۷ و ۸ اسفند ماه ۱۳۹۲
رشت– دانشگاه گیلان
بیستمین کنفرانس هسته‌ای ایران
Nuclear society of Iran
20th Iranian Nuclear Conference
26-27 February , 2014
University of Guilan Rasht - Iran

حل نمونه ای معادله‌ی گراد–شفرانف در یک هندسه ساده و شرایط مرزی ثابت

یحیی، صادقی* ؛ سمانه، یارمحمودی

سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته‌ای

چکیده:

بررسی تعادل و پایداری پلاسمای توکامک از اهمیت بالایی برخوردار است. یکی از مدل‌های بسیار مناسب برای بررسی تعادل پلاسمای توکامک، مگنتوهیدرودینامیک ایده‌آل می‌باشد که در این مدل از پدیده‌های غیرخطی صرف‌نظر می‌شود. معادله‌ی گراد–شفرانف بدست آمده ازآن، به عنوان مدل مناسب برای تعادل پلاسمای سیستم‌های محورمتقارن شناخته شده است. در این پژوهش، از یک معادله‌ی دیفرانسل جزئی برای حل نمونه‌ای این معادله، بهره گرفته شده است. باتخصیص توابع اختیاری[1] برای معادله‌ی دیفرانسیل غیر همگن و حل این معادله‌ی دیفرانسیل جزئی[2]، علاوه بر شار مغناطیسی کمیت‌های دیگری از جمله میدان مغناطیسی چنبره‌ای و قطبی، چگالی جریان چنبره‌ای و کل و نیز فشار قابل محاسبه می‌باشند.

کلید واژه: *توکامک، تعادل، مدل مگنتوهیدرودینامیک، معادله‌ی گراد–شفرانف، روش معادله‌ی دیفرانسیل جزئی*

۱. مقدمه:

امروزه به دلیل بزرگ‌تر و پیچیده‌تر شدن دستگاه‌های همجوشی از جمله توکامک و انجام آزمایش‌های دقیق‌تر، نیاز به تحلیل‌های کمی، افزایش یافته است. ازاین‌رو، نقش محاسبات در زمینه‌ی تحقیقات همجوشی، بسیار زیاد شده‌است [۱]. از آنجایی که تعادل و پایداری پلاسما، نقش بسیار کلیدی در فیزیک توکامک و مهندسی آن ایجاد می‌کند، از ابتدای تحقیقات توکامک، بررسی این موضوع به یکی از دغدغه‌های اصلی تبدیل شده است. معادله‌ی تعادل مگنتوهیدرودینامیک[3] ایده‌آل (معادله‌ی گراد–شفرانف[4]) به عنوان یک مدل مناسب برای بررسی تعادل پلاسما با تقارن محوری شناخته شده است. البته این الگو برای توصیف همه‌ی پدیده‌های مشاهده شده در پلاسما کافی نیست، اما برای تحلیل تعادل و پایداری در یک پلاسمای محور متقارن محصور شده همانند توکامک، می‌تواند الگوی مناسبی باشد [۲].

---

۱ Arbitrary functions

۲ Partial Differential Equation

۳ Magnetohydrodynamics

۴ Grad-Shafranov equation

در این الگو، هویت جداگانه‌ای برای الکترون‌ها و یون‌ها در نظر گرفته نمی‌شود [۳]. همچنین محدودیت پدیده‌ها در مقیاس فضایی بزرگ و فرکانس پایین، اعمال می‌گردد [۴] و [۵]. معادلات این الگو بصورت زیر خلاصه شده‌اند:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla.v \\ \rho\frac{dv}{dt} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} - \nabla p \\ \frac{dp}{dt} = -\gamma p.\nabla v \\ \boldsymbol{j} = \nabla\times\boldsymbol{B}/\mu_{\cdot} \\ \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E} \\ \mathbf{E} + v\times\boldsymbol{B} = \cdot \end{cases} \qquad (۱)$$

پنج معادله‌ی اول به ترتیب معادله‌ی بقای جرم، معادله‌ی آهنگ تغییر سرعت بر اساس معادله‌ی حرکت، معادله‌ی بقای آنتروپی، معادله‌ی چگالی جریان ناشی از قانون آمپر و معادله‌ی آهنگ تغییر میدان مغناطیسی ناشی از معادله‌ی القا می‌باشند. معادله‌ی آخر نیز با فرض رسانای کامل بودن پلاسما حاصل می‌گردد (در این حالت، هیچ نوع میدان الکتریکی دوام نخواهد داشت). در این معادلات ρ چگالی جرمی، v سرعت سیال، $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v.\nabla$ عملگر مشتق زمانی، $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$ به ترتیب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و $\boldsymbol{j}$ چگالی جریان است [۳].

با توجه به شرط اصلی تعادل پلاسمای توکامک (صفر بودن نیروی وارد بر پلاسما در تمام نقاط)، معادله‌ی توازن نیروی تعادل MHD از مدل مگنتوهیدرودینامیک بصورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}p \qquad (۲)$$

این رابطه نشان می‌دهد که خطوط جریان بر سطوح مغناطیسی قرار دارند و همچنین سطوح مغناطیسی سطوحی با فشار ثابت می‌باشند. با توجه به شرط بالا، معادله‌ی تعادل پلاسمای توکامک با تقارن محوری را می‌توان بصورت یک معادله‌ی دیفرانسیلی جزئی بیضوی[۵] مرتبه‌ی دوم از تابع شار قطبی ψ نوشت. این معادله که معمولاً گراد–شفرانف نامیده می‌شود شامل دو تابع دلخواه $p = p(\psi)$ و $f = f(\psi)$ است که به ترتیب تابع فشار و چگالی جریان قطبی می‌باشند و بصورت زیر نوشته می‌شود:

[۵] Elliptic PDE

$$R\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R j_\phi = \mu_0 R^2 p'(\psi) - \mu_0^2 f(\psi)f'(\psi) \qquad (۳)$$

در اینجا، R محور اصلی چنبره و $R\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ بصورت عملگر Δ^* در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که این معادله، غیرهمگن بوده و در صورت عدم وجود جریان به یک معادله‌ی همگن تبدیل خواهد شد و نتیجه‌ی حل آن، شار مغناطیسی است [۳].

۲ . روش کار:

از آنجایی که حل معادله‌ی گراد–شفرانف بصورت تحلیلی مشکل است؛ برای حل این معادله، از مدل‌های متفاوتی استفاده می‌گردد. در اینجا از یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، برای حل نمونه‌ای معادله‌ی گراد–شفرانف استفاده خواهد شد. معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$-\boldsymbol{\nabla}.(C\boldsymbol{\nabla}u) + Au = F \qquad (۴)$$

الگوریتم حل در این معادله با استفاده از روش تکرار نیوتن خواهد بود. از آنجایی که توکامک دارای تقارن چنبره‌ای می‌باشد (با فرض $\frac{\partial}{\partial\phi}=0$)، حل معادله‌ی گراد–شفرانف بصورت دوبعدی انجام می‌شود؛ بنابراین درحالت دوبعدی در مختصات قائم خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Au = F \qquad (۵)$$

برای همگون‌سازی معادله‌ی دیفرانسیلی جزئی با معادله‌ی گراد–شفرانف، از فرضیات زیر استفاده خواهیم کرد:

$$x \longrightarrow R, \quad y \rightarrow z, \quad u \rightarrow \psi, \quad A \rightarrow 0, \quad C \rightarrow {}^{1}/_{R}, \quad F \rightarrow \mu_0 J_\phi \qquad (۶)$$

با توجه به این فرضیات، معادله‌ی (۵) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$-\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \mu_0 J_\phi \qquad (۷)$$

در نهایت با تعریف

$$\Delta^*\psi \equiv R\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = -R\left(-\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right) \qquad (۸)$$

خواهیم داشت:

$$\Delta^*\psi = -\mu_۰ RJ_\phi \qquad (۹)$$

این معادله، در حقیقت همان معادله‌ی گراد–شفرانف می‌باشد. در صورتی که $F = ۰$ در نظر گرفته شود، به معادله‌ی همگن گراد–شفرانف بصورت

$$\Delta^*\psi = ۰ \qquad (۱۰)$$

خواهیم رسید. به کمک معادله‌ی (۳)، می‌توان پارامتر F را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$F = -\mu_۰ Rp'(\psi) + \frac{\mu_۰^۲}{۲} f(\psi)f'(\psi) \qquad (۱۱)$$

از آنجایی که توابع f و p موجود در معادله‌ی گراد–شفرانف، توابع دلخواهی هستند؛ در اینجا از شکل چند جمله‌ای درجه دوم برای این توابع استفاده خواهیم کرد.

$$\begin{aligned} f &= f_۰ + f_۱ u + f_۲ u^۲ \\ p &= p_۰ + p_۱ u + p_۲ u^۲ \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

از این پس بررسی مسئله‌ی تعادل پلاسمای توکامک، تبدیل به حل یک PDE خواهد شد. همانطور که می‌دانید در راستای حل یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، چندین مرحله وجود دارد. این مراحل بصورت خلاصه در زیر آورده شده است.

- تعیین هندسه‌ی مسئله: هندسه‌ی در نظر گرفته شده برای حل این PDE، یک بیضی‌گون متشکل از چهار ناحیه‌ی مجزا می‌باشد.
- تعیین شبکه‌ی[۶] مثلثی هندسه‌ی مسئله.
- انتخاب مناسب برای توابع اختیاری و تعیین ضرایب $f_۰$ ، $f_۱$ ، $f_۲$ ، $p_۰$ ، $p_۱$ و $p_۲$.
- تعیین شرایط مرزی: شرایط مرزی مفروض برای حل این PDE بصورت ترکیبی از شرایط دیریکله[۷] و نویمن[۸] می‌باشد.

نتیجه‌ی نهایی حل این PDE به عنوان یک حل نمونه‌ای از معادله‌ی گراد–شفرانف، شار مغناطیسی می‌باشد. لازم به ذکر است که با این روش می‌توان کمیت‌های دیگری را نیز تعیین کرد. از جمله این کمیت‌ها می‌توان به میدان مغناطیسی چنبره‌ای B_ϕ ، میدان مغناطیسی قطبی B_θ ، جریان چنبره‌ای j_ϕ و جریان کل j_t با روابط زیر اشاره کرد [۳]:

---

[۶] Mesh

[۷] Dirichlet boundary condition

[۸] Neumann boundary condition

$$\begin{cases} B_\phi = \dfrac{\mu_\circ f(\psi)}{R} \\ B_\theta = \left|\dfrac{1}{R}\left(\nabla\psi \times \boldsymbol{i}_\phi\right)\right| \end{cases} \quad (۱۳)$$

$$\begin{cases} j_\phi = R\dfrac{dp(\psi)}{d\psi} + B_\phi\dfrac{df(\psi)}{d\psi} = Rp'(\psi) + \dfrac{\mu_\circ}{R}f(\psi)f'(\psi) \\ j_\theta = \left|\dfrac{1}{R}\left(\nabla f(\psi) \times \boldsymbol{i}_\phi\right)\right| \end{cases} \Rightarrow \quad j_t = \sqrt{j_\theta^2 + j_\phi^2} \quad (۱۴)$$

در این روابط $\boldsymbol{i}_\phi$ بردار یکه در راستای چنبره‌ای می‌باشد. همچنین می‌توان فشار را با استفاده چند جمله‌ای پیش‌فرض توابع اختیاری برای کمیت فشار در طرف دوم معادله‌ی دیفرانسیل جزئی محاسبه نمود.

۳. نتایج:

در ادامه برای حل PDE مفروض به عنوان حل نمونه‌ای معادله‌ی گراد–شفرانف، مشخصه‌های زیر در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که ایجاد هندسه‌ی بیضی‌گون با مشخصه‌های r_{minor} و z_{minor}، شبکه‌بندی این هندسه، همچنین حل معادله‌ی PDE مفروض، توسط نرم‌افزار متلب صورت گرفته است.

جدول ۱: مشخصه‌های در نظر گرفته شده برای حل PDE مفروض

$f_\circ$	f_1	f_2	$p_\circ$	p_1	p_2	r_{minor}	z_{minor}
۱,۰۰	+۰,۱۰	-۴,۱۶	۰,۰۰	۱,۰۰	۱۰,۷	۰,۲۵	۰,۲۷

به کمک این مشخصه‌ها و روابط (۱۱) و (۱۲) خواهیم داشت:

$$F = [1 + 0.1]u - [4.16]u^2 \times [0.1 + 2(-4.16)]u/x + x[1 + 2(10.7)u] \quad (۱۵)$$

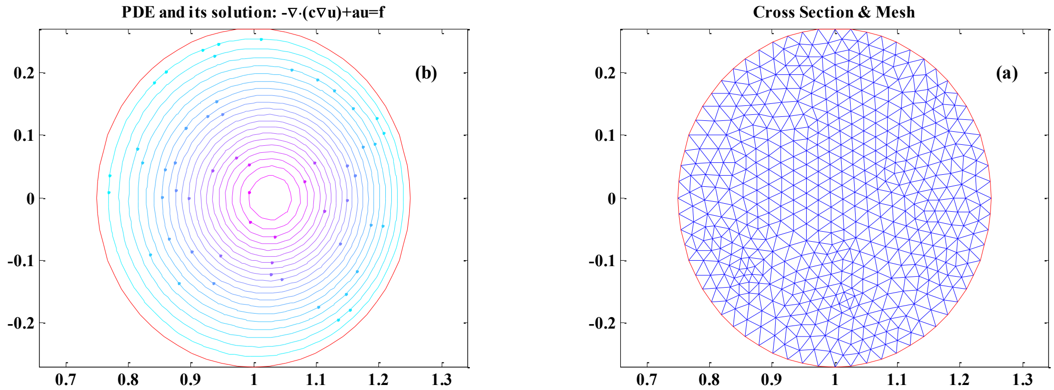
همانطور که می‌دانید در حل معادلات غیرخطی نیاز به محاســبه‌ی ژاکوبین می‌باشــد، بنابراین از ســه روش می‌توان برای محاسبه ژاکوبین استفاده نمود:

- ارزیابی ژاکوبین ثابت (Fixed) در تقریب ماتریس سختی بر اساس تکرار ماتریس نقطه– ثابت.
- ارزیابی ژاکوبین فشرده (Lumped) در تقریب روش اجزای محدود بر اساس تمایز عددی ضرایب.
- ارزیابی عددی ژاکوبین کامل (Full) بر اساس تابع numjac.

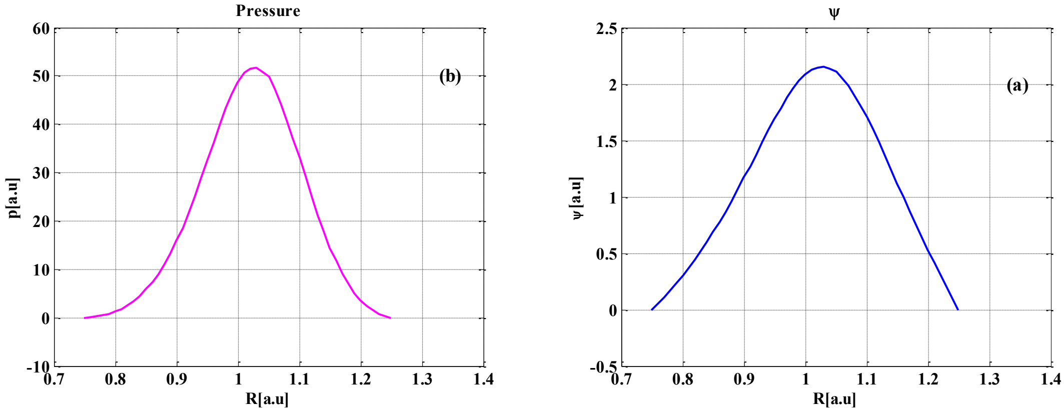
در نهایت با انجام مراحل ذکر شده برای حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی موردنظر با مشخصه‌های ذکر شده در جدول (۱)، نتایج بصورت زیر حاصل خواهد شد:

جدول ۲: نتایج بدست آمده از روش‌های متفاوت ارزیابی ژاکوبین

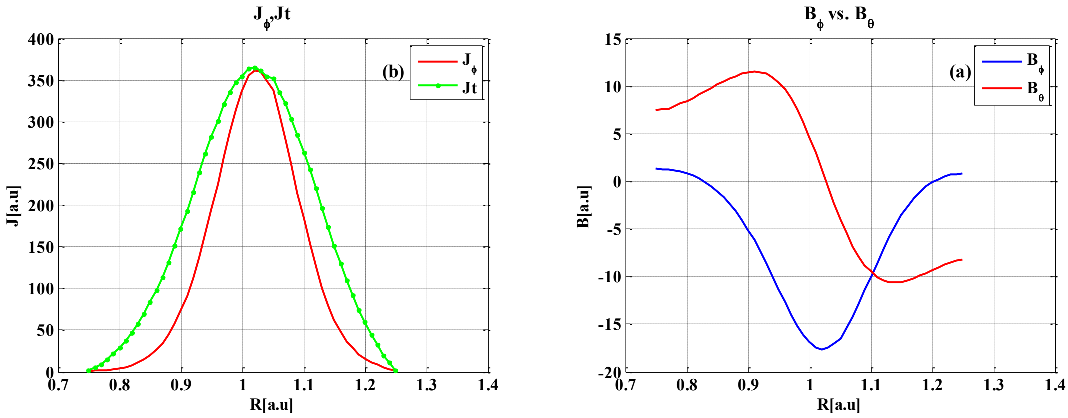
Jacobian methods	***Fixed***		***Lumped***		***Full***	
Iteration Number	**residuals**	**Step size**	**residuals**	**Step size**	**residuals**	**Step size**
۰	۱,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰		۱,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰		۱,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
۱	۰,۰۳۱۶۷۰۸۲۶۶	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰,۵۰۰۰۰۰۰	۰,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰,۵۰۰۰۰۰۰
۲	۰,۰۱۰۷۴۰۶۷۸۸	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۶۹۱۷۱۰۹۱۸	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۶۹۷۱۵۴۶۶۵	۱,۰۰۰۰۰۰۰
۳	۰,۰۰۱۹۱۴۱۶۱۷	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۴۷۰۳۶۹۸۸۹	۰,۵۰۰۰۰۰۰	۰,۰۴۵۴۰۱۹۸۴۵	۰,۵۰۰۰۰۰۰
۴	۰,۰۰۰۲۹۱۵۹۲۱	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۲۷۹۴۹۶۱۹۳	۰,۵۰۰۰۰۰۰	۰,۰۲۷۱۷۲۹۲۵۵	۰,۵۰۰۰۰۰۰
۵	۰,۰۰۰۰۴۵۶۹۳۸	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۹۱۹۶۹۸۰۱	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۸۷۵۸۴۱۸۴	۱,۰۰۰۰۰۰۰
۶			۰,۰۰۰۱۰۵۱۱۸۶	۱,۰۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۷۱۸۳۲۴	۱,۰۰۰۰۰۰۰
۷			۰,۰۰۰۰۰۲۷۸۰۲	۱,۰۰۰۰۰۰۰		



شکل ۱: (a) سطح مقطع و شبکه‌ی ایجاد شده بر روی آن، (b) منحنی‌های شار حاصل از حل PDE مفروض به عنوان حل نمونه‌ای معادله‌ی گراد–شفرانف در هندسه‌ی بیضی‌گون ایجاد شده.



شکل ۲: (a) شار قطبی، (b) نمایه‌ی فشار. R به محور اصلی چنبره اشاره دارد.



شکل ۳: (a) B_ϕ میدان چنبره‌ای و B_θ میدان قطبی، (b) j_ϕ چگالی جریان چنبره‌ای و j_t چگالی جریان کل. R به محور اصلی چنبره اشاره دارد.

۴. بحث و نتیجه‌گیری:

یکی از مناسب‌ترین مدل‌ها برای تعادل پلاسمای محور متقارن، معادله‌ی گراد–شفرانف ناشی از مدل مگنتوهیدرودینامیک می‌باشد. همانگونه که دیده شد، با استفاده از یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، می‌توان معادله‌ی گراد–شفرانف توصیف‌کننده‌ی تعادل پلاسمای توکامک را بصورت نمونه‌ای حل کرد. معادله‌ی در نظر گرفته شده در این پژوهش، بصورت $-\nabla.(C\nabla u)+Au=F$ می‌باشد که با مجموعه‌ای از فرضیات به معادله‌ی گراد–شفرانف مبدل می‌گردد. بنابراین با استفاده از این معادله، مسئله‌ی تعادل به حل یک PDE، کاهش می‌یابد. در ادامه با ایجاد یک هندسه‌ی بیضی‌گون، شبکه‌بندی این هندسه و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب، شار مغناطیسی بدست خواهد آمد. لازم به ذکر است که با این روش کمیت‌های دیگری از جمله میدان مغناطیسی چنبره‌ای و قطبی، چگالی جریان چنبره‌ای و کل و همچنین فشار قابل محاسبه‌اند.

مراجع:

[۱] T. Takeda and S. Tokuda, "Computation of MHD Equilibrium of Tokamak Plasma", Journal of Computational Physics, Vol. ۹۳, pp. ۱-۱۰۷, ۱۹۹۱.

[۲] W. M. Stacey, "Fusion; An Introduction to the Physics and Technology of Magnetic Confinement Fusion", WILY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Second Edition, ۲۰۱۰.

[۳] J. Wesson, "Tokamaks", Clarendon Press-Oxford, Third Edition, ۲۰۰۴.

[۴] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, "Principles of Plasma Physics", McGRAW-HILL BOOK COMPANY, ۱۹۳۲.

[۵] K. Miyamoto, "Fundamentals of Plasma Physics and Controlled fusion", NIFS-PROC-۴۸, ۲۰۰۰.