



بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

تأثیر مغز سخت در سطح مقطع همجوشی هسته‌های سبک با استفاده از مدل اپتیکی

احمدی، ماریا؛ کوهرخی، طه^۱؛ ایزدپناه، عبدالمجید^{۱*}؛ میرمحمد حسینی، سیدابوالحسن
^۱ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان،

چکیده:

در این مقاله سطح مقطع همجوشی هسته‌های سبک با استفاده از مدل اپتیکی مورد مطالعه قرار گرفته است. مدل اپتیکی یکی از مدل‌های کارآمدی است که در آن پتانسیل حاکم بر واکنش به طور کلی بصورت یک پتانسیل مختلط در نظر گرفته می‌شود. به منظور وارد کردن اثرات کوانتومی، یک مغز سخت برای پتانسیل در نظر گرفته شده است به طوری که همپوشانی کامل توابع موج به عمق شعاع مغز سخت امکان‌پذیر نمی‌باشد. با وجود ساده بودن مدل و در نظر گرفتن ساده‌ترین فرض‌ها، ملاحظه می‌شود که توافق خوبی بین نتایج بدست آمده از این محاسبات و داده‌های تجربی حاصل شده است.

کلمات کلیدی: مغز سخت، سطح مقطع همجوشی، پتانسیل مختلط.

۱- مقدمه

تولید انرژی از طریق همجوشی هسته‌ای، یکی از روش‌های پاک تولید انرژی است که می‌تواند تأمین انرژی را برای بشر تا سالیان بسیار طولانی تضمین کند. این تولید انرژی به روش واکنش همجوشی هسته‌های سبک انجام می‌پذیرد به طوری که در یک واکنش همجوشی، دو هسته سبک با هم ترکیب شده و با تشکیل هسته‌ای سنگین‌تر، مقداری انرژی نیز از این واکنش آزاد می‌گردد. در این زمینه مهم تحقیقاتی و تجربی، سطح مقطع کمی کلیدی به شمار می‌آید که بیانگر احتمال انجام این واکنش است. کمیت اصلی که سطح مقطع واکنش را تعیین می‌کند، انرژی پتانسیل حاکم بر واکنش است. به طور کلی، پتانسیل حاکم بر واکنش، مجموع پتانسیل‌های هسته‌ای و کولنی است که پتانسیل کولنی در فاصله‌های بزرگ (بزرگ‌تر از برد نیروی هسته‌ای)، و پتانسیل هسته‌ای در فاصله‌های کوچک (کوچک‌تر از برد نیروی هسته‌ای)، جملات غالب هستند. یکی از مدل‌های کارآمدی که اغلب به منظور توصیف پراکندگی مورد استفاده قرار گرفته است، مدل اپتیکی نام دارد که در آن پتانسیل هسته‌ای به صورت یک پتانسیل مختلط در نظر گرفته می‌شود. قسمت حقیقی پتانسیل، بیانگر پراکندگی ذرات و قسمت موهومی آن بیانگر جذب ذرات توسط پتانسیل است. در این مقاله، در ساده‌ترین حالت، مدل اپتیکی با در نظر گرفتن یک چاه مربعی مختلط برای پتانسیل هسته‌ای، جهت محاسبه سطح مقطع همجوشی هسته‌های سبک بکار گرفته شده است. همچنین مطابق با تحقیقات صورت‌گرفته مبنی بر اینکه توزیع‌های



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

چگالی دو هسته برهمکنش گر، بنابه اثرات کوانتومی طرد پاؤلی و ماده هسته‌ای، نمی‌توانند به طور کامل با هم همپوشانی داشته باشند، برای پتانسیل هسته‌ای یک مغز سخت (شکل (۱)) در نظر گرفته شده است [۱]. این مغز سخت، مبدأ ($r=0$) را در راستای شعاعی حذف کرده و در نتیجه تابع موج بدست‌آمده از معادله شرودینگر، هردو جواب منظم و غیرمنظم را شامل می‌شود. با در نظر گرفتن این ملاحظات، توافق خوبی بین نتایج حاصل از این محاسبات و داده‌های تجربی حاصل شده است.

۲- سطح مقطع واکنش

در روش پاره‌موجی، سطح مقطع کل واکنش از حاصل جمع سطح مقطع همه پاره‌موج‌ها بدست می‌آید:

(۱)

$$\sigma_{re} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{re,\ell}$$

سطح مقطع هر پاره‌موج برابر است با [۲]:

$$\sigma_{re,\ell} = -\frac{\pi \hbar}{2E\mu} \left(1 - |e^{2i\delta_\ell}|^2\right) \quad (۲)$$

که در آن E انرژی کل هسته‌های برهمکنش‌کننده در دستگاه مختصات مرکز جرم، μ جرم کاهیده و δ_ℓ جابه‌جایی فاز است. ملاحظه می‌شود که چنانچه در این رابطه جابه‌جایی فاز یک کمیت حقیقی باشد، سطح مقطع واکنش صفر خواهد شد. در نتیجه جابه‌جایی فاز را به طور کلی به صورت یک کمیت مختلط در نظر می‌گیریم:

(۳)

$$\begin{cases} \delta_\ell = \delta_{\ell,r} + i\delta_{\ell,i} \\ \cot \delta_\ell = W_{\ell,r} + iW_{\ell,i} \end{cases}$$

با جاگذاری رابطه (۳) در (۲) بدست می‌آید:

$$\sigma_{re,\ell} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left(1 - |e^{2i\delta_\ell}|^2\right) = \frac{\pi}{k^2} \left[\frac{-4W_{\ell,i}}{W_{\ell,r}^2 + (W_{\ell,i} - 1)^2} \right] \quad (۴)$$

که در آن $k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$ عدد موج ذره آزاد است. طبق رابطه (۴)، سطح مقطع واکنش از مؤلفه‌های حقیقی و موهومی اختلاف فاز بدست می‌آید. همانطور که توضیح داده خواهد شد، این مؤلفه‌ها با استفاده از شرایط پیوستگی توابع موج بدست خواهند آمد. در نتیجه ابتدا توابع موج را توسط حل معادله شرودینگر بدست می‌آوریم. با توجه به کوتاه‌برد بودن برهمکنش هسته‌ای، در خارج از ناحیه برد نیروی هسته‌ای $r > a$ تنها پتانسیل کولنی بر تابع موج تأثیر می‌گذارد. معادله شرودینگر مستقل از زمان برای این ناحیه عبارت است از:



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\nabla^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right] R_{\ell, Coul}(r) = E R_{\ell, Coul}(r) \quad (5)$$

از آنجایی که پتانسیل کولنی یک پتانسیل مرکزی است، تقارن کروی داشته و از زاویه سمتی ϕ مستقل است ($m=0$). با استفاده از تغییر متغیرهای $R(r) = u(r)/r$ و $\rho = kr$ قسمت شعاعی معادله شرودینگر برای تابع موج کولنی به شکل زیر در می آید:

(۶)

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2\eta}{\rho} + 1 \right] u_{\ell, Coul}(\rho) = 0$$

که در آن پارامتر بی بعد کولنی است. جوابهای این معادله برای قسمت شعاعی تابع موج کولنی عبارت است از [۳]:

(۷)

$$u_{\ell, Coul}(\rho) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell (G_\ell(\rho) + F_\ell(\rho) \cot \delta_\ell)$$

که در این رابطه $G_\ell(\rho)$ و $F_\ell(\rho)$ به ترتیب توابع موج کولنی منظم و نامنظم می باشند. مشتق لگاریتمی این تابع موج در مرز $r=a$ برابر است با:

$$\left. \frac{u'_{\ell, Coul}(\rho)}{u_{\ell, Coul}(\rho)} \right|_{r=a} = ka \frac{F'_\ell(ka) \cot \delta_\ell + G'_\ell(ka)}{F_\ell(ka) \cot \delta_\ell + G_\ell(ka)} = \rho_a \frac{F'_\ell(\rho_a) \cot \delta_\ell + G'_\ell(\rho_a)}{F_\ell(\rho_a) \cot \delta_\ell + G_\ell(\rho_a)} \quad (8)$$

در فاصله $r \leq a$ ، پتانسیل هسته ای جمله غالب است که آن را به صورت یک چاه مربعی مختلط سه بعدی، شامل یک مغز سخت با شعاع R_c در نظر می گیریم (شکل (۱)):

(۹)

$$V_N(r) = \begin{cases} \infty & r \leq R_c \\ -U_r - iU_i & R_c < r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

از آنجایی که سطح مقطع همجوشی هسته های سبک در انرژی های نسبتاً پایین رخ می دهد و در این بازه انرژی، موج S ($\ell=0$) بیشترین سهم را دارد، تنها $\ell=0$ را در نظر می گیریم. بنابراین حل معادله شرودینگر برای قسمت هسته ای، با در نظر گرفتن پتانسیل رابطه (۹) و $\ell=0$ برابر می شود با:

$$u_{0,N}(k_1 r) = A (\cos k_1 r - \tan(\rho_{1c}) \sin k_1 r) \quad (10)$$

که در آن $k_1 = \sqrt{(2\mu/\hbar^2)(E + U_r + iU_i)} = k_{1r} + ik_{1i}$ عدد موج مختلط هسته ای و $\rho_{1c} = k_1 R_c$ است. مشتق لگاریتمی قسمت شعاعی تابع موج هسته ای در مرز $r=a$ برابر است با:



بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان

$$a \frac{u'_{0,N}(k_1 r)}{u_{0,N}(k_1 r)} \Big|_{r=a} = \rho_{1a} \frac{-\sin(\rho_{1a}) - \tan(\rho_{1c}) \cos(\rho_{1B})}{\cos(\rho_{1a}) - \tan(\rho_{1c}) \sin(\rho_{1B})} = N_{0r}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) + i N_{0i}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) \quad (11)$$

که در آن $\rho_{1a} = k_1 a$ و $N_{0r}(\rho_{1a})$ و $N_{0i}(\rho_{1a})$ به ترتیب مؤلفه‌های حقیقی و موهومی مشتق لگاریتمی هسته‌ای برای $\ell = 0$ هستند:

$$\begin{cases} N_{0r}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) = \frac{\rho_{1ar} \sin(2\rho_{1cr} - 2\rho_{1ar}) + \rho_{1ai} \sinh(2\rho_{1ci} - 2\rho_{1ai})}{2H(\rho_{1a}, \rho_{1c})} \\ N_{0i}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) = \frac{\rho_{1ai} \sin(2\rho_{1cr} - 2\rho_{1ar}) + \rho_{1ar} \sinh(2\rho_{1ai} - 2\rho_{1ci})}{2H(\rho_{1a}, \rho_{1c})} \\ H(\rho_{1a}, \rho_{1c}) = -\cosh^2(\rho_{1ai}) \cosh(2\rho_{1ci}) + \cos^2(\rho_{1cr}) \cos(2\rho_{1ar}) \\ \quad + \cosh^2(\rho_{1ci}) - \cos^2(\rho_{1ar}) + 0.5 \sin(2\rho_{1ar}) \sin(2\rho_{1cr}) \end{cases} \quad (12)$$

شرایط پیوستگی توابع موج و مشتق آن‌ها در نواحی $r > a$ و $r < a$ در مرز $r = a$ ، با برابر قراردادن مشتق‌های لگاریتمی توابع موج به طور همزمان برآورده می‌شوند. بنابراین با برابر قراردادن روابط (۸) و (۱۱)، برای $\ell = 0$ داریم:

$$a \frac{u'_{0,N}(k_1 r)}{u_{0,N}(k_1 r)} \Big|_{r=a} = a \frac{u'_{0,Coul}(kr)}{u_{0,Coul}(kr)} \Big|_{r=a} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \rho_a \frac{F'_0(\rho_a) \cot \delta_0 + G'_0(\rho_a)}{F_0(\rho_a) \cot \delta_0 + G_0(\rho_a)} = N_{0r}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) + i N_{0i}(\rho_{1a}, \rho_{1c})$$

با استفاده از این تساوی مؤلفه‌های تغییر فاز به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} W_{0r} = -\frac{\alpha_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) \beta_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) + \zeta_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) \tau_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a)}{\beta_0^2(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) + \zeta_0^2(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a)} \\ W_{0i} = -\frac{-\alpha_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) \zeta_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) + \tau_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) \beta_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a)}{\beta_0^2(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) + \zeta_0^2(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a)} \end{cases} \quad (14)$$

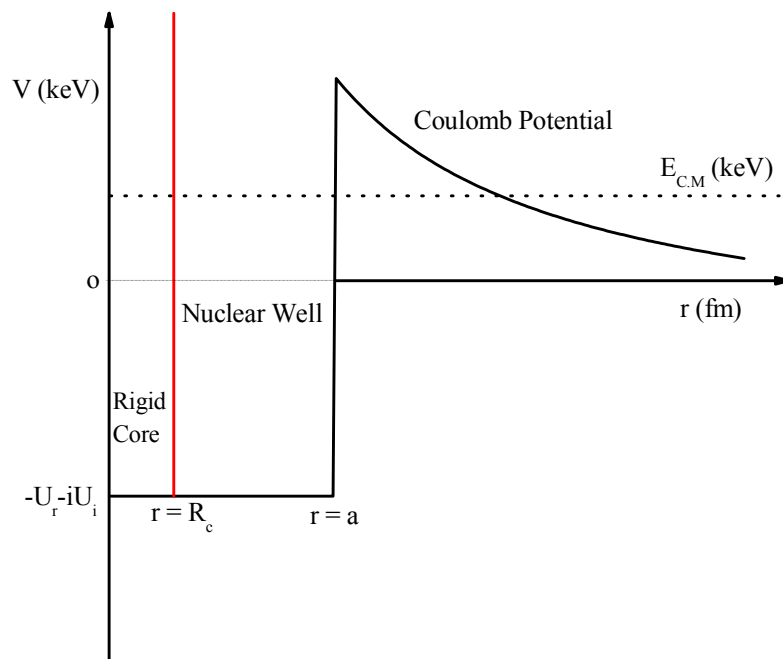
که در آن:

$$\begin{cases} \alpha_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) = a N_{0r}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) G_0(\rho_a) - \rho_a G'_0(\rho_a) \\ \beta_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) = a N_{0r}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) F_0(\rho_a) - \rho_a F'_0(\rho_a) \\ \tau_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) = a N_{0i}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) G_0(\rho_a) \\ \zeta_0(\rho_{1a}, \rho_{1c}, \rho_a) = a N_{0i}(\rho_{1a}, \rho_{1c}) F_0(\rho_a) \end{cases} \quad (15)$$



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان



شکل (۱): چاه پتانسیل مختلط هسته‌ای، پتانسیل دافعه کولنی و مغز سخت بر حسب فاصله شعاعی r .

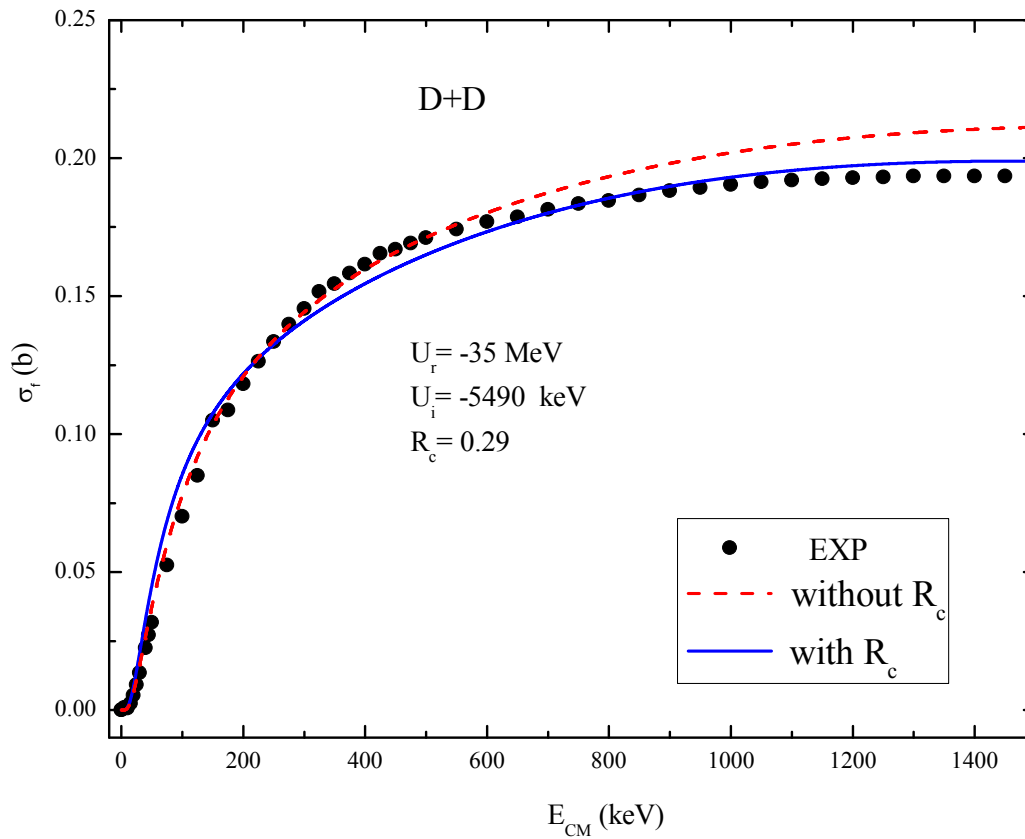
۳- نتیجه گیری

با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۴) سطح مقطع واکنش بدست می‌آید. نتایج حاصل برای دو واکنش دوتریوم-دوتریوم و هلیوم-۳-هلیوم-۳ در شکل‌های (۲) و (۳) بر حسب انرژی کل در دستگاه مختصات مرکزجرم رسم شده‌اند. خط‌چین بدون در نظر گرفتن مغز سخت، خط پیوسته با در نظر گرفتن مغز سخت و نقاط توپر بیانگر داده‌های تجربی هستند [۴]. از این شکل‌های ملاحظه می‌شود که به طور کلی در نظر گرفتن مغز سخت برای پتانسیل مختلط هسته‌ای سبب بهتر شدن نتایج حاصل از محاسبات می‌شود. سه پارامتر، شامل قسمت حقیقی پتانسیل هسته‌ای U_r ، قسمت موهومی پتانسیل هسته‌ای U_i و شعاع مغز سخت R_c از روی برازش نتایج حاصل از محاسبات (رابطه (۳)) با داده‌های تجربی بدست می‌آیند. مقادیر بدست آمده روی هر شکل درج شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که علی‌رغم ساده بودن مدل و فرض‌های ساده کننده مانند در نظر گرفتن چاه مربعی، توافق مناسبی بین نتایج حاصل از محاسبات و داده‌های تجربی حاصل شده است.



بیست و یکمین کنفرانس هشتای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان



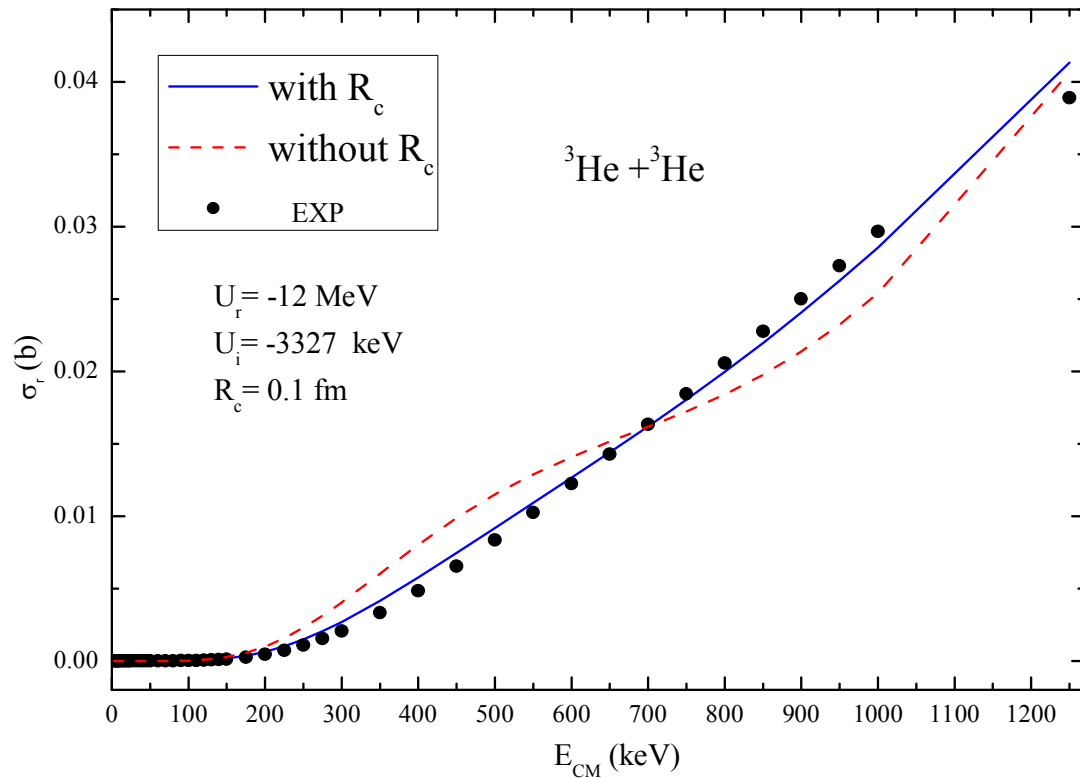
شکل

(۲): سطح مقطع همجوشی دوتریوم-دوتریوم برحسب انرژی کل در دستگاه مختصات مرکز جرم. نقاط توپر داده‌های تجربی، خط چین بدون در نظر گرفتن مغز سخت و خط پیوسته با در نظر گرفتن مغز سخت است.



بیست و یکمین کنفرانس هسته‌ای ایران

۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۹۳ دانشگاه اصفهان



شکل (۳): نمودار سطح مقطع واکنش همجوشی هلیوم-۳-هلیوم-۳ برحسب انرژی کل در دستگاه مختصات مرکز جرم. نقاط توپر داده‌های تجربی، خط چین بدون در نظر گرفتن مغز سخت و خط پیوسته با در نظر گرفتن مغز سخت است.

مراجع

- [1] O. N. Ghodsi and V. Zanganeh, *The effect of the nuclear state equation on the surface diffuseness parameter of the Woods–Saxon potential in the heavy ion fusion reactions*, Nuclear Physics A, 846, 40–50, 2010
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987).
- [3] M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (National Bureau of Standards, 1972).
- [4] C. L. Dunford, Data retrieved from the Cross Section Information Storage and Retrieval System (CSISRS) data base (Feb 27, 1996); available on Internet (<http://www.nndc.bnl.gov>).