



کد مقاله: ۱-۱۶۰

## تحلیل خطا در تحلیل ایزوژئومتریکی و بررسی روش بهبودسازی افزودن گره

بتول نژاد محمودآبادی<sup>۱</sup>، سعید شجاعی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، [batol62@yahoo.com](mailto:batol62@yahoo.com)

۲- عضو هیأت علمی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

### چکیده

تحلیل سازه در نهایت منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می شود که دارای پیچیدگی های زیادی است و با استفاده از روش های عددی قابل حل است. تحلیل ایزوژئومتریکی بر پایه توابع نرَبز، یکی از جدیدترین روش های آنالیز مسائل مهندسی به شمار می رود که با توجه به مزایایی از جمله یکپارچه کردن مدل سازی هندسه و تحلیل مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله به تشریح روشی بر پایه نرَبز، جهت تخمین خطای میدان تنش و شار پتانسیل به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته شده است. در این روش با استفاده از نقاط فوق همگرا با قید معادلات تعادل به بهبود میدان تنش و شار پتانسیل می پردازیم. جهت بررسی این روش به مدل سازی و تحلیل یک مسئله تنش و یک مسئله پتانسیل دارای حل تحلیلی و مقایسه نتایج به دست آمده از این روش و حل تحلیلی پرداخته شده است، هم چنین تکنیک بهبودسازی افزودن مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** تحلیل خطا، ایزوژئومتریکی، بهبودسازی، بهبود تنش، بهبود شار پتانسیل.

### ۱- مقدمه

استفاده از روش بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی اولین بار توسط حسنی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [۱]، [۲]. روش استفاده از نقاط فوق همگرا مانند روش SPR در اجزای محدود برگرفته از خاصیت فوق همگرایی تنش در نقاط انتگرال گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط فوق همگرایی گوسی برای هر مولفه تنش، یک سطح بهبود یافته تشکیل می شود که جهت برآورد خطای ایزوژئومتریکی مورد استفاده قرار می گیرد [۱]. روش دوم استفاده از نیروهای وارد بر وصله های تحلیل ایزوژئومتریکی و محاسبه تنش بهبود یافته است. این روش مشابه روش REP در اجزای محدود می باشد. در این روش با بکارگیری نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریکی، سطح مربوط به هر مولفه تنش با استفاده از توابع شکل نرَبز هم مرتبه با توابع مورد استفاده در تخمین تابع جابجایی تقریب زده می شود [۲]. در مقاله مذکور به معرفی روش بهبود تنش و بهبود شار پتانسیل با استفاده از نقاط فوق همگرا با قید معادلات تعادل می پردازیم. اساس این روش مشابه روش LP در اجزا محدود است [۳]. در اجزا محدود این روش برای بهبود میدان تنش به کار برده شده است. در این مقاله از این روش در ایزوژئومتریکی برای بهبود تنش و شار پتانسیل استفاده می کنیم. نحوه فرمول بندی در ادامه شرح داده شده است.

## ۲- شرح روش بهبود تنش

در روش ایزوژئومتری یک میدان کرنش و تنش حاکم بر مسئله، با مشتق گیری از میدان جا به جایی به دست آمده از حل تقریبی محاسبه می شود، که این امر باعث کاهش مرتبه همگرایی تنش نسبت به جا به جایی می شود. اما نقطه هایی وجود دارد که در آن ها مرتبه همگرایی شیب یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل وابسته به حل تقریبی انتظار می رود بالاتر است، در نتیجه تنش حاصل از حل تقریبی نسبت به دیگر نقطه ها از دقت بیشتری برخوردار می باشد. به همین دلیل این نقطه ها را نقطه های فراهمگرا می نامند. در تحلیل ایزوژئومتری یک دو بعدی این نقطه های فراهمگرا بر نقطه های گوسی قرار می گیرند [۱].

میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفه تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جا به جایی) استفاده شده است، به دست می آید. یک سطح نربز زمانی به دست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات  $X$  و  $Y$  هر نقطه کنترلی توسط کاربر، تنها مولفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافته تنش، مولفه  $Z$  نقطه کنترلی می باشد. نحوه محاسبه مختصات  $Z$  نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید به دست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتری یک است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می شود.

سطح بهینه هر یک از مولفه های بردار تنش در داخل هر ناحیه را می توان به طور زیر بیان کرد.

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j} a_{i,j} \quad (1)$$

$$\sigma_p = R^T a \quad (2)$$

که  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{a}$  به ترتیب، بردار تابع های شکل نربز و بردار مختصات نقطه های کنترلی می باشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R = [R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,n}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,n}, \dots, R_{m,n}]^T \quad (3)$$

$$a = [a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{m,n}]^T \quad (4)$$

که در آن  $n$  شمار نقطه های کنترلی در جهت  $Y$  و  $m$  شمار نقطه های کنترلی در جهت  $X$  هر ناحیه است [1].

ضرایب مجهول بردار  $\mathbf{a}$  که در واقع مختصات  $Z$  نقاط کنترلی می باشند با روش حداقل مربعات و با استفاده از خطای تنش در نقاط فوق همگرا و معادله تعادل به دست می آیند.

در ابتدا اختلاف تنش بین مقدار به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری یک و تنش بهبود یافته در نقاط گوس را محاسبه می کنیم. برای این منظور تابع خطا را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$e_i = \sum_{i=1}^k (\sigma_{pi} - \sigma_{hi}) = \sum_{i=1}^k (R_i^T a - \sigma_{hi}) \quad (5)$$

که در آن  $\sigma_{hi}$  تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتری یک می باشد.

با توجه به عدم ارضای معادلات تعادل توسط تنش بازیافتی به دست آمده از روش نقاط فوق همگرا بویژه در نزدیک مرزها، با استفاده از قید معادلات تعادل، سعی بر بهبود کارایی برآورد کننده خطا شده است.

معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی نیروی حاکم بر یک مسئله دو بعدی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

$$\sigma n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (7)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (8)$$

که در آن  $L$  عملگر مشتق می باشد و  $\sigma$  ،  $b$  و  $\bar{t}$  به ترتیب بردارهای تنش، نیروهای حجمی و نیروهای سطحی می باشند.

$n$  بردار یکه عمود بر هر نقطه از مرز و به سمت خارج سطح می باشد. با استفاده از روش کار مجازی صورت ضعیف معادله به صورت زیر به دست می آید:

$$\delta II = \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega = 0 \quad (9)$$

در صورت وجود تعادل در کل دامنه هر وصله نیز از دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی نیز در شرایط تعادل قرار دارد.

$$\delta II_{residual} = \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon^T \sigma_p d\Omega - \int_{\Gamma_t^p} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega_p} \delta u^T b d\Omega = \int_{\Omega_p} B^T \sigma_p d\Omega - \int_{\Gamma_t^p} R^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega_p} R^T b d\Omega \quad (10)$$

که در آن  $B$  ماتریس مشتقات توابع شکل نریز و  $R$  و  $a$  مطابق رابطه (۳) و (۴) می باشند.

با توجه به معادله (۱) و (۲) می توان قسمت اول معادله (۱۰) را به شکل زیر بیان کرد:

$$\int_{\Omega_p} B^T \sigma_p d\Omega = \left( \int_{\Omega_p} B^T R d\Omega \right) a = Ca \quad (11)$$

که در آن

$$C = \int_{\Omega_p} B^T R d\Omega \quad (12)$$

قسمت دوم و سوم معادله (۱۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\Gamma_t^p} R^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_p} R^T b d\Omega = F_p \quad (13)$$

با جانشینی معادله های (۱۲) و (۱۳) در معادله (۱۰) معادله زیر به دست می آید:

$$\delta II_{residual} = (Ca - F_p) = R_{eq} \quad (14)$$

همانگونه که مشاهده می شود، تنها عامل مجهول برای تعیین این سطح بهبود یافته، بردار  $a$  می باشد. با استفاده از روش حداقل مربعات تابع به شکل زیر تعریف می شود:

$$F(a) = \sum_{i=1}^k e_i^T e_i + R_{eq}^T R_{eq} \quad (15)$$

$$= \sum_{i=1}^k (Ra - \sigma_h)^T (Ra - \sigma_h) + (Ca - F_p)^T (Ca - F_p)$$

که در آن  $k$  تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می باشد.  
با کمینه کردن تابع  $F(a)$  به شکل زیر مقدار مجهول محاسبه می شود.

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a} = 0 \quad (16)$$

$$\left( \sum_{i=1}^k R^T R + C^T C \right) a = \sum_{i=1}^k R^T \sigma_h + C^T F_p$$

با مشخص شدن بردار نقاط کنترلی برای هر مولفه تنش سطح تنش مربوط به آن نیز به دست می آید.

## ۲- شرح روش بهبود پتانسیل

در روش ایزوژئومتریکی شار پتانسیل، با مشتق گیری از پتانسیل به دست آمده از حل تقریبی محاسبه می شود، که این امر باعث کاهش مرتبه همگرایی شار پتانسیل نسبت به پتانسیل می شود.

بنابراین با استفاده از روشی سعی می کنیم شار پتانسیل دقیق تری به دست آوریم.

سطح بهینه شار پتانسیل در داخل هر ناحیه را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$q_p = R^T a \quad (17)$$

برای تعیین ضرایب نامعلوم بردار  $a$  از روش زیر استفاده می کنیم.

در ابتدا اختلاف شار بین مقدار به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و شار بهبود یافته در نقاط گوس را محاسبه میکنیم. برای این منظور تابع خطا را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$e_i = \sum_{i=1}^k (q_{p_i} - q_{h_i}) = \sum_{i=1}^k (R_i^T a - q_{h_i}) \quad (18)$$

که در آن  $q_{h_i}$  شار به دست آمده از روش ایزوژئومتریکی است.

در صورت وجود تعادل در کل دامنه هر وصله نریز از دامنه مدل سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی نیز در شرایط تعادل قرار دارد.

$$\int_{\Omega} \nabla R^T \cdot \nabla R d\Omega U = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_{N_i}} R^T h_i d\Gamma \quad (19)$$

با توجه به معادله (۱۷) قسمت اول معادله (۱۹) را می توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\int_{\Omega_p} \nabla R^T \cdot q_p d\Omega = \left( \int_{\Omega_p} \nabla R^T \cdot R^T d\Omega \right) a = Ca \quad (20)$$

که در آن

$$C = \int_{\Omega_p} \nabla R^T \cdot R^T d\Omega \quad (21)$$

قسمت دوم معادله (۱۹) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_{N_i}} R^T h_i d\Gamma = F_p = \int_{\Omega_p} \nabla R^T q_h d\Omega \quad (22)$$

با جانشینی معادله های (۲۱) و (۲۲) در معادله (۱۹) معادله زیر به دست می آید.

$$(Ca - F_p) = R_{eq} \quad (23)$$

همانگونه که مشاهده می شود، تنها عامل مجهول برای تعیین این سطح بهبود یافته، بردار  $a$  می باشد. با استفاده از روش حداقل مربعات تابع به شکل زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} F(a) &= \sum_{i=1}^k e_i^T e_i + R_{eq}^T R_{eq} \\ &= \sum_{i=1}^k (Ra - q_h)^T (Ra - q_h) + (Ca - F_p)^T (Ca - F_p) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $k$  تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه است.

با کمینه کردن تابع  $F(a)$  به شکل زیر مقدار مجهول محاسبه می شود.

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a} = 0 \quad (25)$$

$$\left( \sum_{i=1}^k R^T R + C^T C \right) a = \sum_{i=1}^k R^T q_h + C^T F_p$$

با مشخص شدن بردار  $a$ ، شار پتانسیل به دست می آید.

#### ۴- نرم خطای انرژی برای مسئله تنش

در حالت کلی، خطا اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی به دست آمده از روش عددی می باشد. بنابراین خطای تنش به صورت زیر به دست می آید:

$$e_{\sigma} = \sigma - \bar{\sigma} \quad (26)$$

که در آن  $\sigma$  میدان تنش دقیق و  $\bar{\sigma}$  تنش حاصل از حل تقریبی است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می توان از میدان تنش بهبود یافته به دست آمده از روش بازیافت تنش استفاده نمود. بنابراین خطای تقریبی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\bar{e}_{\sigma} = \sigma_p - \bar{\sigma} \quad (27)$$

رابطه اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می کند، بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می شود.

یکی از معروف ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می شود [4]:

$$\|e\| = \left[ \int_{\Omega} (\sigma - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

در این رابطه  $\sigma$  مقدار دقیق بردار تنش،  $\bar{\sigma}$  تنش بدست آمده از حل تقریبی،  $D$  ماتریس الاستیسیته و  $\Omega$  دامنه المان می باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته ی آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می شود: [4]

$$\|e\| = \|\bar{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\sigma_p - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma_p - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

که در اینجا  $\sigma_p$  تنش بازیافتی و  $\bar{\sigma}$  تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می دهد. برای بعضی مسائل خاص که حل دقیق مسئله موجود است می توان علاوه بر نرم خطای انرژی تقریبی، نرم خطای انرژی دقیق را نیز به دست آورد. نسبت نرم خطای تقریبی کل دامنه به نرم خطای دقیق آن، بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا می باشد که این نسبت شاخص تاثیر محاسبه گر خطا نامیده می شود و مطابق زیر نمایش داده می شود [4]:

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|_{total}}{\|e\|_{total}} \quad (30)$$

هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تاثیر به سمت واحد میل نماید.

### ۵- نرم خطای انرژی برای مسئله پتانسیل

خطای شار پتانسیل را می توانیم به صورت زیر تعریف کنیم.

$$e_q = q - \bar{q} \quad (31)$$

که در آن  $q$  شار پتانسیل دقیق و  $\bar{q}$  شار حاصل از حل تقریبی است. اما به دلیل عدم دسترسی به شار دقیق می توان از شار بهبود یافته به دست آمده از روش بهبود شار پتانسیل استفاده نمود. بنابراین خطای تقریبی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\bar{e}_q = q_p - \bar{q} \quad (32)$$

رابطه اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می کند، بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می شود.

همان طور که در مبحث قبل شرح داده شد برای بیان خطای تنش از نرم خطای انرژی استفاده می کنیم. می توانیم این نرم خطا را برای مسئله پتانسیل به صورت زیر بنویسیم.

$$\|e\| = \left[ \int_{\Omega} (q - \bar{q})^T k^{-1} (q - \bar{q}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

در این رابطه  $q$  مقدار دقیق شار پتانسیل،  $\bar{q}$  شار بدست آمده از حل تقریبی،  $k$  ماتریس همرفت و  $\Omega$  دامنه المان می باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل موجود می باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق شار از میزان بهبودیافته ی آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می شود: [4]

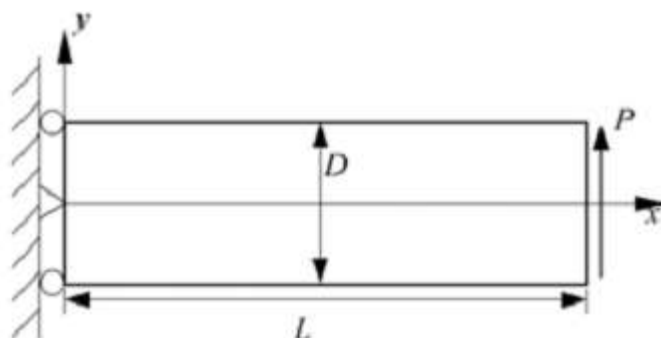
$$\|\bar{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (q_p - \bar{q})^T k^{-1} (q_p - \bar{q}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

که در اینجا  $q_p$  شار بازیافتی و  $\bar{q}$  شار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می دهد. در نتیجه شاخص تاثیر محاسبه گر خطا به صورت زیر تعریف می شود.

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|_{total}}{\|e\|_{total}} \quad (35)$$

### ۶- تیر طره تیموشنکو

اولین مثالی که روش ارائه شده بر روی آن بررسی می شود، تیر طره تیموشنکو می باشد. شکل ۱. پارامترهای به کار برده شده در این آنالیز به صورت زیر می باشد.



شکل 1: تیر طره در شرایط تنش مستوی

$$L = 8, D = 1, P = 1, E = 100000, \nu = 0.25$$

تنش های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن توسط تیموشنکو و گودیر به صورت زیر ارائه شده است.

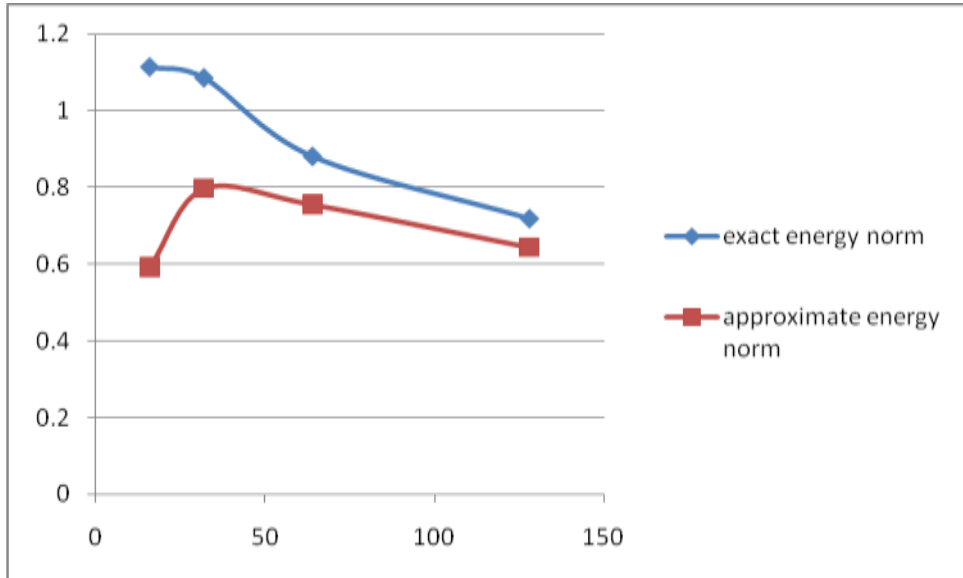
$$\sigma_x = \frac{-P(L-x)\left(y - \frac{D}{2}\right)}{I}; \sigma_y = 0; \tau_{xy} = \frac{-Py(y-D)}{2I} \quad (36)$$

که در آن  $I = \frac{D^3}{12}$  می باشد. برای مدلسازی اولیه به روش ایزوژئومتریک از ۴ نقطه کنترلی، یک المان و توابع شکل نرئز مرتبه دو استفاده می کنیم. بردارهای گرهی در جهت  $\Xi$  و  $\eta$  برای برآورد میدان تنش بازیافتی به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\Xi = \{0, 0, 1, 1\}, \eta = \{0, 0, 1, 1\} \quad (37)$$

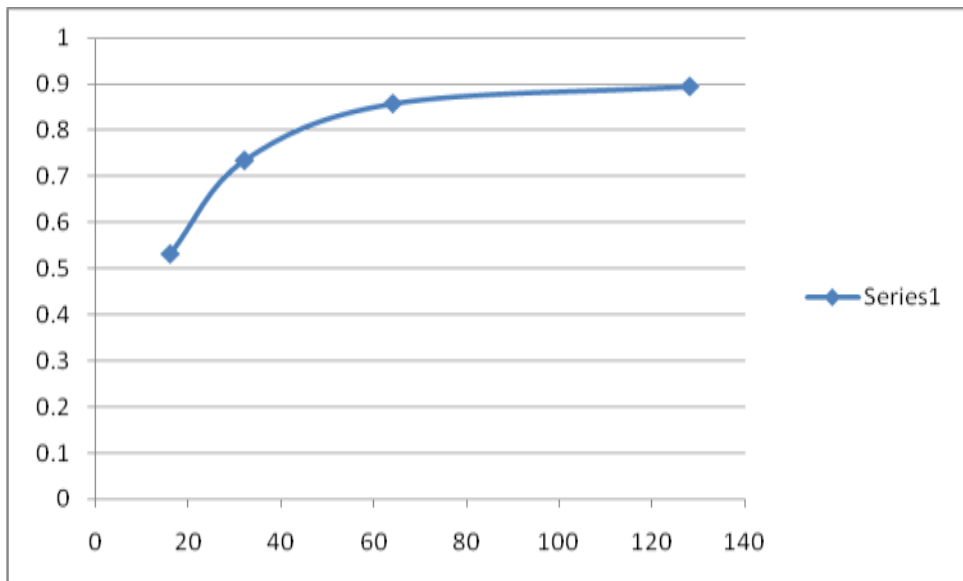
حال برای بررسی تکنیک بهبودسازی بر روی روش بهبود تنش و بررسی نرم خطا مش اولیه را با استفاده از تکنیک افزودن گره ارتفا می دهیم. مش جدید ایجاد شده دارای ۱۶ المان و ۲۵ نقطه کنترلی می باشد. روند بهبودسازی را با افزودن گره به مش اولیه ادامه می دهیم و چهار مش بهبود یافته با روش افزودن گره می سازیم. پس از ساخت مش های بهبود یافته، مثال را با چهار مش ساخته شده تحلیل می کنیم. تحلیل در مش اول بهبود یافته برای ۱۶ نقطه کنترلی و ۲۵ المان، مش دوم ۳۲ نقطه کنترلی و ۴۵ المان، مش سوم ۶۴ نقطه کنترلی و ۸۵ المان و در مش چهارم برای ۱۲۸ نقطه کنترلی و ۱۶۵ المان انجام می شود. نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق برای هر مش در شکل 2 ترسیم شده است. همان طور که مشاهده می شود، تشابه در نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه گر خطای پیشنهادی است. همچنین مشاهده می شود که با افزودن گره دو نمودار به هم نزدیک می شوند، که این نشان دهنده تاثیر بهبودسازی افزودن گره بر روی روش پیشنهادی است. این نتایج نشان می دهد که با افزایش المان ها نتایج به دست آمده از دقت بیشتری برخوردار می شوند.





شکل 2: نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق بهبودسازی افزودن گره

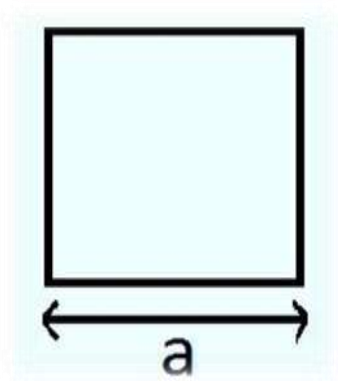
افزایش شاخص تاثیر و نزدیک شدن آن به یک با افزایش المان در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: نمودار تغییرات شاخص تاثیر با بهبودسازی افزودن گره

#### ۷- حل مسئله پتانسیل

در دومین مثال به حل یک مسئله پتانسیل مطابق شکل زیر می پردازیم. شکل ۴



شکل ۴: مربعی به ضلع یک متر

شرایط مرزی مسئله مطابق زیر می باشد.

$$\begin{aligned} U(0, y) = 0, U(1, y) = 0 \\ U(x, 0) = x(1-x), U(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

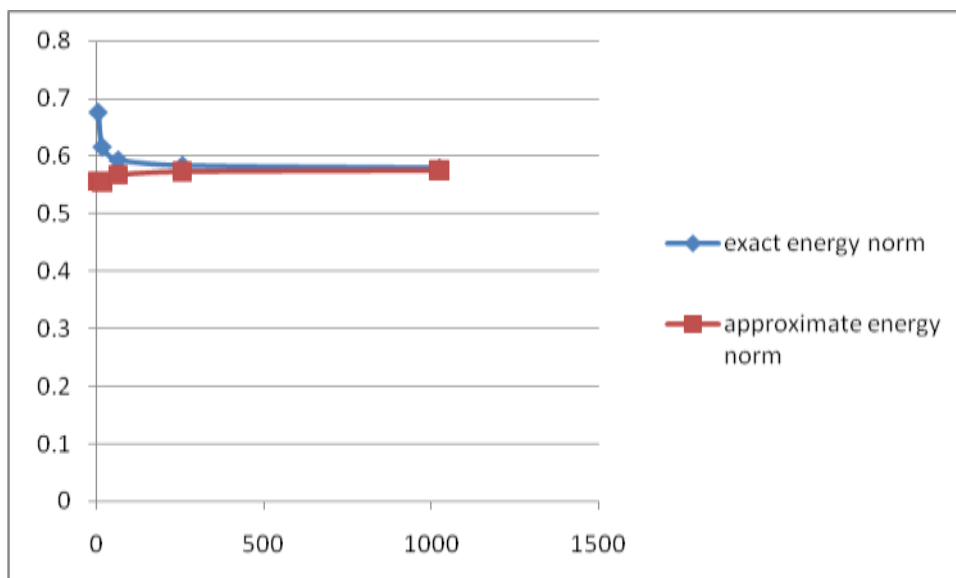
حل دقیق این مسئله مطابق روابط زیر تعریف می شود.

$$ExactU(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(n\pi x) ((-1)^n - 1) \sinh(n\pi(1-y))}{\sinh(n\pi) n^3 \pi^3} \quad (39)$$

برای مدلسازی اولیه به روش ایزوژئومتریک از ۴ نقطه کنترلی، یک المان و توابع شکل نرئز مرتبه دو استفاده می کنیم. بردارهای گرهی در جهت  $\Xi$  و  $\eta$  برای برآورد میدان تنش بازیافتی به صورت زیر تعریف می شوند.

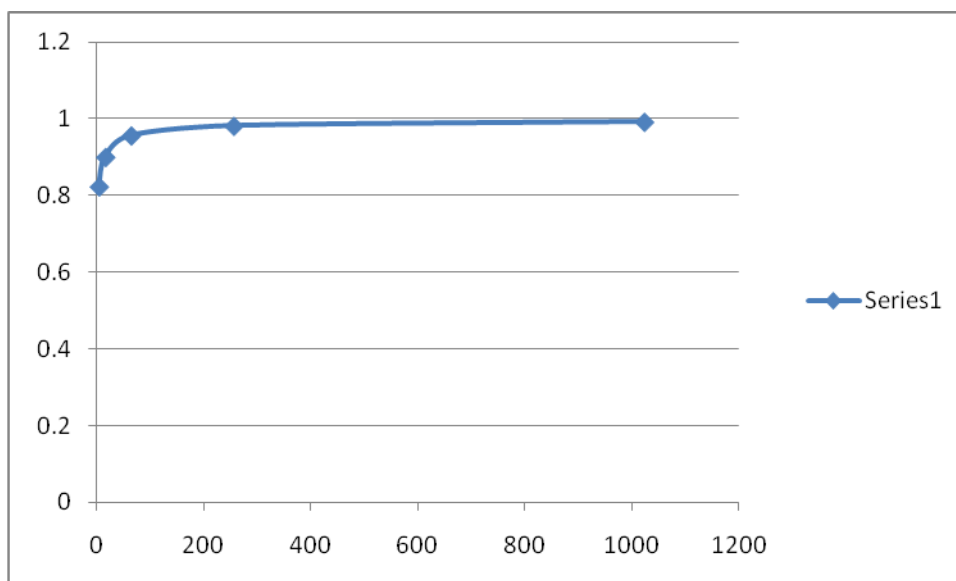
$$\Xi = \{0, 0, 1, 1\}, \eta = \{0, 0, 1, 1\} \quad (40)$$

حال برای بررسی تکنیک بهبودسازی بر روی روش بهبود تنش و بررسی نرم خطا مش اولیه را با استفاده از تکنیک افزودن گره ارتقا می دهیم. مش جدید ایجاد شده دارای ۴ المان و ۹ نقطه کنترلی می باشد. روند بهبودسازی را با افزودن گره به مش اولیه ادامه می دهیم و پنج مش بهبود یافته با روش افزودن گره می سازیم. پس از ساخت مش های بهبود یافته، مثال را با پنج مش ساخته شده تحلیل می کنیم. تحلیل در مش اول بهبود یافته برای ۹ نقطه کنترلی و ۴ المان، مش دوم ۲۵ نقطه کنترلی و ۱۶ المان، مش سوم ۸۱ نقطه کنترلی و ۶۴ المان، مش چهارم ۲۸۹ نقطه کنترلی و ۲۵۶ المان و در مش پنجم برای ۱۰۸۹ نقطه کنترلی و ۱۰۲۴ المان انجام می شود. نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق برای هر مش در شکل ۵ ترسیم شده است. همان طور که مشاهده می شود، تشابه در نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه گر خطای پیشنهادی است. همچنین مشاهده می شود که با افزودن گره دو نمودار به هم نزدیک می شوند، که این نشان دهنده تاثیر بهبودسازی افزودن گره بر روی روش پیشنهادی است. این نتایج نشان می دهد که با افزایش المان ها نتایج به دست آمده از دقت بیشتری برخوردار می شوند.



شکل ۵: نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق بهبودسازی افزودن گره

افزایش شاخص تاثیر و نزدیک شدن آن به یک با افزایش المان در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۶: نمودار تغییرات شاخص تاثیر با بهبودسازی افزودن گره

#### ۸- نتیجه گیری

در این مقاله روش جدید برای برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل و حل معادلات دیفرانسیل به روش ایزوژئومتریکی تشریح و همچنین تکنیک بهبودسازی افزودن گره بر روی این روش اعمال گردید. با توجه به نتایج به دست آمده برای شاخص تاثیر و همچنین تطابق تقریبی نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی برای مسئله تنش و پتانسیل ذکر شده در این مقاله، می توان از این روش برای برآورد خطا و بهبود تنش و شار پتانسیل به دست آمده از روش ایزوژئومتریکی استفاده کرد. همچنین با استفاده از تکنیک بهبودسازی افزودن گره نرم خطای انرژی تقریبی و دقیق به هم نزدیک می شود.

- [1] Hassani B, Ganjali A, Tavakkoli M.. *An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. Eur J Mech A-Solid* ;31: 109-101, 2012.
- [2] حسنی بهروز، گنجعلی احمد. استفاده از نیروهای وارد بر وصله های تحلیل ایزوژئومتریکی جهت محاسبه تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطا
- [3] T. Lee, H. C. Park and S. W. Lee, *A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint, Int. J. Numer. Meth. Engng* ; 40: 1139-1160, 1997.
- [4] Zienkiewicz OC, Talor RL, J Z Zhu. *The Finite Element Method, 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann*, 2005.