



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

مدل هسته‌ای سه نوکلئونی در برسی انرژی ایزوتوپهای $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ در مقایسه با $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$

محمد رضا شجاعی*، سحر بهنام

دانشگاه فیزیک و مهندسی هسته‌ای، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده:

مدل ذره‌ی خیلی مستقل برای $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ تک نوترون آخری را در نظر می‌گیرند. بر اساس همین مدل $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ نیز دارای یک نوکلئون زوج نشده در حالت آخری می‌باشد. بنابراین این دو ایزوتوپ دارای اسپین و پاریته $J^\pi = (7/2)^-$ است. اما با مقایسه طیف‌های مربوط به حالت‌های برانگیخته‌ی این دو ایزوتوپ مشاهده می‌کنیم که دارای طیف یکسانی نیستند، به عبارتی باید $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ بر اساس مدل لایه‌ای به عنوان یک ایزوتوپ با سه نوکلئون ظرفیت در نظر گرفت، که این سه نوکلئون $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ در خارج از پوسته‌ی کامل قرار دارد. در این کار ما با در نظر گرفتن این سه نوکلئون و برهم کنش بین نوکلئون‌ها به صورت پتانسیل شبه هلمن و با استفاده از مختصات ژاکوبی $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ ، به محاسبه انرژی و جذر میانگین شعاع باری این دو ایزوتوپ با استفاده روش NU پرداخته و با یکدیگر مقایسه نموده‌ایم.

مقدمه:

یکی از کاربردهای مدل لایه‌ای تعیین و محاسبه‌ی ویژگی‌های استاتیکی ایزوتوپ‌های مختلف در فیزیک هسته‌ای می‌باشد. بر اساس این مدل می‌توانیم نتایج تجربی مربوط به ویژگی‌های استاتیکی را با مدل لایه‌ای توجیه نماییم. این مدل در بررسی هسته‌های زوج-فرد موفق می‌باشد. غالباً اگر پروتون یا نوترون منجر به عدد جادویی شوند آن پوسته را، پوسته‌ی کامل در نظر گرفته و سایر نوکلئون‌ها در خواص هسته‌ها تاثیرگذار می‌باشند. [۱،۲]

کلسیم دارای ایزوتوپهای مختلفی می‌باشند، بعضی از این ایزوتوپها زوج-زوج و بعضی فرد-زوج می‌باشند. هسته $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ دارای عدد جادویی ۲۰ و ۲۰ می‌باشد. بنابراین اسپین و پاریته این هسته $J^\pi = 0^+$ می‌باشد. در این کار ما با بررسی طیف انرژی ایزوتوپهای $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ و $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ که هر دو دارای $J^\pi = (7/2)^-$ می‌باشند، $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ را به عنوان پوسته‌ی کامل در نظر گرفته‌ایم. در جدول زیر مقادیر انرژی حالت پایه و جذر میانگین شعاع باری این دو ایزوتوپ نشان داده شده است.

جدول (۱) مقادیر انرژی حالت پایه و جذر میانگین شعاع باری ایزوتوپهای $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ و $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ [۱،۲،۳،۴،۵]

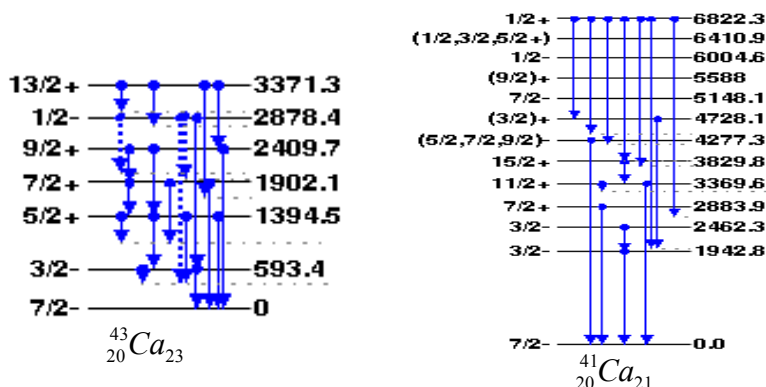
$^A_Z X_N$	$J^\pi = (3/2)^-$	$E_{\text{exp}} (MeV)$	$\langle r_{\text{Exp}}^2 \rangle^{1/2} (fm)$
$^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	$1/94 (MeV)$	۳۵۰/۴۱۴۸۰۰	۳/۴۷
$^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	$۰/۵۹ (MeV)$	۳۶۹/۸۳۳۰۰۰	۳/۴۹

در شکل زیر ترازهای $^{41}\text{Ca}_{21}$ و $^{43}\text{Ca}_{23}$ از دیدگاه مدل لایه‌ای نشان می‌دهد. در $^{43}\text{Ca}_{23}$ تعداد حالت‌های کم-انرژی خیلی زیاد است. این حالتها در نتیجه جفت شدگی سه ذره در پوسته $1f_{7/2}$ حاصل می‌شود.



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان



شکل (۱) ترازهای انرژی ایزوتوپهای $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ و $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ از دیدگاه مدل لایه‌ای انرژی ترازها بر حسب keV است [۳].

بنا بر این ما $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ را به عنوان یک سیستم سه ذره‌ای در نظر می‌گیریم و برای برهم کنش بین سه ذره از پتانسیل شبه هلمن استفاده می‌کنیم. در بررسی ایزوتوپها غالباً از چاه پتانسیل، پتانسیل نوسانگر و پتانسیل وود ساکسون استفاده شده است. پتانسیل شبه هلمن از دو جمله تشکیل شده عبارتند از: پتانسیل کولنی که بستگی ساده‌ای به فاصله دارد، و پتانسیل شبه یوکاوا که همانند یوکاوا تابع نمایی از فاصله است.

مطالعه $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ با استفاده از پتانسیل شبه هلمن:

برای مطالعه و محاسبه ترازهای انرژی $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ پتانسیل شبه هلمن به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۷]:

$V(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} e^{-ax}$ a (۱) مقادیر ثابت است و x آن فوق شعاع است، که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۸]:

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2} \quad \rho = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - \bar{r}_3}{\sqrt{6}} \quad (2)$$

معادله شرودینگر به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \left(-\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-ar} \right) - \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu r^2} \right] R = 0 \quad (3)$$

محاسبه ترازهای انرژی با پتانسیل شبه هلمن بسیار مشکل است، برای محاسبه ترازهای انرژی از روشهای جدید استفاده می‌کنند از قبیل: NU ، ابر تقارن و غیره. در این کار ما روش NU استفاده کردیم، که در زیر به صورت مختصر توضیح دادیم [۹، ۱۰].

مروری بر حل روش NU :

این روش بر اساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم که به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ معادله‌ی تبدیل یافته را به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0 \quad (4)$$

ای حداکثر از درجه‌ی اول است. با در نظر گرفتن تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت:



بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (5)$$

معادله ی (۴) به یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می شود؛ (۶) $\sigma(s)y_n''(s) + \tau(s)y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0$ و $\pi(s)$ و λ پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad (9) \quad \lambda = K + \pi'(s) \quad (8) \quad \pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (7)$$

انرژی حالت پایه ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$:

با توجه به روش NU می توانیم معادله (۳) را از مقایسه روابط (۶) و (۷) به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\tilde{\tau} = D - 1 \quad \sigma = r \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 r^2 - \gamma r - \beta \quad (10)$$

$$\pi(r) = \frac{2-D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 r^2 + 4(\beta + k)r + \delta_i} \quad (11)$$

که در آن $\delta_i = 4\beta + (2-D)^2$ است. از معادله فوق با توجه به اینکه زیر رادیکال مجذور یک چند جمله‌ای درجه اول باشد، K را تعیین می کنیم سپس مقدار مناسب $\pi(r)$ را که شرط $\tau' < 0$ را برآورده می کند را انتخاب کرده، در معادله پایین $\pi(r)$ که با توجه به K مورد نظر بدست آوردیم.

$$k = -\gamma - \varepsilon \delta_i^{1/2} \quad (12) \quad \pi(r) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon r - \delta_i^{1/2}] \quad \text{را محاسبه می کنیم:}$$

$$\varepsilon = \frac{-\gamma - \varepsilon}{[\delta_i^{1/2} + (2n+1)]} \quad (13) \quad \text{بدر نظر گرفتن عبارت بالا و رابطه } NU \text{ ویژه مقادیر انرژی به صورت زیر بدست می آید:}$$

$$E_n = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{\gamma^2}{[\delta_i^{1/2} + (2n+1)]^2} \quad (14) \quad \text{با توجه به رابطه (5) تابع موج را بر حسب تابع لاگر به صورت زیر نوشت:}$$

$$R_{n,l} = B_{n,l} n! r^{\frac{((2-D)+\delta_i^{1/2})}{2}} e^{-\varepsilon x} L_n^{\delta_i^{1/2}}(2\varepsilon r) \quad (15)$$

با توجه به رابطه (۱۴) بر حسب ضرایب مناسب می توانیم انرژی حالت پایه ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ را محاسبه کنیم، که در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۲) ویژه مقادیر انرژی حالت پایه ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ به ازای مقادیر مختلف [۴]

${}^A_Z X_N$	$(fm)^{-1} \alpha$	$(MeV) E_{cal}$	$(MeV) E_{exp}$
${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$	۰/۰۰۹	۳۶۸/۸۲۹۱۰۰	۳۶۹/۸۳۳۰۰
	۰/۰۰۹	۳۶۸/۸۲۶۵۰۰	
	۰/۰۰۸	۳۶۸/۹۴۵۸۰۰	
	۰/۰۰۷	۳۶۸/۸۲۳۸۰۰	
	۰/۰۰۶	۳۶۸/۸۲۵۱۰۰	

انرژی حالت پایه ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$:



بیست و یکمین کنفرانس هشتاد و یکم ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ و دانشگاه اصفهان

برای محاسبه انرژی حالت پایه این ایزوتوپ نیز هسته‌ی کامل را $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ در نظر می‌گیریم [۲۰،۱] بنابراین با قراردادن پتانسیل در معادله شرودینگر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \left(-\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-ax} \right) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R = 0 \quad (16)$$

در ادامه محاسبات همانند ایزوتوپ $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ است. بطور مختصر بادر نظر گرفتن حل معادله به روش NU ، ε و $\pi(r)$ ، و مقادیر انرژی و تابع موج را بدست آوردیم:

$$\bar{\tau} = 2 \quad \sigma = r \quad \bar{\sigma} = -\varepsilon^2 r^2 - \gamma r - \beta \quad (17)$$

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 r^2 + 4(\gamma + k)r + \delta_l} \quad (18)$$

که در آن $\delta_l = 1 + 4\beta$ است. در معادله پایین $\pi(r)$ که با توجه به K مورد نظر بدست آوردیم.

$$E_n^{(22)} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{\gamma^2}{[\delta_l^{1/2} + (2n+1)]^2} \quad \varepsilon^{(21)} = \frac{-\gamma}{[\delta_l^{1/2} + (2n+1)]} \quad \pi(r)^{(20)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon r - \delta_l^{1/2}] \quad k = -\gamma - \varepsilon \delta_l^{1/2} \quad (19)$$

با $R_{n,l} = B_{n,l} n! r^{\frac{(\delta_l^{1/2}-1)}{2}} e^{-\varepsilon x} L_n^{\delta_l^{1/2}}(2\varepsilon r)$ رابطه (۲۱) بر حسب ضرایب مناسب می‌توانیم انرژی حالت پایه $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ را محاسبه کنیم، که در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۳) ویژه مقادیر انرژی حالت پایه $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ به ازای مقادیر مختلف [۵]

$^A_Z X_N$	$(fm)^{-1} \alpha$	$(MeV) E_{cal}$	$(MeV) E_{exp}$
$^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$	۰/۰۰۹	۳۴۹/۴۰۹۴۰۰	۳۵۰/۴۱۴۸۰۰
	۰/۰۰۸	۳۴۹/۴۰۷۲۰۰	
	۰/۰۰۷	۳۴۹/۴۰۵۰۰۰	
	۰/۰۰۶	۳۴۹/۴۰۵۸۰۰	
	۰/۰۰۵	۳۴۹/۴۰۷۸۰۰	

همچنین با توجه به محاسبه توابع موج $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ و $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ در روابط (۲۲) و (۱۵) جذر میانگین شعاع باری را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\int R_{1,3}^*(r) r^2 R_{1,3}(r) d^3 r}{\int R_{1,3}^*(r) R_{1,3}(r) d^3 r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

جدول (۴) مقدار جذر میانگین شعاع باری $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ و $^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ [۵، ۶]

$^A_Z X_N$	$(fm)^{-1} \alpha$	$\langle r^2_{cal} \rangle^{\frac{1}{2}} (fm)$	$\langle r^2_{Exp} \rangle^{\frac{1}{2}} (fm)$
------------	--------------------	--	--

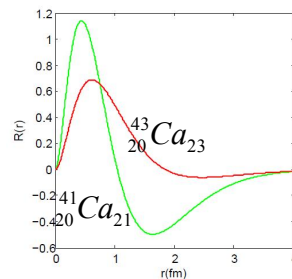


بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

${}_{20}^{41}\text{Ca}_{21}$	۰/۰۰۹	۳/۴۰	۳/۴۷
${}_{20}^{43}\text{Ca}_{23}$	۰/۰۰۹	۳/۴۵	۳/۴۹

در شکل زیر توابع موج حالت پایه ${}_{20}^{41}\text{Ca}_{21}$ و ${}_{20}^{43}\text{Ca}_{23}$ بدست آمده از روابط (۲۲) و (۱۵) را نشان می‌دهد.



شکل (۲) توابع موج حالت پایه ${}_{20}^{41}\text{Ca}_{21}$ و ${}_{20}^{43}\text{Ca}_{23}$

نتیجه گیری:

در این مقاله به محاسبه انرژی حالت پایه و شعاع میانگین مربعی باری ${}_{20}^{43}\text{Ca}_{23}$ و ${}_{20}^{41}\text{Ca}_{21}$ با استفاده از پتانسیل شبه هلمن پرداخته ایم و با استفاده از روش تحلیلی NU معادله شرودینگر را حل نموده ایم. در این کار ما ${}_{20}^{43}\text{Ca}_{23}$ را به عنوان سیستم سه ذره‌ای در نظر گرفته‌ایم که نتایج بدست آمده از انرژی حالت پایه و جذر میانگین شعاع باری در این مقاله با مقادیر تجربی تقریباً همخوانی دارد.

مراجع:

- [۱] T. Engeland, E. Osnes, Shell- Model Calculations in the calcium- isotopes, Physics Letters, ۲۰, ۴۲۴-۴۲۸, (۱۹۶۶).
- [۲] H. E. Mittleer, Shell- Model Analysis of calcium isotopes, Nuclear Physics, ۲۳, ۲۰۰-۲۴۴, (۱۹۶۱).
- [۳] Experimental energy levels can be found from: www.nndc.bnl.gov/.
- [۴] <http://cdfc.sinp.msu.ru/cgi-bin/z=۲۰&a=۴۳>.
- [۵] H. Chen, H. Mei, J. Meng, and J. M. Yao, Binding energy differences of mirror nuclei in a time-odd triaxial relativistic mean field approach, PHYSICAL REVIEW C, ۷۶, ۰۴۴۳۲۵, (۲۰۰۷).
- [۶] I. Angeli, K. P. Marinova, Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update, Atomic Data and Nuclear Data Tables, ۹۹, ۶۹-۹۵, (۲۰۱۳).
- [۷] A. Arda, R. Server, Pseudospin and Spin Symmetric Solutions of Dirac Equation: Hellmann Potential, Wei Hua Potential, Varshni Potential, Z. Naturforsch. ۶۹a, ۱۶۳ (۲۰۱۴).



بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

- [۸] M.R.Shojaei,A.A.Rajabi,Hypercentral constituent quark model and the hyperfine dependenspotential,physics research ,۷,(۲۰۰۷).
- [۹]M.R.Shojaei,A.A.Rajabi, M.Farrokh, and N.Zoghi-Foumani,Energy Levels of spin-1/2 partioles with Yukawa Interaction,Modern.Physics,۵, ۷۷۳-۱۸۰,(۲۰۱۴).
- [۱۰]M.Farrokh,M.R.Shojaei,AndA.A.Rajabi,Klein-Gordon equation with hulthen potential and position dependent mass,Eure.Phys.J.Pluss, ۱۲۸,۱۴,(۲۰۱۳).