار ویژه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و نتایج بدست آمده از ABAQUS برای فشار بحرانی محوری پوسته استوانه ای کامپوزیتی با لایه بندی متفاوت و نسبت شعاع‌های مختلف و طول استوانه  $100\text{mm}$  ( $h=1\text{mm}$ )

L=100mm						
	a/b=1		a/b=0.5		a/b=0.3	
لایه بندی	تحلیل حاضر (E.V.) N/mm	آباکوس (E.V.) N/mm	تحلیل حاضر (E.V.) N/mm	آباکوس (E.V.) N/mm	تحلیل حاضر (E.V.) N/mm	آباکوس (E.V.) N/mm
$(0)_\lambda$	92.46	92.032	42.56	42.025	23.9	24.81
$(90)_\lambda$	89.78	90.96	39.66	40.85	20.89	20.18
$(0,90)_{\lambda s}$	139.01	139.15	69.1	69.81	34.07	33.62
$(0,90,90,0)_s$	140.6	141.45	72.23	73.94	34.2	34.35

جدول ۲: مقایسه نتایج تحلیل مقدار ویژه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و نتایج بدست آمده از ABAQUS برای فشار بحرانی محوری پوسته استوانه ای کامپوزیتی با لایه بندی متفاوت و نسبت شعاع‌های مختلف و طول استوانه  $200\text{mm}$  ( $h=1\text{mm}$ )

L=200mm						
	a/b=1		a/b=0.5		a/b=0.3	
لایه بندی	تحلیل حاضر (E.V.) N/mm	آباکوس (E.V.) N/mm	تحلیل حاضر (E.V.) N/mm	آباکوس (E.V.) N/mm	تحلیل حاضر (E.V.) N/mm	آباکوس (E.V.) N/mm
$(0)_\lambda$	91.2	91.95	42.9	42.06	20.1	20.68
$(90)_\lambda$	89.09	89.82	39.9	40.87	19.34	20.2
$(0,90)_{\lambda s}$	138.05	139.15	67.48	67.49	34.7	33.64
$(0,90,90,0)_s$	140.89	141.5	68.28	68.28	35.67	34.38

#### ۴- نتیجه گیری:

نمودارها برای تعداد ۴۰ المان چهار گرهی ( $nelem = 40, Nnod = 3$ ) در جهت محیطی و ۲۰ مقطع طولی ( $q = 9$ ) بدست آمده‌اند. تحلیل‌های انجام شده تا حدودی نشان دهنده این مطلب است که با کاهش سطح بارگذاری محوری، تنش‌های کمتری در پوسته ایجاد می‌شود که باعث سخت‌تر شدن پوسته شده و در نتیجه در مقدار بار بیشتری کمانش می‌کند. همانطور که در نمودار شکل‌های ۵ و ۶ ملاحظه می‌شود با افزایش نسبت  $a/b$  نمودار به حالت افقی نزدیکتر می‌شود و بار کمانشی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش زاویه قرارگیری لایه‌ها نمودارها حالت متقارنی پیدا می‌کنند و بیشترین مقدار بار کمانش را در نزدیکی زاویه‌های ۲۰ و ۷۰ دیده می‌شود. مقایسه‌ای که بین دو لایه‌بندی  $(\theta_1, -\theta_1)_s$  و  $(\theta_1, -\theta_1)_r$  در نمودار شکل‌های ۷ و ۸ انجام شده است نشان می‌دهد که تحت فشار یکنواخت و غیریکنواخت محوری این دو لایه‌بندی با افزایش زاویه لایه‌ها رفتار مشابهی داشته و جزء در نقاط ماکزیمم نمودارها در بقیه نقاط دارای مقدار بار کمانش تقریباً برابری می‌باشند. از جدول ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود با افزایش طول بار بحرانی کاهش یافته و همچنین با کاهش نسبت شعاع‌ها و نزدیک شدن مقطع به بیضی بار بحرانی کاهش می‌یابد.

#### مراجع

- [1] Thangam, P.V., Babu, Reddy, D.V., "Frequency analysis of orthotropic circular cylindrical panels by the finite strip method", Building Science, Vol.8(3), 1973, pp. 229-241.
- [2]- S.C.Fan and Y.K.Cheung; Analysis of shallow shells by spline finite strip method, Engineering Structures, Vol.5(4), 1983, pp: 255-263.
- [3].Yang,H.Y, and chong,K,P., " Finite strip Method with X-spline Function", computers and structures, Vol.18, No.1, pp.127-132, 1984.
- [4].Mizusawa, T., Kajita, T., and Naruoka, M., "Buckling of skew Plate structures Using B-spline Function," International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.15, pp.87-96, 1980.
- [5] Chen, W., Zhang, W., "Buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shells by compound strip method", Elsevier Science publisher, 1993, pp. 135-141.
- [6] Ovesy, H.R., Fazilati, J., "Stability analysis of composite laminated plate and cylindrical shell structures using semi-analytical finite strip method", Composite Structures, Vol.89, 2009, pp. 467-474.
- [7].B.P.Patel, C.S.Munot, S.S.Gupta, C.T. Ambandam, M. Ganapathi " Application of higher-order finite element for elastic stability Analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells", finite Element in Analysis and Design, 40, pp, 1083-1104(2003)
- [^].B.P.Patel, k.k.Shukla, Y.Nath. "Thermal buckling of laminated cross-ply Oval cylindrical Shell", composite structures, 65, pp 217-229, (2004).