



ارائه یک مدل ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده در انتقال حرارت هدایتی ناپایدار یک بعدی با منبع حرارتی درونی

بهروز عباسی سورکی^۱، نوشاعصاره^۱، آرمان مهرانی^۲، مهروز امیدی^۲

بخش مهندسی شیمی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
(Email Adress: b.abbasy@gmail.com)

چکیده

در این مقاله، یک مدل ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده در انتقال حرارت رسانشی یک بعدی ناپایدار با منبع حرارتی و با استفاده از روش تقریب چند جمله‌ای ارائه گردیده است. نتایج به دست آمده از مدل با استفاده از نرم افزار متلب و اعمال روش های اختلاف محدود در عددهای بیو مختلف با روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج به دست آمده نشان داد که مدل ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده از خطای بسیار کمتری نسبت به مدل ظرفیت گرمایی فشرده معمولی که از طریق نوشتن موازنه انرژی حول جسم به دست می آید، برخوردار است و در محدوده بزرگتری از عددهای بیو قابل اعتماد است.

واژه‌های کلیدی: ظرفیت گرمایی، فشرده، اصلاح شده، تقریب چند جمله‌ای، عدد بیو

1. مقدمه

روش ظرفیت گرمایی فشرده بر این فرض استوار است که دمای جسم در هر لحظه از فرآیند غیر دائم از نظر مکانی یکنواخت است. بر اساس این فرض گرادیان دما در داخل جسم ناچیز است. طبق قانون فوریه، نبود گرادیان دما به معنای نامحدود بودن مقدار ضریب رسانایی گرمایی ماده است. روشن است که چنین شرطی

1- استادیار مهندسی شیمی

2- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی شیمی

در عمل غیر ممکن است. هر چند هرگز این شرط به طور دقیق ارضا نمی شود، ولی اگر مقاومت رسانشی در داخل جسم در مقایسه با مقاومت همرفتی بین جسم و محیطش کوچک باشد، این تقریب قابل قبول است. با چشم پوشی از گرادیان دما در داخل جسم، دیگر نمی توان مساله را در چارچوب معادله گرما بررسی نمود. در این حالت تغییرات دمای جسم را با انجام موازنه انرژی کل روی ماده به دست می آوریم. تعیین شرایطی که در آن می توان از این روش با دقت قابل قبولی استفاده نمود حائز اهمیت است. در کتب انتقال حرارت [1 و 2] معیار استفاده از روش ظرفیت گرمایی فشرده، محدوده عدد بدون بعد بیو (Bi) است که این عدد برابر است با نسبت مقاومت رسانشی در داخل جسم (نسبت بعد مشخصه جسم به ضریب هدایت حرارت آن: Lc/K) به مقاومت همرفتی بین جسم و محیط اطراف آن ($1/h$). بعد مشخصه جسم (Lc) برابر است با نسبت حجم به سطح جسم. برای عددهای بیو کمتر از 0/1 گرادیان دما در جسم کوچک بوده و اساسا تمام اختلاف دما بین جسم و سیال است و دمای جسم در همه جای آن بصورت تقریبا یکنواخت با زمان تغییر می کند. در حالتی که منبع گرمایی وجود ندارد اگر $Bi < 0/1$ باشد خطای استفاده از روش ظرفیت گرمایی فشرده کم است. [1]

کشاوری و طاهری [3]، با استفاده از حل معادله انتقال حرارت رسانشی یک بعدی ناپایدار بدون منبع گرمایی، از طریق روش تقریب چند جمله ای یک مدل ظرفیت گرمایی فشرده ارائه دادند که خطای آن در اعداد بیو به مراتب بزرگتر از 0/1 نیز بسیار نا چیز است. از آنجا که روش ظرفیت گرمایی فشرده، روشی ذاتا ساده است در نتیجه در حل مسایل هدایتی گذرا کاربرد وسیعی دارد [4].

از کاربردهای مهم این روش می توان به مدل سازی ریاضی انتقال حرارت در خشک کردن مواد غذایی به کمک امواج میکروویو اشاره کرد که از جمله مثال های عملی و پر کاربرد انتقال حرارت همراه با منبع گرمایی می باشد. در این تحقیق این موضوع برای حالتی که منبع گرمایی وجود دارد مورد بررسی و تجزیه تحلیل قرار گرفت.

2- تئوری

2-1- حل معادله انتقال حرارت به روش تقریب چند جمله ای :

معادله انتقال حرارت یک بعدی ناپایدار همراه با منبع گرمایی و شرط جابجایی در سطح همراه با شرایط اولیه و مرزی مربوطه به صورت زیر نوشته می شود [2و1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{rc} \begin{cases} m = 0 \rightarrow \text{plate} \\ m = 1 \rightarrow \text{cylinder} \\ m = 2 \rightarrow \text{sphere} \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad @ \quad r = 0 \quad (2)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_{\infty}) \quad @ \quad r = R \quad (3)$$



سیزدهمین کنگره ملی مهندسی شیمی ایران
و اولین کنفرانس بین‌المللی منطقه‌ای مهندسی شیمی و نفت

$$I.C \quad T = T_0 \quad @ \quad t = 0 \quad (4)$$

در معادلات فوق T دمای جسم، R شعاع برای استوانه و کره و یا نصف ضخامت برای صفحه، q شدت انرژی گرمایی تولیدی در واحد حجم، ρ چگالی، C ظرفیت گرمایی ویژه، α ضریب نفوذ پذیری گرمایی، h ضریب انتقال حرارت جابجایی، k ضریب هدایت حرارتی، t زمان، T_∞ دمای محیط و T_0 دمای اولیه جسم میباشد. به منظور انجام محاسبات، ابتدا باید معادله انتقال حرارت بی بعد شود. با استفاده از تغییر متغیر های زیر و پس از بی بعد کردن، معادله و شرایط مرزی اولیه فوق به صورت زیر در می آید:

$$q = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, B = \frac{hR}{k}, t = \frac{at}{R^2}, x = \frac{r}{R}, G = \frac{R^2 q}{k(T_0 - T_\infty)} \quad (5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \frac{\partial q}{\partial x} \right) + G \quad (6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad at \quad a = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -Bq \quad at \quad x = 1 \quad (8)$$

$$q = 1 \quad at \quad t = 0 \quad (9)$$

حال با استفاده از روش تقریب چند جمله ای [5] معادله فوق را حل می کنیم، در این روش فرض می کنیم جواب به صورت یک چند جمله ای بر حسب توانهای x (مکانی) همراه با ثابت های زمانی $a(\tau)$ باشد:

$$q_p = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 \quad (10)$$

با استفاده از شرط مرزی اول:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_1(t) = 0 \quad (11)$$

در نتیجه:

$$q_p = a_0(t) + a_2(t)x^2 \quad (12)$$

دمای میانگین برای صفحه نامحدود، استوانه نامحدود و کره به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{q} = \frac{\int_0^1 q x^m dx}{\int_0^1 x^m dx} = |m + 1| \int_0^1 x^m q dx \quad (13)$$

با قرار دادن معادله (12) در (13) داریم:

$$\bar{q} = a_0 + \frac{m + 1}{m + 3} a_2 \quad (14)$$

با ضرب طرفین معادله (6) در $x^m dx$ و انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int_0^1 x^m \frac{\partial q}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx + \int_0^1 \frac{x^m R^2 q}{k(T_0 - T_\infty)} dx \quad (15)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = (m + 1) \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=1} + G \quad (16)$$

با توجه به شرط مرزی دوم و معادله (12) داریم:

$$\frac{\partial q_p}{\partial X} \Big|_{x=1} = 2a_2 \quad (17)$$

در نتیجه:

$$-2a_2 = B(a_0 + a_2) \quad (18)$$

با جایگزینی معادله (18) در (14) و (17) داریم:

$$\frac{\partial q_p}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{-B(m+3)}{m+B+3} \bar{q}_p \quad (19)$$

با توجه به معادله (16) و (19) داریم:

$$\frac{\partial \bar{q}_p}{\partial t} = \frac{-B(m+1)(m+3)}{m+B+3} \bar{q}_p + G \quad (20)$$

با حل معادله خطی فوق با شرایط اولیه داریم:

$$\bar{q}_p = G \times \frac{M+B+3}{B(m+1)(m+3)} \left(1 - e^{-\frac{B(m+1)(m+3)}{m+B+3}t} \right) + e^{-\frac{B(m+1)(m+3)}{m+B+3}t} \quad (21)$$

با توجه به تعریف اعداد بدون بعد بیو و فوریه داریم:

$$Bi = \frac{hR}{K(m+1)} \quad (22)$$

$$FO = (m+1)^2 \frac{at}{R^2} \quad (23)$$

در نتیجه از معادله (21) داریم:

$$\bar{q}_p = G \times \frac{Bi(m+1)}{Bi(m+1)^2} + 1 \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{\frac{m+1}{m+3} Bi + 1} Bi Fo \right) \right) + \exp \left(-\frac{1}{\frac{m+1}{m+3} Bi + 1} Bi Fo \right) \quad (24)$$

2-2- حل مساله از طریق روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی :



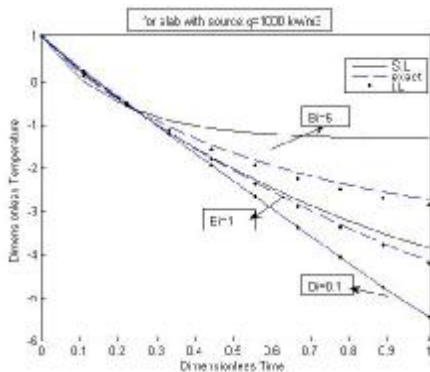
اگر از طریق روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی و از طریق نوشتن موازنه انرژی حول جسم مساله حل شود، معادله زیر به دست می آید:

$$q_p = G \times \frac{1}{Bi(m+1)^2} (1 - e^{-BiFo}) + e^{-BiFo} \quad (25)$$

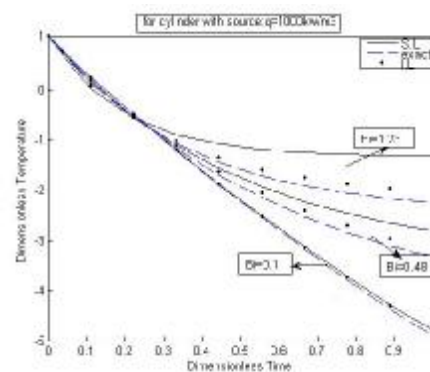
3- نتایج و بحث

با استفاده از نرم افزار متلب مدل لامپ اصلاح شده به دست آمده از روش تقریب چند جمله ای با روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی و روش های تحلیلی مورد مقایسه و بررسی قرار گرفت. در این بررسی ها نتایج حاصل از روش اختلاف محدود که بیشترین تطابق را با نتایج حاصل از روش های تحلیلی دارد به عنوان مرجع قرار داده شد.

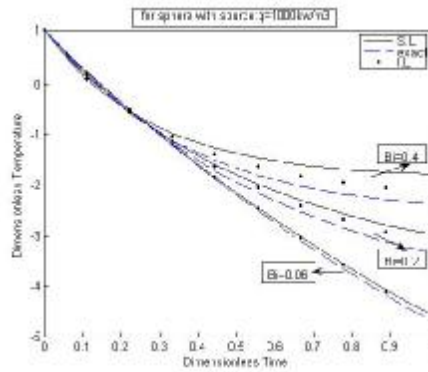
شکل (1) مربوط به یک تیغه به ضخامت 2 (cm)، استوانه و کره به شعاع 1 (cm) ضریب هدایت گرمایی 0/5 (w/m°C) و دمای اولیه 20°C که دارای منبع حرارتی به شدت 1000 (kw/m³) و در محیطی به دمای 50°C قرار دارد. در این شکل نتایج به دست آمده از روش های ظرفیت گرمایی فشرده معمولی، لامپ اصلاح شده و اختلاف محدود در سه عدد بیو مختلف رسم شده اند. کاملاً واضح است که نمودار مربوط به نتایج حاصل از روش لامپد اصلاح شده که به صورت نقطه چین می باشد با نمودار نتایج حاصل از روش اختلاف - محدود که به صورت خط چین می باشد مطابقت بیشتری دارد. همانطور که انتظار می رود، با افزایش عدد بیو میزان خطا نسبت به روش مرجع اختلاف محدود افزایش می یابد، ولی سرعت رشد خطای روش ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده کمتر از روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی می باشد. در نمودارهای شکل (2) در یک عدد بیو ثابت برای تیغه، استوانه و کره با شرایط عملیاتی ذکر شده، توان گرمایی منبع حرارتی تغییر داده شد و نمودارهای دمای بی بعد بر حسب زمان بی بعد در 4 حالت منبع حرارتی مقایسه گردید. همانطور که مشاهده می شود با افزایش توان گرمایی منبع حرارتی میزان خطاها افزایش یافته است و باز هم نمودار مربوط به نتایج حاصل از روش ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده با نمودار نتایج حاصل از روش اختلاف محدود مطابقت بیشتری دارد.



ب

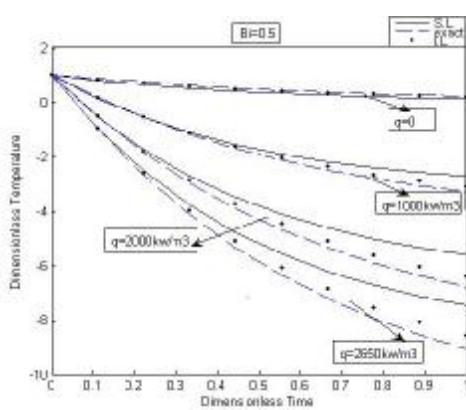


الف

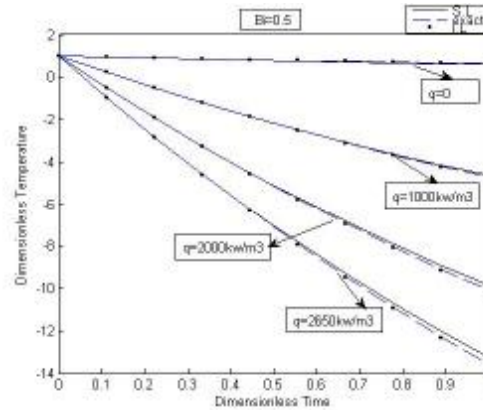


ج

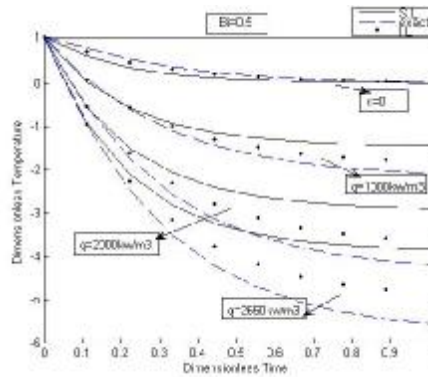
شکل 1- نمودار دمای بدون بعد بر حسب زمان بدون بعد برای الف) تیغه ب) استوانه ج) کره در دمای اولیه 20°C ، دمای محیط 50°C و در معرض انرژی حرارتی 1000 kw/m^3 و در Bi های مختلف



ب)



ف)



ج)

شکل 2- نمودار دمای بدون بعد بر حسب زمان بدون بعد برای الف) تیغه ب) استوانه ج) کره در $\text{Bi}=0.5$ با توان منبع حرارتی متفاوت.



برای تعیین میزان دقت مدل‌های مختلف در صد خطای مدل‌های مختلف بررسی می‌شود. درصد خطای نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \left| \frac{q_{F.D} - q_{Lumped}}{q_{F.D}} \right| \times 100 \quad (26)$$

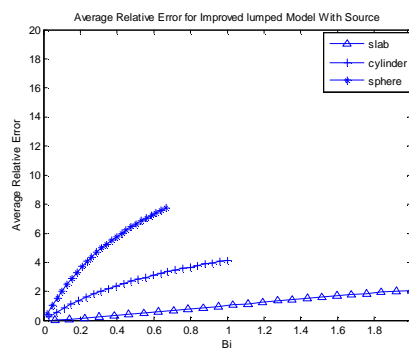
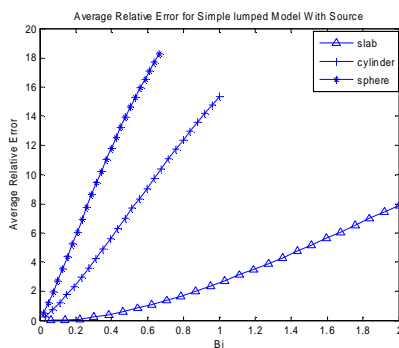
در فرمول بالا از دماهای بدون بعد برای محاسبه خطا استفاده شده است، پس از مدتی که جسم به تعادل می‌رسد خطای بدست آمده از فرمول بالا نامعین می‌گردد بنابراین باید از دماهای اصلی استفاده شود که در این صورت درصد خطای نسبی در هر زمانی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

اگر بازه زمانی به N نقطه تقسیم شود، متوسط درصد خطای نسبی در هر عدد بیو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E = \left| \frac{T_{F.D} - T_{Lumped}}{T_{F.D}} \right| \times 100 = \left| \frac{q_{F.D} - q_{Lumped}}{q_{F.D} + \frac{T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}} \right| \times 100 \quad (27)$$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N} \quad (28)$$

در شکل‌های (4) و (5) متوسط درصد خطای نسبی نتایج حاصل شده از روش‌های لامپ اصلاح شده و لامپ معمولی در عدد‌های بیو مختلف برای تیغه، استوانه و کره در شرایط یکسان با هم مقایسه شده‌اند. این شکل‌ها نشان می‌دهند که دقت روش ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده به مراتب بیشتر از روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی می‌باشد.



شکل 5- نمودار متوسط خطای نسبی روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی تیغه، استوانه و کره به ضخامت و قطر 2 (cm) دمای اولیه 20°C که در دمای محیط 50°C، که در معرض انرژی گرمایی به شدت 1000 (kw/m3) قرار دارد.

شکل 4 - نمودار متوسط خطای نسبی روش لامپ اصلاح شده تیغه، استوانه و کره به ضخامت و قطر 2 (cm) دمای اولیه 20°C که در دمای محیط 50°C، و در معرض انرژی گرمایی به شدت 1000 (kw/m3) قرار دارد.

با توجه به شکل (4) و (5) و همانطور که در بالا به آن اشاره شده، با افزایش عدد بیو متوسط درصد خطای نسبی نیز افزایش می یابد که این خطاها در روش لامپ اصلاح شده به مراتب کمتر از روش ظرفیت گرمایی فشرده معمولی می باشد. همچنین با دقت در نمودار متوسط خطا برای تیغه در شکل (4) مشاهده می شود که برای اعداد بیو کوچکتر از 2 خطا در روش لامپ اصلاح شده 2% می باشد.

4- نتیجه گیری:

نتایج به دست آمده نشان می دهد که مدل ظرفیت گرمایی فشرده اصلاح شده که از طریق روش تقریب چند جمله ای به دست می آید، دارای دقت به مراتب بیشتری از مدل ظرفیت گرمایی فشرده معمولی می باشد و همچنین با افزایش عدد بیو از رشد خطای کمتری نسبت به روش ظرفیت گرمای فشرده معمولی برخوردار است و بنابراین در محدوده بزرگتری از اعداد بیو قابل اعتماد است.

مراجع

- [1]- J. P. Holman, Heat Transfer, 5th Edition, Mcgraw-Hill, New York, 1981.
- [2]- F. P. Incropera, D. D. Witt, Introduction to Heat Transfer, fourth edition,
- [3]- P. Keshavarz, M. Taheri, An improved lumped analysis for transient heat conduction by using the polynomial approximation method, Springer-Verlag, Heat mass Transfer, 43, (2007) pp.1151-1156.
- [4]- F. Alhama, J. Zueco, Application of a lumped model to solids with linearly temperature-dependent thermal conductivity, ScienceDirect, Applied Mathematical Modeling, 31, (2007) pp.302-310.
- [5]- R. G. Rice, D. D. Do, Applied Mathematics and modeling for chemical engineers, 3rd edition, Wiley, New York, 1994.



An Enhanced Lumped Model for Transient Heat Conduction with Intenal Heat Generation

B. Abbasi Souraki*, N. Assareh , A. Mehrani , M. Omid

Chemical Engineering Department, Faculty of Engineering, The University of Guilan, Rasht, Iran
b.abbasy@gmail.com

Abstract

In this study, an enhanced lumped heat capacity model was developed for unsteady state one-dimensional heat conduction with heat source, using the polynomial approximation method. Results of this model were compared with the classical lumped capacity method using a MATLAB program and finite difference method. Results showed that enhanced lumped heat capacity model predicted temperature more accurately than classical lumped model and could be used in higher Biot numbers than those for the classical lumped model.

Keywords: Heat capacity, Enhanced, Polynomial approximation, Biot numbers.