



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

حل عددی معادله ترابرد فوترون به روش بی مش

مجتبی، خان بابازاده : احمد، ذوالفقاری: عبدالحمید، مینوچهر: مصطفی، یوسفی
دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده مهندسی هسته‌ای، گروه راکتور

چکیده:

حل عددی معادله ترابرد یک بعدی چند گروهی فوترون با استفاده از فرمول بندی زوج و فرد و با بهره‌گیری از اصل کمترین مربعات، حاصل می‌شود. در این مقاله از روش بی مش برای گسسته‌سازی بر روی مکان استفاده شده است که نیاز به ایجاد مش از طریق ایجاد زیردامنه‌هایی که تحت عنوان دامنه پشتیبانی معرفی می‌شود، مرتفع می‌کند و ضمن حذف هزینه محاسباتی ناشی از تولید مش، با ایجاد امکان به اشتراک‌گذاری گره‌های غیر مرزی دو یا چند دامنه پشتیبانی مجاور و در نتیجه افزایش جفت‌شدگی معادلات تقریبی دامنه‌های پشتیبانی مجاور، دقت حل مسئله را افزایش می‌دهد.

کلید واژه: حل عددی معادله ترابرد، فرمول بندی زوج و فرد، بی مش، دامنه پشتیبانی

مقدمه

الگوریتم‌های متداول حل عددی معادله ترابرد بر پایه مش یا شبکه استوارند که برای گسسته‌سازی روی مکان از مش تولید شده برای هندسه ارائه شده بهره می‌برند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش اختلاف محدود و المان محدود اشاره نمود. روش اختلاف محدود، روشی ساده و نسبتاً کارا در زمینه گسسته‌سازی بر روی مکان است. نیاز به دقت بالا در بعد های بالاتر سبب تولید روش المان محدود شد. افزایش دقت حل عددی در روش‌های المان محدود مستلزم افزایش مرتبه المان یا افزایش تعداد گره‌ها می‌باشد که مستلزم توسعه الگوریتم‌های و روش‌های تولید مش مناسب می‌باشد که خود هزینه مضاعفی را در تحلیل یک مسئله تحمیل می‌کند. یکی از کارآمدترین این روش‌ها، الگوریتم‌های تطبیقی می‌باشد که کارایی خود را در حوزه المان محدود به اثبات رسانده‌اند. با این وجود اعمال روش‌های تطبیقی مستلزم جابجا کردن یا افزودن گره‌های مش تولید شده می‌باشد، حال آنکه هرگونه تغییر یا بازتولید مش علاوه بر در پی داشتن مشکلات خاص خود، معمولاً فرایندی زمان‌بر و پرهزینه می‌باشد. از این رو هم‌زمان با توسعه روش مبتنی بر مش تلاش‌هایی در جهت دستیابی به روش‌های دیگری جهت برطرف کردن وابستگی به مش صورت گرفت که منجر به توسعه روش‌های بی‌مش گردید. در روش‌های بدون مش برخی و یا تمام جنبه‌های مش‌بندی محاسبات، مستقیماً حذف می‌شوند و حل مسئله بر پایه استفاده از نقاط پراکنده روی دامنه و مرزها برای بیان (نه گسسته‌سازی) دامنه و مرزهای مسئله می‌باشد [۱ و ۲]. این مجموعه نقاط یک مش را شکل نمی‌دهند، به این معنی که یک ارتباط از پیش تعیین شده‌ای بین نقاط برای درون یابی یا تقریب توابع وجود ندارد. روش‌های بی‌مش هم‌اکنون در مکانیک سیالات، مکانیک جامدات و غیره کارایی خود را به اثبات رسانده است. زمان ورود روش‌های بی‌مش در حوزه تحلیل فیزیک راکتور به روشنی معلوم نیست. لکنبر اساس مطالعات نگارندگان این مقاله اولین تلاش در این زمینه به حل عددی معادله پخش فوترون برمی‌گردد که توسط رک و همکاران [۲ و ۳] انجام شده است. همچنین پژوهش حاضر اولین تلاش در جهت پیاده‌سازی روش‌های بی‌مش در حل عددی معادله ترابرد فوترون چند-گروهی و یک بعدی می‌باشد.

تنوری و محاسبات



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳، دانشگاه اصفهان

روش درون‌یابینقطه‌ای چند جمله‌ای^۱

فرض می‌شود که تابع $\varphi(x)$ تابع تابع میدان در دامنه مسأله Ω باشد. دامنه مورد نظر به وسیله گروهی از گره‌های پراکنده شده در داخل و روی مرز دامنه حل بیان می‌شود. در روش درون‌یابی نقطه‌ای، تابع $\varphi(x)$ در نقطه مورد نظر x_0 با استفاده از مقادیر تابع در گره‌های داخل دامنه پشتیبانی درون‌یابی می‌کند. بیان ریاضی روش درون‌یابی نقطه‌ای چندجمله‌ای با فرض زیر شروع می‌شود [۲]:

$$\varphi^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_0) \quad (1)$$

به طوری که تابع پایه تک جمله‌ای در مختصات فضایی $\mathbf{x}^T = [x, y, z]$ ، n تعداد گره‌های موجود در دامنه پشتیبانی نقطه \mathbf{x}_0 ، و $a_i(\mathbf{x}_0)$ ضریب تک جمله‌ای $p_i(\mathbf{x})$ در نقطه مورد نظر \mathbf{x}_0 می‌باشد. بردار \mathbf{a} و بردار توابع پایه $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}_0) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \quad (2)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n\} \quad (3)$$

ضریب a_i در رابطه (۱) را می‌توان با ارضا نمودن این رابطه در گره‌های موجود در داخل دامنه پشتیبانی نقطه \mathbf{x}_0 تعیین کرد. که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Phi_s = \mathbf{P}_0 \mathbf{a} \quad (4)$$

که مقدار گروهی^۲ تابع در نقطه $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ بوده و Φ_s برداری است که مقادیر متغیرهای میدانی را در تمامی گره‌ها در دامنه پشتیبانی جمع می‌کند.

با استفاده از رابطه (۴) و با فرض این که معکوس ماتریس \mathbf{P}_0 وجود دارد می‌توان شکل صریح‌تری برای تابع درون‌یابی به صورت زیر به دست آورد:

$$\varphi^h(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^T(\mathbf{x}) \Phi_s \quad (5)$$

که ماتریس متشکل از توابع شکلی روش درون‌یابی نقطه‌ای ($\eta_i(\mathbf{x})$) می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_0^{-1} = [\eta_1(\mathbf{x}), \eta_2(\mathbf{x}), \eta_3(\mathbf{x}), \dots, \eta_n(\mathbf{x})] \quad (6)$$

اصل K^+

اصل K^+ برای یک دامنه پشتیبانی به صورت زیر به دست می‌آید [۴ و ۷]:

$$\mathbf{K}^+[\xi_s] = 2 \xi_s^T \mathbb{S}_s - \xi_s^T \mathbb{M}_s \xi_s \quad (7)$$

که در آن داریم:

$$\xi_s^T \equiv \quad (8)$$

$$\left[\underbrace{\xi_{00,1}^s \quad \dots \quad \xi_{00,P}^s}_{\xi_{00}^s} \quad \underbrace{\xi_{2-2,1}^s \quad \dots \quad \xi_{2-2,P}^s}_{\xi_{2-2}^s} \quad \underbrace{\xi_{2-1,1}^s \quad \dots \quad \xi_{2-1,P}^s}_{\xi_{2-1}^s} \quad \dots \quad \underbrace{\xi_{lm,1}^s \quad \dots \quad \xi_{lm,P}^s}_{\xi_{lm}^s} \quad \dots \right]$$

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{lm}^s(\mathbf{r}) \approx \mathbb{m}_s^T(\mathbf{r}) \xi_{lm}^s \quad ; \quad \mathbf{r} \in V_s \quad (9)$$

که درایه‌های بردار ξ_{lm}^s ضرایب نامعلوم هستند که در صورت پیدایش مقادیر تابع آزمون رادر گره‌های دامنه پشتیبانی مشخص می‌کنند مطابق این اصل چنانچه میزان خطای حاصل از بکارگیری تابع آزمون ψ^+ به جای ψ_0^+ در تمام دامنه حل مسئله به حداقل ممکن برسد آنگاه اصول یاد شده حداکثر مقادیر خود

¹Polynomial Point Interpolation Method

² Nodal Value



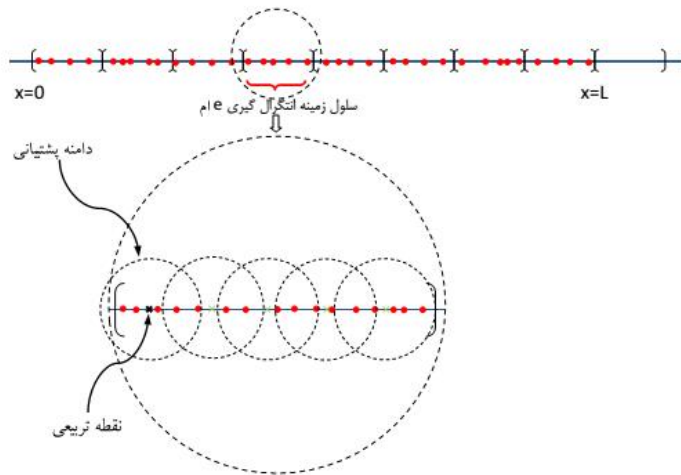
بست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

را که عددی معلوم است، داشته و به عبارتی ψ^+ به ψ_0^+ میل می کند. این بیشینه سازی معادل حل دستگاه معادلات خطی $M_s \xi_s = S_s$ است که پس از سرهم بندی تمام ماتریس های محلی به صورت $M \xi = S$ درآمده و با الگوریتم های عددی متداول حل می شود.

پیاده سازی روش

در شروع کار، دامنه مسأله با نقاطی که به طور مناسبی پراکنده شده اند، نشان داده می شود. برای انتگرال گیری از گروهی از سلول های زمینه استفاده می شود که، مستقل از گره های دامنه ای می باشند. دامنه پشتیبانی برای نقطه دلخواه x_0 (که همان یک نقطه تربیعی گاوسی در یک سلول انتگرال گیری می باشد) با استفاده از یک شعاع زیر دامنه محلی برای مسائل یک بعدی تعریف می گردد. این دامنه پشتیبانی با نقطه x_0 که در مرکز قرار دارد، تشکیل می شود. تعداد گره ها n^5 را می توان با شمارش تمام نقاطی 6 که داخل دامنه پشتیبانی قرار گرفته اند، بدست آورد. در مسائل یک و دوبعدی اندازه دامنه پشتیبانی بایستی طوری انتخاب شود که $n = 7 \square 30$ باشد.



برای تعریف دامنه پشتیبانی برای نقطه x_0 ، اندازه دامنه پشتیبانی d_s با رابطه زیر مشخص می شود:

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (10)$$

شکل ۱. نمایش سلول های زمینه، نقاط تربیعی و دامنه های پشتیبانی [۵]

که α_s اندازه بی بعد دامنه پشتیبانی و d_c طول مشخصه می باشد که به فاصله گرهی در نزدیکی نقطه x_0 مربوط است. اگر گره ها به طور یکنواخت توزیع شده باشند، d_c به صورت فاصله بین دو گره مجاور هم تعریف می شود. در مواردی که گره ها به طور غیر یکنواخت پخش شده اند، d_c را می توان به صورت فاصله میانگین گره ها در دامنه پشتیبانی x_0 تعریف کرد. در مسائل یک بعدی ساده ترین روش تعریف میانگین فاصله گرهی با رابطه زیر است:

$$d_c = \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)} \quad (11)$$

$$(12)$$

راستی آزمایی نتایج و مقایسه

مسائل متفاوت و زیادی با استفاده از این روش حل شده و با مسائل محک مقایسه شده است. در زیر به یک نمونه از این مسائل اشاره شده است.

تیغه همگن با چشمه ثابت دو گروهی و پراکندگی شدیداً ناهمسانگرد [۵]

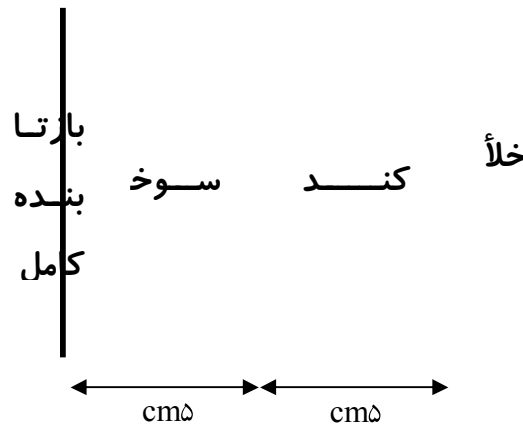
³ Background Cells
⁴ Quadrature Point
⁵ Nodes
⁶ Points
⁷ Dimensionless Size



بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

هدف در این آزمون سنجش توانایی روش بی‌مش در حل مسائل با بیش از دو گروه انرژی و مقایسه آن با روش مشابه با گسسته‌سازی المان محدود است. یک راکتور دو ناحیه ای را نشان می‌دهد که مرز چپ آن بازتابنده کامل بوده و مرز راست آن خلا است. مشخصات نوترونی این دو ناحیه در جدول ۱ آمده و نتایج محاسبات بحرانی با احتساب ۴۰۰ المان خطی با نتایج کد DRAGON که بر پایه معادله انتگرالی تریبرد توسعه یافته، در جدول ۲ مقایسه شده است.



شکل ۲. مشخصات هندسی راکتور چهارگروه هیجک بعدی

جدول ۱. سطوح مقطع عمر مربوط به آزمون [۴]

گروه	ماده	ϵ	λ	1
گروه اول	سوخت	0.154156839	0.066206839	0.009572
	کندکننده	0.1032	0.0091	0.0000
گروه دوم	سوخت	0.306739057	0.245499057	0.0171448
	کندکننده	0.3524	0.2171	0.0000
گروه سوم	سوخت	0.52759312	0.43253312	0.01768
	کندکننده	0.5544	0.4146	0.0000
گروه چهارم	سوخت	0.940822279	0.819822279	0.158140
	کندکننده	2.2981	2.279	0.0000
طیف شکافت		0.575	0.425	0.0

جدول ۲. نتایج محاسبات بحرانی تروشی مشبرای راکتور ناهمگن چهارگروه هیجک مقایسه‌ای با روش المان محدود [۴ و ۵]

Keff for Four-Group Reflected Core by Mesh-Free & Finite Element ($\Delta K=1E-6$)						
Method	P1	P3	P7	P15	P31	DRAGON (Pij)
MESH FREE						
Keff	0.659507	0.683730	0.685521	0.685425	0.685391	0.685325
Δ (%)	-3.76726	-0.23274	0.0286	0.014592	0.00963	0.000000



بیست و یکمین کنفرانس هسته ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳، دانشگاه اصفهان

Finite Element						
Keff	0.659508	0.683737	0.685528	0.685432	0.685398	0.685325
Δ (%)	-3.76698	-0.23157	0.029767	0.015759	0.010798	0.000000

نتیجه گیری

نتایج بدست آمده کارایی روش بی‌مش را در مقایسه با روش المان محدود روشن می‌سازد و به نظر می‌رسد این روش می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش المان محدود به ویژه در مسئله‌های با بعدهای بالاتر و هندسه‌های پیچیده‌تر باشد. همچنین در صورت اعمال روش‌های تطبیقی، عملکرد این روش نسبت به روش المان محدود بهتر بوده و انعطاف‌پذیری مطلوب را دارد.

مراجع

- [1] G.R. Liu, T.Y. Gu, "An Introduction to Meshfree Methods and their Programming", Springer, 2005.
- [2] G.R. Liu, "Mesh Free Methods Moving beyond the Finite Element Method", CRC Press LLC, 2003.
- [3] B. Rokrok, H. Minuchehr and A. Zolfaghari, "Application of Radial Point Interpolation Method to Neutron Diffusion Field", Trends in Applied Sciences Research 7 (1):18-31, 2012
- [4] B. Rokrok, H. Minuchehr and A. Zolfaghari, "Element-free Galerkin modeling of neutron diffusion equation in X-Y geometry", Ann. Nuc. Energy, 43 (2012) 39-48.
- [5] یوسفی، مصطفی. *برهیافت و روشی در تریبرد نوترون*. دانشکده مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی، ایران، ۱۳۸۹.
- [6] خان بابازاده، مجتبی. *حل عددی معادله زوج چار هتر ابر دوترون با استفاده از بسط هم‌هنگ‌های کروی و یوروشبی مش*. دانشکده مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی، ایران، ۱۳۹۱.
- [7] Ackroyd, R. T., Finite Element Methods for Particle Transport, Application to Reactor and Radiation Physics. Research Studies Press (John Wiley & Sons Inc.), 1997.