حل هسته‌های $^{137}_{56}Ba$ و $^{194}_{78}Pt$ باپتانسیل‌های مورس و دیویدسون بهروش تکرار مجانبی[1]

سیده زهره آقامیری
سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای،

چکیده:

مدل جمعی بوهر یکی از مدل‌های هسته‌ای برای توصیف رفتار هسته‌های سنگین در انرژی‌های تحریک پایین می‌باشد.طیف این نوع هسته‌ها با تقارن‌های دینامیکی گروه‌های جبری SU(3)، SO(6) و U(5)توصیف می‌گردند. پتانسیل‌های دیویدسون و مورس،گذار فاز از حالت‌های حدی SU(3)→U(5)را در هسته‌ها در منطقه مناسبی از انرژی‌های تحریک پایین توصیف می-کنند[1].

در این مقاله هامیلتونین بوهر رابا پتانسیل‌های مذکور به روش تکرار مجانبی حل کرده، طیف هسته‌های $^{137}_{56}Ba$و $^{194}_{78}Pt$را بدست آورده و با نتایج تجربی مقایسه نموده‌ایم.

کلید واژه: مدل جمعی بوهر، تقارن‌های دینامیکی، پتانسیل مورس، پتانسیل دیویدسون و هامیلتونین بوهر.

مقدمه

دستگاه مختصاتی که هامیلتونین هسته را در آن بررسی می‌کنیم دستگاه متصل به هسته، پنج بعدی و غیر متعامداست. در هامیلتونین بوهر متغیر دینامیکیβ اسکیل هستهو متغیر دینامیکیγ میزان انحراف هسته از تقارن محوری هسته و $\theta_i(i=1,2,3)$ ها زوایای اویلر هستند. پارامترهایR_i و K به ترتیب مولفه iام اندازه حرکت زاویه‌ای محور iام و تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای روی محور z ها در سیستم متصل به هستهمی‌باشند و Mتصویر اندازه حرکت زاویه‌ای روی محور z ها در سیستم آزمایشگاهی است[2].

روش کار

روش کلی برای حل هامیلتونین بوهر در این پتانسیل‌ها روش جداسازی متغیرها می‌باشد و این جداسازی را به شکلی انجام می‌شود که بتوان معادله شعاعی β را به روش تکرار مجانبی حل کرد[3,4].شکل تابع پتانسیل وابسته به متغیرهای دینامیکی β و γ حل دقیق هامیلتونین هسته را در این منطقه از گذار فاز برای ما فراهم می‌آورد. پتانسیلی کهدر هامیلتونین هسته قرار می‌گیردبه شکل کلی $u(\beta,\gamma)=u_1(\beta)+\frac{u_2(\gamma)}{\beta^2}$می‌باشد، هامیلتونین بوهر برای هسته به شکل زیر نوشته می‌شود.

[1]. Asymptotic Iteration Method

$$H=-\frac{\hbar^2}{2B}\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{R_i^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi i}{3}\right)}\right]\right\}+V(\beta,\gamma)\quad(۱)$$

پارامترهای جدید انرژی و پتانسیل کاهش یافته را به شکل زیر در هامیلتونین وارد می‌کنیم.

$$\frac{2B}{\hbar^2}E=\epsilon=\epsilon_\beta+\epsilon_\gamma\qquad,\qquad\frac{2B}{\hbar^2}V(\beta,\gamma)=u(\beta,\gamma)\quad(۲)$$

تابع پتانسیل γبرای پتانسیل‌های مورس و دیویدسونوسانگر هماهنگ می‌باشد که در $\gamma\approx0$دارای می‌نیمم و نوسانات کوچک است ولی تابع پتانسیل β برای هر دو پتانسیلمتفاوت است.

$$u(\beta,\gamma)=u_1(\beta)+\frac{u_2(\gamma)}{\beta^2}\qquad,\qquad u_2(\gamma)=(3c)^2\gamma^2|_{\gamma\cong0}\quad(۳)$$

هامیلتونین را به روش جداسازی متغیرها در سه مرحله حل می‌کنیم،ابتدا معادله زوایای اویلر را حل می‌کنیم که در آن $D_{MK}^L(\theta_i)$ها توابع ویگنرمی‌باشند.

$$\Psi(\beta,\gamma,\theta_i)=\xi_L(\beta)\Gamma_K(\gamma)D_{MK}^L(\theta_i)\quad(٤)$$

الف) معادله زوایای اویلر

$$\left.\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{R_i^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi i}{3}\right)}\right|_{\gamma\approx0}=\frac{1}{3}R^2+\frac{R_z^2}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{4}{3}\right)\quad(٥)$$

$$\left[\frac{1}{3}R^2+\frac{1}{4}R_z^2\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{4}{3}\right)\right]D_{MK}^L(\theta_i)=\left[\frac{1}{3}L(L+1)+\frac{1}{4}K^2\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{4}{3}\right)\right]D_{MK}^L(\theta_i)\quad(٦)$$

ب) معادله γ

$u(\gamma)$پتانسیل نوسانگر هماهنگ است، ابتدا معادله γ را که برای هر دوپتانسیل مشترک است، حل می‌کنیم.

$$\left.\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{4}{3}\right)\frac{K^2}{4}+u(\gamma)\right]\right|_{\gamma\approx0}\Gamma_K(\gamma)=\lambda\Gamma_K(\gamma)\quad(٧)$$

$$\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{K^2}{4\gamma^2}-\frac{K^2}{3}+(3c)^2\gamma^2\right)\Gamma_K(\gamma)=\lambda\Gamma_K(\gamma)\quad(٨)$$

معادله (٨) نوسانگر هماهنگ دو بعدی است که با تغییر متغیر $\sqrt{3C}\,\gamma=y$ و تغییر پارامتر $\varepsilon_\gamma=\frac{K^2}{3}+\lambda$ به معادله (٩) تبدیل می‌شود.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{K^2}{4\gamma^2}+\varepsilon_\gamma-(3c)^2\gamma^2\right)\Gamma_K(\gamma)=0\quad(٩)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{d}{dy}-\frac{K^2}{4y^2}-y^2+\frac{\varepsilon_\gamma}{3c}\right)\Gamma_K(y)=0 \quad , \quad t=\frac{\varepsilon_\gamma}{3c} \quad (۱۰)$$

ابتدا حالت‌های مجانبی را برای حل معادله فوق درنظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} y\to\infty & \Gamma_1=e^{-\frac{y^2}{2}} \\ y\to o & \Gamma_2=y^{\frac{|k|}{2}} \end{cases} \to \quad \Gamma(y)=f(y)y^{\frac{|k|}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (۱۱)$$

تابع به دست آمده را در معادله (۱۰) قرار می‌دهیم و معادله دیفرانسیل را برحسب $f(y)$بدست می‌آوریم.

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{|K|+1}{y}-2y\right)\frac{d}{dy}+(t-|K|-2)\right]f(y)=0 \qquad (۱۲)$$

معادله‌ی فوق را با معرفی تابع $f(y)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\,y^m$ به روش بسط سری حل می‌کنیم و با استفاده از روابط بازگشتی ویژه مقادیر متغیر دینامیکی γ را بدست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} m\to\infty \\ a_{m+2}\to 0 \end{matrix} \quad \to \quad t=2m+|K|+2=\frac{\varepsilon_\gamma}{3c} \quad \to \quad E_\gamma=\frac{1}{2}\hbar\omega\left(n_\gamma+1\right) (۱۳)$$

اعداد کوانتومی ...و K=۰،±۱ ،±۲ ...و ۰، ۱، ۲ n_γ= می‌باشند.با تغییر متغیر $x=y^2$و تغییر پارامتر $m=2n$معادله دیفرانسیل (۱۲) به معادله دیفرانسیل لاگر تبدیل می‌شود.

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}+\left[\frac{1}{x}\left(\frac{|k|}{2}+1\right)-1\right]\frac{d}{dx}+\frac{n}{x}\right\}L_{n_r}^{\frac{|k|}{2}}(x)=0 \quad \to \quad \Gamma(x)=c\,x^{\frac{|k|}{4}}e^{-\frac{x}{2}}L_n^{\frac{|k|}{2}}(x) (۱٤)$$

$$|c'|^2\underbrace{\int_0^\infty dx\,x^{\frac{|k|}{2}}e^{-x}L_n^{\frac{|k|}{2}}(x)L_m^{\frac{|k|}{2}}(x)}_{\frac{\left(n+\frac{|k|}{2}\right)!}{n!}\delta_{n,m}}=1 \;\to\; \Gamma_{n_\gamma,K}(\gamma)=\sqrt{\frac{n!}{\left(n+\frac{|k|}{2}\right)!}}\,\gamma^{\frac{|k|}{2}}e^{\frac{-3}{2}c\gamma^2}L_n^{\frac{|k|}{2}}(3c\,\gamma^2) (۱۵)$$

ج) معادله β

حال معادله βرا برای پتانسیل‌های دیویدسون و مورس به روش تکرار مجانبی(AIM)حل می‌کنیم.

۱- پتانسیل دیویدسون $u_1(\beta)=\beta^2+\frac{\beta_0^4}{\beta^2}$

$$\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{L(L+1)}{3}+\lambda\right]-\underbrace{\left(\beta^2+\frac{\beta_0^4}{\beta^2}\right)}_{u_1(\beta)}\right\}\xi_L(\beta)=-\varepsilon\,\xi_L(\beta) (۱٦)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{L(L+1)}{3}+\lambda+\beta_0^4\right)+\beta^2\right]\xi_L(\beta)=\varepsilon\,\xi_L(\beta) (۱۷)$$

با تغییر تابع $\xi_L(\beta)=\frac{\chi_L(\beta)}{\beta^2}$ معادله دیفرانسیل (۱۷)به معادله (۱۸) تبدیل می‌شود.

$$\chi''_L + \left[\varepsilon - \frac{\mu(\mu+1)}{\beta^2} - \beta^2\right]\chi_L = 0 \quad , \quad \mu(\mu+1) = \frac{L(L+1)}{3} + \lambda + \beta_0^4 + 2 \qquad (۱۸)$$

معادله فوق را در حالت‌های مجانبی حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \beta \to 0 & \to \quad \chi_{1L} = \beta^{\mu+1} \\ \beta \to \infty & \to \quad \chi_{2L} = e^{-\frac{\beta^2}{2}} \end{cases} \to \chi_L(\beta) = f_L(\beta)\beta^{\mu+1}e^{-\frac{\beta^2}{2}} \qquad (۱۹)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2} + 2\left(\frac{\mu+1}{\beta} - \beta\right)\frac{d}{d\beta} + (\varepsilon - 2\mu - 3)\right] f_L(\beta) = 0 \qquad (۲۰)$$

$$2\beta - \frac{2\mu+2}{\beta} = \lambda_0(\beta) \quad , \quad 2\mu + 3 - \varepsilon = \delta_0(\beta) \quad , \quad f''_L(\beta) = \lambda_0(\beta) f'_L + \delta_0(\beta) f_L \qquad (۲۱)$$

معادله (۲۰) را به روش AIM حل می‌کنیم، $\lambda_K(\beta)$ و $\delta_K(\beta)$ توسط روابط بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} \lambda_1(\beta) = \dfrac{4\beta^4 - (6\mu + \varepsilon + 3)\beta^2 + 4\mu^2 + 10\mu + 6}{\beta^2} \\ \delta_1(\beta) = \dfrac{2(2\mu + 3 - \varepsilon)(\beta^2 - \mu - 1)}{\beta} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

$$\begin{cases} \lambda_2(\beta) = \dfrac{-4[(6 + 13\mu + 9\mu^2 + 2\mu^3) - \beta^2(3 + \varepsilon + 7\mu + \varepsilon\mu + 4\mu^2)]}{\beta^3} + \dfrac{[\beta^2(4\mu + \varepsilon) - 2\beta^6]}{\beta^3} \\ \delta_2(\beta) = \dfrac{(24 + 52\mu - 8\varepsilon + 36\mu^2 - 12\varepsilon\mu - 4\varepsilon\mu^2 + 8\mu^3)}{\beta^2} + \beta^2(12 + 8\mu - 4\varepsilon) \\ \qquad + (\varepsilon^2 - 12\mu^2 + 4\mu\varepsilon - 20\mu - 2\varepsilon - 3) \end{cases} \qquad (۲۳)$$

در نهایت شرط پایانی AIM را به شکل زیر بدست می‌آوریم.

$$\Delta_K(\beta) = \lambda_k(\beta)\delta_{k-1}(\beta) - \lambda_{k-1}(\beta)\delta_k(\beta) = 0 \quad , \quad K = 1,2,3,\ldots \qquad (۲۴)$$

$$\varepsilon_0 = \mu + \frac{3}{2} \quad , \quad \varepsilon_1 = \mu + \frac{7}{2} \quad , \quad \varepsilon_2 = \mu + \frac{11}{2}, \ldots \quad , \quad \varepsilon_{n,\mu} = \mu + 2n + \frac{3}{2} \qquad (۲۵)$$

از رابطه آخر ویژه مقادیر وابسته به پتانسیل دیویدسون را به شکل زیر بدست می‌آوریم.

$$\varepsilon_{n,L} = 2n + 1 + \left[\frac{9}{4} + \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 3c(n_\gamma + 1) + \beta_0^4\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۶)$$

۲- پتانسیل شعاعی مورس $u_1(\beta) = e^{-2a(\beta-\beta_e)} - 2e^{-a(\beta-\beta_e)}$

$$\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{\beta^2}\underbrace{\left[\frac{L(L+1)}{3} + \lambda\right]}_{\mu(\mu+1)-2} - \underbrace{\left[e^{-2a(\beta-\beta_e)} - 2e^{-a(\beta-\beta_e)}\right]}_{u_1(\beta)}\right\}\xi_L(\beta) = -\varepsilon \ \xi_L(\beta) \qquad (۲۷)$$

با جایگزین $\xi_L(\beta)=\frac{\chi_L(\beta)}{\beta^2}$ و تغییر پارامتر $\mu(\mu+1)=\frac{L(L+1)}{3}+\lambda+2$ معادله فوق را حل می‌کنیم.

$$\chi''_L+\left[\varepsilon-\frac{\mu(\mu+1)}{\beta^2}-e^{-2a(\beta-\beta_e)}+2e^{-a(\beta-\beta_e)}\right]\chi_L=0 \quad (۲۸)$$

$$x=\frac{\beta-\beta_e}{\beta_e} \quad , \quad \alpha=a\beta_e \quad , \quad \varepsilon=\epsilon{\beta_e}^2 \quad (۲۹)$$

$$\chi''_L+\left[\varepsilon-\frac{\mu}{(1+x)^2}-{\beta_e}^2e^{-2\alpha x}+2{\beta_e}^2e^{-\alpha x}\right]\chi_L=0 \quad (۳۰)$$

$$\begin{cases}\tilde{u}_L(x)=\mu(c_0+c_1e^{-\alpha x}+c_2e^{-2\alpha x}+\cdots)\\ \frac{\mu}{(1+x)^2}=u_L(x)=\mu(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)\end{cases} \quad (۳۱)$$

تابع فوق را حول $x=۰$ بسط می‌دهیم.

$$c_0=1-\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2} \quad , \quad c_1=\frac{4}{\alpha}-\frac{6}{\alpha^2} \quad , \quad c_2=\frac{-1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2} \quad (۳۲)$$

$$\tilde{u}_L(x)=\mu\left[c_0+c_1+c_2-(c_1+2c_2)\alpha x+\left(\frac{c_1}{2}+2c_2\right)\alpha^2x^2+\cdots\right] \quad (۳۳)$$

$$\chi''_L+[\varepsilon-\mu(c_0+c_1e^{-\alpha x}+c_2e^{-2\alpha x})-{\beta_e}^2e^{-2\alpha x}+2{\beta_e}^2e^{-\alpha x}]\chi_L=0 \quad (۳٤)$$

$$\varepsilon-\mu c_0=-\rho^2 \quad , \quad 2{\beta_e}^2-\mu c_1=\gamma_1^2 \quad , \quad {\beta_e}^2+\mu c_2=\gamma_2^2 \quad (۳۵)$$

برای آنکه معادله فوق به فرم AIM تبدیل شود تابع $y=e^{-\alpha x}$ را معرفی می‌کنیم.

$$\chi''_L(y)+\frac{1}{y}\chi'_L(y)-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\rho^2}{y^2}-\frac{\gamma_1^2}{y}+\gamma_2^2\right)\chi_L(y)=0 \quad (۳٦)$$

معادله فوق را ابتدا در حالت مجانبی $\left(\chi_L(y)=y^{\frac{\rho}{\alpha}}e^{-\frac{\gamma_2}{\alpha}y}R(y)\right)$ حل می‌کنیم.

$$\frac{d^2}{dy^2}R_L(y)=\left[\left(\frac{2\gamma_2y-2\rho-\alpha}{\alpha y}\right)\frac{d}{dy}+\left(\frac{2\rho\gamma_2+\alpha\gamma_2-\gamma_1^2}{\alpha^2y}\right)\right]R_L(y) \quad (۳۷)$$

با معرفی متغیرها و پارامتر زیر و جاگذاری آن در معادله (۳٦)، طیف وابسته به پتانسیل مورس را در معادله (٤۰) بدست می‌آوریم.

$$\delta(y)=2\gamma_2y-2\rho-\alpha \quad , \quad \Omega_n=2\rho\gamma_2+\alpha\gamma_2-\gamma_1^2 \quad , \quad \sigma(y)=\alpha^2y \quad (۳۸)$$

$$\Omega_n=-n\sigma'(x)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x) \quad \rightarrow \quad 2\rho\gamma_2+\alpha\gamma_2-\gamma_1^2=-n(2\alpha\gamma_2) \quad (۳۹)$$

$$\rho_{n,L}=\frac{\gamma_1^2}{2\gamma_2}-\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \varepsilon_{n,L}=\frac{\mu c_0}{{\beta_e}^2}-\left[\frac{\gamma_1^2}{2{\beta_e}^2\gamma_2}-\frac{\alpha}{\beta_e}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad (٤۰)$$

بحث و نتیجه گیری

۱- با استفاده از روش تکرار مجانبی، هامیلتونین‌هایی با پتانسیل‌های پیچیده‌تر که نمی‌توان آنها را به روش مستقیم حل نمود،حل کرد.

۲- این روش را نیز می‌توان برای حل هامیلتونین هسته‌هایی که گذار فاز آنها روی مسیر تقارن دینامیکی U(5)→SO(6)می‌باشد و نمی‌توان آنها را به روش مستقیم حل کرد، بکار برد.

۳- طیف‌های بدست آمده با استفاده از روش حل تکرار مجانبی با طیف تحریک هسته‌های${}^{134}_{56}Ba$و ${}^{194}_{78}Pt$همخوانی خوبی دارند.

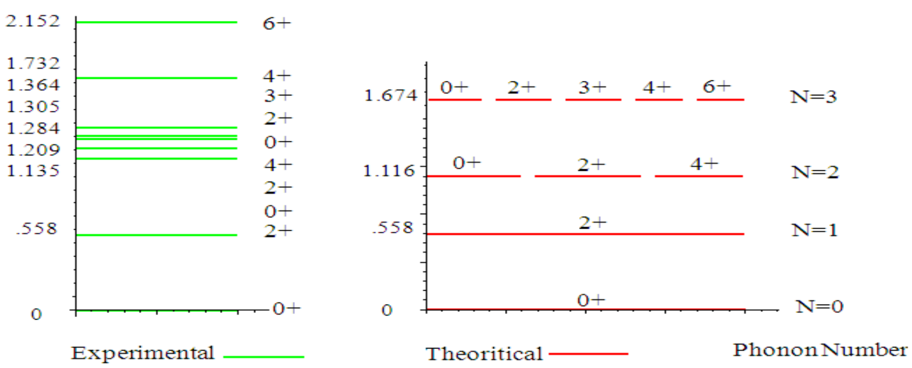
٤- طیف‌هایبه دست در این مقاله به ازای پارامترهای آزاد هسته سنگین ${}^{137}_{56}Ba$رسم شده‌اند.

$\epsilon_{L|_3} = 2.592\ ,\epsilon_{L|_5} = 2.593\ ,\epsilon_{L|_7} = 4.640\ ,\epsilon_{L|_9} = 6.861\ ,\epsilon_{L|_{11}} = 9.300$

$\epsilon_{L|_{13}} = 11.981\ ,\epsilon_{L|_{15}} = 14.875\ ,\epsilon_{L|_{17}} = 17.510\ ,\epsilon_{L|_{19}} = 21.038$

s,n_w L	1,0	1,2	2,0	L	1,1
0	0.000		3.913		
2	1.000	1.837	5.697	3	2.597
4	2.350	4.420	7.962	5	4.643
6	3.984	7.063	10.567	7	6.869
8	5.877	9.864	13.469	9	9.318
10	8.019	12.852	16.646	11	11.989
12	10.403	16.043	20.088	13	14.882
14	13.024	19.443	23.788	15	18.000
16	15.878	23.056	27.740	17	21.341
18	18.964	26.884	31.942	19	24.905
20	22.279	30.928	36.390	21	28.691

جدول (۱): نمایش ترازهای انرژی هسته ${}^{137}_{56}Ba$



شکل (۱): طیف ارتعاشی ${}^{137}_{56}Ba$تئوری و تجربی

مراجع

1. F.Iachello,Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition, physical Review Letters, Volume 87, number 5 ,052502-1 052502 -4,(2001).
2. Dennis.Bonatsos, D.Lenis, D.petrellis,N.Minkov, P.P.Raychev and P.A.Terziev,sequence of potentials interpolating the U(5) and E(5) symmetries,physical Review C 69, 044316(2004).
3. M.A.Caprio, Effects of β-γ coupling in transitional nuclei and the validity of the approximate separation of variables, arXiv: nucl-th/0510059V1 18 Oct(2005).
4. Romanian Academy, Series A, Volume 4, Number 2, 9, 2003.
5. F.Iachello, Dynamic Symmetries at the Critical Point, Physical Review Letters, Volume 85Number 17, 4, 23 October 2000.