



# بست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۷ و ۶ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

## محاسبه سطح مقطع همجوشی دوتریوم-تریوم با استفاده از تغییر فاز هسته‌ای مختلط

کوهرخی، طه؛ حسینی، سیده کلثوم

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان

### چکیده:

در این مقاله، سطح مقطع واکنش همجوشی دوتریوم-تریوم بر پایه یک مدل نظری که در آن تغییر فاز هسته‌ای یک کمیت مختلط در نظر گرفته می‌شود، بدست آمده است. تغییر فاز کل از حاصل جمع تغییر فازهای کولنی و هسته‌ای بدست می‌آید که این کمیت حاوی اطلاعات مربوط به پراکندگی و جذب توسط پتانسیل است. توافق مناسب بین نتایج حاصل از محاسبات در این تحقیق و داده‌های تجربی، مبین اعتبار مدل و صحت محاسبات انجام شده می‌باشد.

**کلمه کلیدی:** تغییر فاز کولنی، تغییر فاز هسته‌ای مختلط، سطح مقطع همجوشی دوتریوم-تریوم

### ۱- مقدمه

یکی از سازوکارهای واکنش‌های هسته‌ای، سازوکار واکنش هسته مرکب است. بر طبق فرض اساسی مدل هسته مرکب برای واکنش‌های هسته‌ای، احتمال نسبی واپاشی به هر مجموعه خاصی از محصولات نهایی مستقل از طرز تشکیل هسته مرکب است [۱]. در حقیقت هسته مرکب خاطره تشکیل خود را فراموش می‌کند و واپاشی آن بر اساس قواعد آماری حاکم انجام می‌شود. مدل هسته‌ای مرکب تنها زمانی معتبر است که برخوردهای زیادی در داخل هسته مرکب صورت بگیرد. این فرض برای واکنش همجوشی هسته‌های سبک که در آن تعداد نوکلئون‌ها کم هستند، صدق نمی‌کند. در این واکنش‌ها، تابع موج فرودی قبل از جذب و پراکندگی توسط پتانسیل هدف، از طریق یک عامل فازی می‌تواند از خود خاطره به جا بگذارد [۲]. کمیتی که ارتباط پیوسته‌ای بین تابع موج فرودی و خروجی ایجاد کرده و تمام اطلاعات مربوط به پراکندگی و واکنش سیستم را با خود به همراه دارد، تغییر فاز نام دارد. به طور کلی، تغییر فاز یک کمیت مختلط است که قسمت حقیقی آن بیانگر پراکندگی و قسمت موهومی آن بیانگر جذب توسط پتانسیل است.

سطح مقطع همجوشی پارامتری است که بیانگر احتمال انجام واکنش همجوشی هسته‌ای می‌باشد. واکنش همجوشی هسته‌های سبک، هم از نظر مطالعه خواص نیروی هسته‌ای و هم از نظر تولید انرژی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. از این بین، واکنش همجوشی دوتریوم-تریوم در انرژی‌های پایین دارای بزرگترین سطح مقطع و در نتیجه



## بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

بزرگترین آهنگ انجام واکنش همجوشی است [۳]. در تحقیق حاضر، سطح مقطع این واکنش بر اساس نظریه‌ای که در آن تغییر فاز هسته‌ای کمیته مختلط در نظر گرفته می‌شود محاسبه شده و با داده‌های تجربی مقایسه شده است.

### ۲- تغییر فاز

در واکنش بین هسته‌ها، قبل از اینکه هسته‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک شوند و تحت تأثیر نیروی هسته‌ای قرار بگیرند، تحت تأثیر نیروی کولنی بلندبرد قرار خواهند گرفت. در مدل استفاده‌شده در این تحقیق، فرض شده است که امواج خروجی پس از تأثیر گرفتن از پتانسیل و در فاصله به اندازه کافی دور از مرکز آن، نسبت به امواج فرودی دچار تغییر فاز می‌شوند. این تغییر فاز که تابعی از انرژی کل هسته‌های برهمکنش‌کننده در سیستم مختصات مرکز جرم  $E_{CM}$  است، از حاصل جمع تغییر فازهای کولنی  $(\delta_\ell^C)$  و هسته‌ای  $(\delta_\ell^N)$  بدست می‌آید:

$$\delta_\ell = \delta_\ell^C + \delta_\ell^N \quad (1)$$

که تغییر فاز کولنی برابر است با [۴]:

$$\delta_\ell^C = \arg \Gamma(\ell + 1 + i\eta) \quad (2)$$

که در آن  $\Gamma$  تابع گاما،  $\eta = 1/ka_C$  پارامتر کولنی بی‌بعد،  $k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$  عدد موج ذره آزاد،  $a_C = \hbar^2/\mu Z_1 Z_2 e^2$  طول واحد کولنی،  $\mu$  جرم کاهیده،  $Z_1 e$  بار ذره فرودی و  $Z_2 e$  بار ذره هدف است. در این محاسبات تغییر فاز هسته‌ای به طور کلی یکی کمیته مختلط در نظر گرفته شده است:

$$\delta_\ell^N = \delta_{r\ell}^N + i\delta_{i\ell}^N \Rightarrow \cot \delta_\ell^N = w_{r\ell}^N + iw_{i\ell}^N \quad (3)$$

با تعیین مؤلفه‌های  $w_{r\ell}^N$  و  $w_{i\ell}^N$  از طریق ارتباط با پتانسیل هسته‌ای، مؤلفه‌های تغییر فاز هسته‌ای  $\delta_{r\ell}^N$  و  $\delta_{i\ell}^N$  از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{i\ell}^N &= \text{Ln} \left[ \left( \frac{(w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N + 1)^2}{(w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N - 1)^2} \right)^{-1/4} \right] \\ \delta_{r\ell}^N &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[ \frac{2w_{r\ell}^N}{\left[ \left( (w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N - 1)^2 \right) \left( (w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N + 1)^2 \right) \right]^{-1/2}} \right] \end{aligned} \right. \quad (4)$$

با مختلط در نظر گرفتن تغییر فاز هسته‌ای، تغییر فاز کل نیز کمیته مختلط می‌شود:

$$\cot(\delta_\ell^C + \delta_\ell^N) = w_{r\ell} + iw_{i\ell} \quad (5)$$

که با استفاده از روابط (۲) و (۳)، قسمت حقیقی و موهومی آن برابر می‌شود با:



## بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

$$\begin{cases} w_{r\ell} = \frac{w_{r\ell}^N [\cot^2(\delta_\ell^C) - 1] + \cot(\delta_\ell^C) [(w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N)^2 - 1]}{(\cot(\delta_\ell^C) + w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N)^2} \\ w_{i\ell} = \frac{w_{i\ell}^N [\cot^2(\delta_\ell^C) + 1]}{(\cot(\delta_\ell^C) + w_{r\ell}^N)^2 + (w_{i\ell}^N)^2} \end{cases} \quad (6)$$

در شکل (۱)، تغییر فاز کولنی  $\delta_\ell^C$  و مؤلفه‌های حقیقی  $\delta_{r\ell}^N$  و موهومی  $\delta_{i\ell}^N$  تغییر فاز هسته‌ای برای  $\ell = 0$  بر حسب انرژی کل در سیستم مختصات مرکز جرم رسم شده‌اند.

### ۳- ارتباط بین تغییر فاز و پتانسیل هسته‌ای به کمک شرایط پیوستگی

با توجه به کوتاه‌برد بودن نیروی هسته‌ای و بلندبرد بودن نیروی کولنی، در فاصله‌های بزرگ‌تر از برد نیروی هسته‌ای، پتانسیل حاکم بر واکنش صرفاً پتانسیل دافعه کولنی است. در محدوده برد نیروی هسته‌ای، غلبه‌ی نیروی جاذب هسته‌ای بر دافعه کولنی سبب بوجود آمدن یک چاه جاذب برای پتانسیل حاکم بر واکنش می‌شود (شکل (۲)). تغییر فاز مختلط هسته‌ای (رابطه (۳))، از مختلط در نظر گرفتن پتانسیل حاصل می‌شود. از آنجایی که پتانسیل کولنی حقیقی است در نتیجه چاه پتانسیل هسته‌ای را به طور کلی یک چاه پتانسیل مختلط مربعی با شعاع  $R_B$ ، در نظر می‌گیریم:

$$V(r) = \begin{cases} -V_r - iV_i & r \leq R_B \\ Z_1 Z_2 e^2 / r & r > R_B \end{cases} \quad (7)$$

با توجه به اینکه پتانسیل کولنی یک پتانسیل مرکزی با تقارن کروی است، قسمت‌های شعاعی و زاویه‌ای تابع موج کولنی را می‌توان به‌طور مستقل در هم ضرب کرد  $\psi_{\ell, Coul}(r, \theta) = R_{\ell, Coul}(r) Y_{\ell 0}(\theta)$  با استفاده از تغییر متغیرهای  $R_{\ell, Coul}(r) = u_{\ell, Coul}(r)/r$  و  $\rho = kr$ ، جواب معادله شرودینگر به ازای  $\ell$ ‌های مختلف برای پتانسیل کولنی ( $r > R_B$ ) برابر می‌شود با [۴]:

$$u_{\ell, Coul}(kr) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell (G_\ell(\rho, \eta) + F_\ell(\rho, \eta) \cot \delta_\ell) \quad (8)$$

که در این رابطه  $G_\ell(\rho, \eta)$  و  $F_\ell(\rho, \eta)$  به ترتیب توابع موج کولنی منظم و نامنظم هستند. مشتق لگاریتمی این تابع موج روی مرز  $r = R_B$  برابر است با:

$$R_B \frac{u'_{\ell, Coul}(kr)}{u_{\ell, Coul}(kr)} \Big|_{r=R_B} = \rho_B \frac{F'_\ell(\rho_B, \eta) \cot \delta_\ell + G'_\ell(\rho_B, \eta)}{F_\ell(\rho_B, \eta) \cot \delta_\ell + G_\ell(\rho_B, \eta)}$$

در فاصله  $r \leq R_B$ ، معادله شرودینگر مستقل از زمان برای پتانسیل رابطه (۷) برابر می‌شود با:



# بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳، دانشگاه اصفهان

$$\frac{d^2 u_{\ell,N}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E + V_r + iV_i - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) u_{\ell,N}(r) = 0 \quad (10)$$

مشتق لگاریتمی تابع موج هسته‌ای، توسط حل معادله بالا روی مرز  $r = R_B$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$R_B \frac{u'_{\ell,N}(r)}{u_{\ell,N}(r)} \Big|_{r=R_B} = \rho_{1B} \frac{j'_\ell(\rho_{1B})}{j_\ell(\rho_{1B})} + 1 = N_{\ell r}(\rho_{1B}) + iN_{\ell i}(\rho_{1B}) \quad (11)$$

که در آن  $j_\ell(\rho_{1B})$  تابع بسل کروی،  $\rho_{1B} = k_1 R_B$  و  $k_1 = \sqrt{2\mu(E + V_r + iV_i)}/\hbar$  عدد موج مختلط داخل چاه پتانسیل هسته‌ای و  $N_{\ell r}(\rho_{1B})$  و  $N_{\ell i}(\rho_{1B})$  به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی مشتق لگاریتمی تابع موج هسته‌ای روی مرز هستند. شرایط پیوستگی توابع موج کولنی و هسته‌ای و مشتق آن‌ها روی مرز  $r = R_B$ ، به طور همزمان با برابر قراردادن مشتق‌های لگاریتمی کولنی (رابطه (۹)) و هسته‌ای (رابطه (۱۱)) بدست می‌آید:

$$R_B \frac{u'_{\ell,N}(k_1 r)}{u_{\ell,N}(k_1 r)} \Big|_{r=R_B} = R_B \frac{u'_{\ell,Coul}(kr)}{u_{\ell,Coul}(kr)} \Big|_{r=R_B} \\ \Rightarrow \rho_B \frac{F'_\ell(\rho_B, \eta) \cot \delta_\ell^N + G'_\ell(\rho_B, \eta)}{F_\ell(\rho_B, \eta) \cot \delta_\ell^N + G_\ell(\rho_B, \eta)} = N_{\ell r}(\rho_{1B}) + iN_{\ell i}(\rho_{1B})$$

با کمی محاسبه و با تعریف کمیت‌های زیر:

$$\begin{cases} \alpha_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) = R_B N_{\ell r}(\rho_{1B}) G_\ell(\rho_B, \eta) - \rho_B G'_\ell(\rho_B, \eta) \\ \beta_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) = R_B N_{\ell r}(\rho_{1B}) F_\ell(\rho_B, \eta) - \rho_B F'_\ell(\rho_B, \eta) \\ \tau_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) = R_B N_{\ell i}(\rho_{1B}) G_\ell(\rho_B, \eta) \\ \zeta_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) = R_B N_{\ell i}(\rho_{1B}) F_\ell(\rho_B, \eta) \end{cases} \quad (13)$$

مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تغییر فاز هسته‌ای  $\delta_\ell^N = w_{r\ell}^N + iw_{i\ell}^N$  (رابطه (۳)) به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} w_{r\ell}^N = -\frac{\alpha_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) \beta_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) + \zeta_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) \tau_\ell(\rho_{1B}, \rho_B)}{\beta_\ell^2(\rho_{1B}, \rho_B) + \zeta_\ell^2(\rho_{1B}, \rho_B)} \\ w_{i\ell}^N = -\frac{-\alpha_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) \zeta_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) + \tau_\ell(\rho_{1B}, \rho_B) \beta_\ell(\rho_{1B}, \rho_B)}{\beta_\ell^2(\rho_{1B}, \rho_B) + \zeta_\ell^2(\rho_{1B}, \rho_B)} \end{cases} \quad (14)$$

## ۴- نتیجه‌گیری

سطح مقطع کل از حاصل جمع سطح مقطع تمام پاره‌موج‌ها بدست می‌آید  $\sigma_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{r\ell}$ . با جایگذاری تغییر فاز کولنی  $\delta_\ell^C$  (رابطه (۲)) و تغییر فاز هسته‌ای  $\delta_\ell^N$  (رابطه (۱۴)) در رابطه (۶)، مؤلفه‌های حقیقی  $w_{r\ell}$  و موهومی  $w_{i\ell}$  تغییر فاز کل و سپس سطح مقطع واکنش هر پاره‌موج از رابطه زیر بدست می‌آیند [۵]:

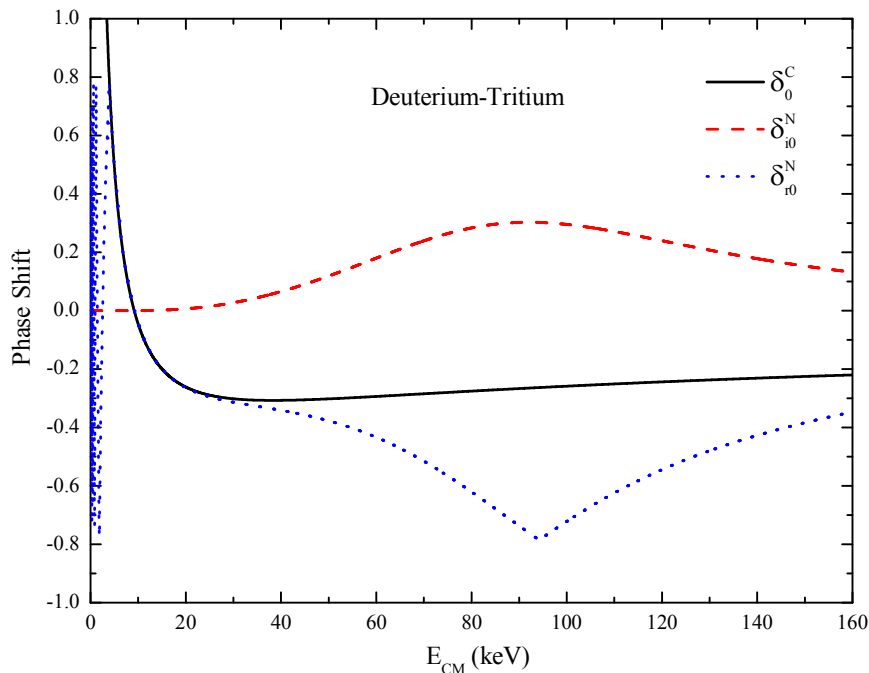


# بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

$$\sigma_{re,\ell} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left( 1 - |e^{2i\delta_\ell}|^2 \right) = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left[ \frac{-4w_{\ell i}}{w_{\ell r}^2 + (w_{\ell i} - 1)^2} \right] \quad (15)$$

از این رابطه ملاحظه می‌شود، چنانچه تغییر فاز هسته‌ای  $\delta_\ell^N$  یک کمیت حقیقی باشد ( $w_{\ell i}^N = 0$ )، تغییر فاز کل نیز کمیتی حقیقی ( $w_{\ell i} = 0$ ) و در نتیجه سطح مقطع واکنش صفر خواهد شد. در نتیجه جهت بدست آوردن یک مقدار مشخص برای سطح مقطع واکنش، تغییر فاز هسته‌ای باید کمیتی مختلط باشد. در شکل (۳) سطح مقطع واکنش همجوشی دوتریوم-تری‌تیوم رسم شده است. خط پیوسته نتایج حاصل از محاسبات و نقاط توپر داده‌های تجربی هستند [۶]. توافق مناسب بین این نتایج و داده‌های تجربی بیانگر کارآمدی مدل و صحت محاسبات است. پیش‌بینی می‌شود که در نظر گرفتن عوامل تأثیرگذار دیگر سبب بهبود نتایج شود که آن را به آینده موکول می‌کنیم.

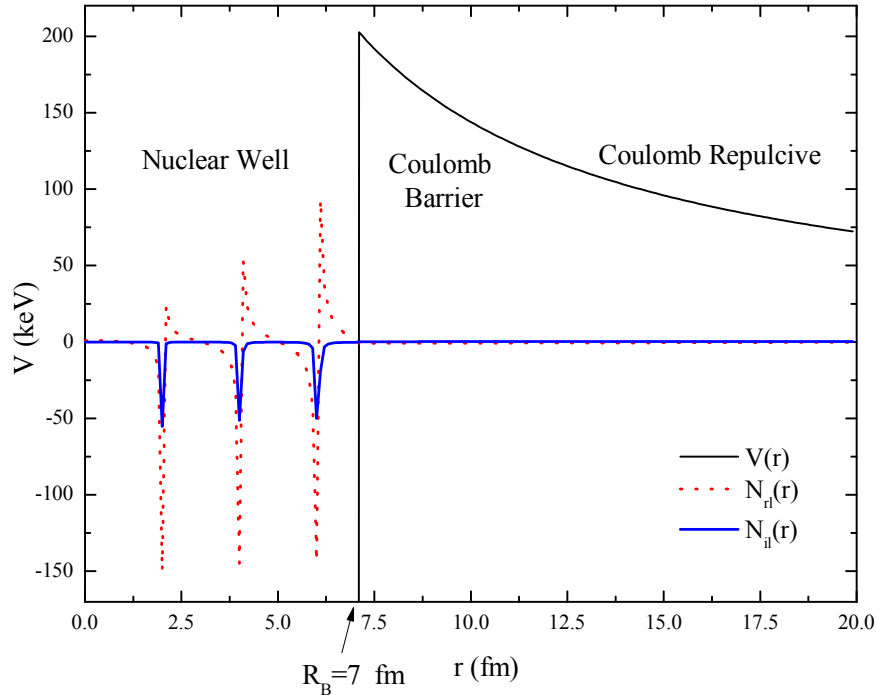


شکل (۱): تغییر فاز کولنی  $\delta_\ell^C$  (خط پیوسته) و قسمت‌های حقیقی  $\delta_\ell^N$  (خط چین) و موهومی  $\delta_\ell^N$  (نقطه چین) تغییر فاز هسته‌ای  $\delta_\ell^N$  واکنش دوتریوم-تری‌تیوم برای  $\ell = 0$  بر حسب انرژی در سیستم مرکز جرم.

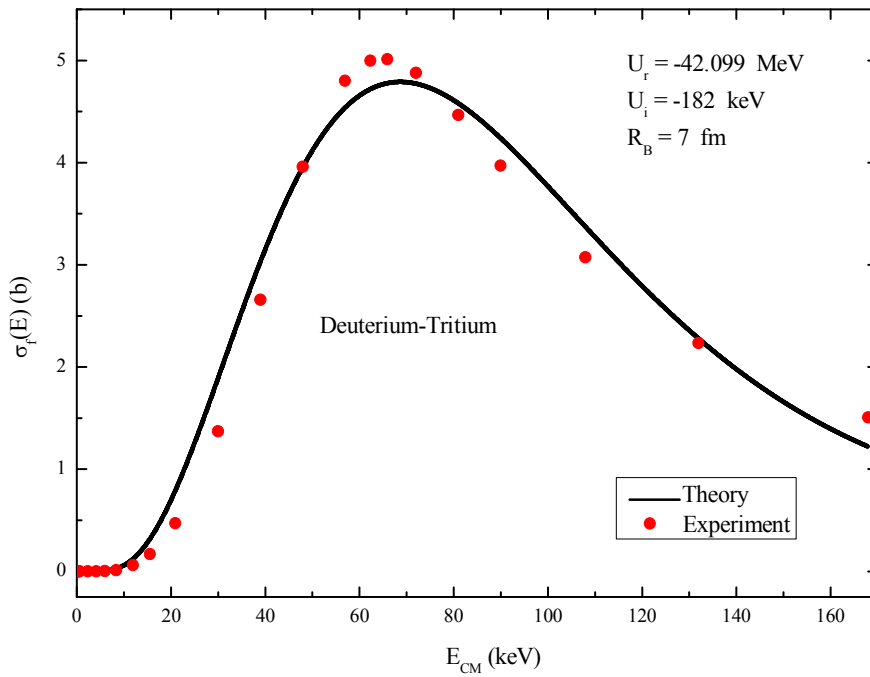


# بیست و یکمین کنفرانس هشتاد و یکم ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان



شکل (۲): نمودار پتانسیل حاکم بر واکنش دوتریوم-تری‌تیوم و قسمت‌های حقیقی و موهومی مشتق لگاریتمی تابع موج هسته‌ای در داخل چاه پتانسیل هسته‌ای بر حسب فاصله شعاعی.



شکل (۳): نمودار سطح مقطع همجوشی واکنش دوتریوم - تری‌تیوم بر حسب انرژی در سیستم مختصات مرکز جرم. نتایج حاصل از محاسبات نظری به صورت خط پیوسته و داده‌های تجربی به صورت نقاط توپر نمایش داده شده‌اند.



# بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۷ و ۸ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

مراجع:

- [1] S. S. M. Wong, *Introductory nuclear physics*, Wiley-VCH; 2 edition, *University of Toronto* (April 15, 1999).
- [2] X. Z. Li, Q. M. Wei and B. Liu, *A new simple formula for fusion cross-sections of light nuclei*, *Nucl. Fusion*, 48, 125003, 2008.
- [3] S. Atzeni and J. Meyer-ter-Vehn *The Physics of Inertial Fusion*, Oxford: Oxford University Press, 2004.
- [4] M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, 1972.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon, Oxford, 1987).
- [6] C. L. Dunford, Data retrieved from the Cross Section Information Storage and Retrieval System (CSISRS) data base (Feb 27, 1996); available on Internet (<http://www.mdc.bnl.gov>).