۷ و ۸ اسفند ماه ۱۳۹۲
رشت- دانشگاه گیلان
بیستمین کنفرانس هسته‌ای
Nuclear society of Iran
20th Iranian Nuclear Conference
26-27 February, 2014
University of Guilan Rasht - Iran

حل تحلیلی معادله پخش نوترون وابسته به زمان دوگروهی-دوبعدی به روش نودال و با استفاده از تقریب فرار عرضی سهموی در هندسه چهارگوش

محمد، حسینی*؛ حسین، خلفی؛ صمد، خاکشورنیا

سازمان انرژی اتمی، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، پژوهشکده تحقیقات و توسعه راکتورها و شتابدهنده ها

چکیده:

شبیه‌سازی دقیق قلب راکتور به منظور پیش‌بینی رفتار وابسته به زمان-مکان نوترون بسیار زمان‌بر و پرهزینه بوده است. بدین منظور استفاده از روش‌های نوینی مانند روش نودال اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. در این پژوهش، نرم‌افزاری به منظور حل معادله پخش نوترون وابسته به زمان دو گروهی با استفاده از روش نودال تحلیلی در هندسه‌های چهارگوش دو بعدی به منظور پیش‌بینی رفتار گذرای نوترونی قلب راکتورهای آبی توسعه داده شده است. در این روش، معادلات دو بعدی پخش نوترون، پس از گسسته‌سازی زمانی به روش ضمنی، به دو معادله یک بعدی شکسته شده و پاسخ هر یک از آنها با استفاده از تقریب فرار عرضی سهموی به صورت تحلیلی محاسبه خواهد شد. نتایج بدست آمده از راستی‌آزمایی نشان می‌دهند که روش نودال تحلیلی از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

***کلمات کلیدی:** معادله پخش نوترون، نودال تحلیلی، فرار عرضی، تقریب سهموی، رفتار گذرا*

۱. مقدمه:

تعیین توزیع فضایی قدرت قلب در طراحی و آنالیز راکتورهای آب سبک از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. پاسخ به مسائل ایمنی در زمینه سناریوهای حوادث مختلف، اغلب نیازمند پیدا کردن توزیع گذرای قدرت می‌باشد. یکی از بهترین روش‌های پاسخ به مسائل ایمنی، توسعه روش‌های نظری پیچیده است، که ما را قادر می‌سازد تا اطلاعات ایمنی مربوطه را تولید کنیم [۱]. اسمیت[۱] در سال ۱۹۷۶، روش تحلیلی نودال را برای حل معادله پخش نوترون دو گروهی چند بعدی در حالت پایا و گذرا ارائه داده است. دو نقص مهم در روش اسمیت، محدودیت در تعداد گروه‌های انرژی و عدم همگرایی در حل برخی مسائل بوده است. در سال ۲۰۰۷ اراگونس[۲] توانست تا حد زیادی محدودیت‌های فوق‌الذکر را برطرف کند [۲]. تاکنون کدهای محاسبات قلب مختلفی در جهان تولید شده‌اند که از روش‌های نودال استفاده می‌کنند. از آن جمله می‌توان به کد QUANDRY[۱] اشاره کرد. در این پژوهش، سعی شده است تا با استفاده از روش نودال تحلیلی، یک نرم‌افزار حل معادله پخش نوترون وابسته به زمان در هندسه‌های چهارگوش دو بعدی و در دو گروه انرژی توسعه داده شود.

---
[۱] Smith
[۲] Aragones

۲. روش نودال تحلیلی:

روش نودال تحلیلی یکی از روش‌های نودال می‌باشد، که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است. این روش به دلیل تحلیلی بودن، از دقت خوبی برخوردار می‌باشد. در این روش، تابع تحلیلی شار نوترون در هر نود(گره) بدست می‌آید. سپس از این توابع تحلیلی در محاسبه جریان خالص روی صفحات بین نودها استفاده می‌گردد و نهایتاً، با استفاده از جریان بدست آمده، تصحیح معادلات پخش انجام می‌گیرد. حفظ توازن نوترون و همچنین داشتن پاسخ‌های با دقت مناسب برای مش‌های با طول زیاد از مزیت‌های روش نودال تحلیلی محسوب می‌شود.

معادلات وابسته به زمان پخش نوترون چند گروهی و غلظت نیاهسته‌های نوترون تاخیری به صورت معادلات ۱ می‌باشد [۱]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V_g}\frac{\partial \varphi_g(\vec{r},t)}{\partial t} = -\nabla.\vec{J}_g(\vec{r},t) - \Sigma_{t,g}(\vec{r},t)\varphi_g(\vec{r},t) + \sum_{g'=1}^{G}\left[\Sigma_{g'\to g}(\vec{r},t) + (1-\beta)\chi_{g,p}\upsilon\Sigma_{f,g'}(\vec{r},t)\right]\varphi_{g'}(\vec{r},t) \\
&+\sum_{d=1}^{D}\chi_{g,d}\lambda_d C_d(\vec{r},t) \\
&\frac{\partial C_d(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta_d\sum_{g=1}^{G}\upsilon\Sigma_{f,g}(\vec{r},t)\varphi_g(\vec{r},t) - \lambda_d C_d(\vec{r},t) \\
&d = 1,.., D \\
&g = 1,.., G
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

که در آن

$D \equiv$ تعداد گروه نیاهسته‌های تولیدکننده نوترون تأخیری

$\varphi_g \equiv$ شار عددی نوترون در گروه امg

$\vec{J}_g \equiv$ بردار جریان نوترون در گروه امg

$C_d \equiv$ چگالی نیاهسته‌های تولیدکننده نوترون تأخیری در گروه امd

$D_g \equiv$ ضریب پخش در گروه امg

$\Sigma_{t,g} \equiv$ سطح‌مقطع ماکروسکوپی کل در گروه امg

$\Sigma_{f,g} \equiv$ سطح‌مقطع ماکروسکوپی شکافت در گروه امg

$\Sigma_{g'\to g} \equiv$ سطح‌مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه g' به گروه g

$\chi_{g,p} \equiv$ طیف شکافت نوترون‌های آنی در گروه امg

$\chi_{g,d} \equiv$ طیف شکافت نوترون‌های تأخیری در گروه امg

$\upsilon \equiv$ تعداد متوسط نوترون‌های تولیدشده در هر شکافت

$\beta \equiv$ کل کسر نوترون‌های تأخیری ($\beta = \sum_{d=1}^{D}\beta_d$)

$\lambda_d \equiv$ ثابت واپاشی نیاهسته‌های تولیدکننده نوترون تأخیری در گروه dام

معادلات ۱ با فرض دو گروه انرژی، به صورت معادلات ۲ در می‌آید.

$$\begin{cases}\frac{1}{V_1}\frac{\partial\varphi_1(\vec{r},t)}{\partial t} = -\nabla.\vec{J}_1(\vec{r},t) - \Sigma_{r,1}(\vec{r},t)\varphi_1(\vec{r},t) + (1-\beta)\left[\upsilon\Sigma_{f,1}(\vec{r},t)\varphi_1(\vec{r},t) + \upsilon\Sigma_{f,2}(\vec{r},t)\varphi_2(\vec{r},t)\right] \\ +\left[\Sigma_{2\to 1}(\vec{r},t)\right]\varphi_2(\vec{r},t) + \sum_{d=1}^{D}\lambda_d C_d(\vec{r},t) \\ \frac{1}{V_2}\frac{\partial\varphi_2(\vec{r},t)}{\partial t} = -\nabla.\vec{J}_2(\vec{r},t) - \Sigma_{r,2}(\vec{r},t)\varphi_2(\vec{r},t) + \left[\Sigma_{1\to 2}(\vec{r},t)\right]\varphi_1(\vec{r},t)\end{cases} \quad (۲)$$

$$\frac{\partial C_d(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta_d\left[\upsilon\Sigma_{f,1}(\vec{r},t)\varphi_1(\vec{r},t) + \upsilon\Sigma_{f,2}(\vec{r},t)\varphi_2(\vec{r},t)\right] - \lambda_d C_d(\vec{r},t)$$

که در آن $\Sigma_{r,g}$ سطح مقطع برداشت است که به صورت $\Sigma_{t,g} - \Sigma_{s,g\to g}$ تعریف می‌شود.

با فرض اینکه تغییر زمانی شار نوترون و غلظت نیاهسته‌ها در هر گام زمانی و در هر نود به صورت نمایی باشد[۲]، روابط ۳ بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi_g(\vec{r},t)}{\partial t} = \omega_{p,g}\varphi_g(\vec{r},t) \\ \frac{\partial C_d(\vec{r},t)}{\partial t} = \omega_d C_d(\vec{r},t)\end{cases} \quad (۳)$$

معادلات ۲، با استفاده از روابط ۳ ، روش انتگرالگیری عرضی[۱و۲] و قانون فیک [۳]، به صورت معادلات ۴ و ۵ نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dx^2}\left|\varphi_x(x,t)\right\rangle - [D]^{-1}[\xi]\left|\varphi_x(x,t)\right\rangle = [D]^{-1}\left|L_y(x,t)\right\rangle \\ \frac{d^2}{dy^2}\left|\varphi_y(y,t)\right\rangle - [D]^{-1}[\xi]\left|\varphi_y(y,t)\right\rangle = [D]^{-1}\left|L_x(y,t)\right\rangle\end{cases} \quad (۴)$$

$$C_d(x,y,t) = \frac{\beta_d}{\omega_d^m + \lambda_d}\left[\nu\Sigma_{f1}\varphi_1(x,y,t) + \nu\Sigma_{f2}\varphi_2(x,y,t)\right] \quad (۵)$$

که در آن

$$[\xi] \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ d & c\end{bmatrix}; \begin{cases} a = \left\{\Sigma_{r,1} + \frac{\omega_{p,1}^m}{V_1} - \left[(1-\beta) + \sum_{d=1}^{D}\left(\frac{\lambda_d\beta_d}{\omega_d^m + \lambda_d}\right)\right]\nu\Sigma_{f1}\right\} \\ b = \left\{-\Sigma_{s,2\to 1} - \left[(1-\beta) + \sum_{d=1}^{D}\left(\frac{\lambda_d\beta_d}{\omega_d^m + \lambda_d}\right)\right]\nu\Sigma_{f2}\right\} \\ c = \left\{\Sigma_{r,2} + \frac{\omega_{p,2}^m}{V_2}\right\} \\ d = \left\{-\Sigma_{s,1\to 2}\right\}\end{cases}$$

که در آن $\varphi_u(u,t)$ و $L_v(u,t)$ به ترتیب شار یک بعدی (رابطه ۶) در راستای u و فرار عرضی متقاطع (رابطه ۷) بر راستای u تعریف می‌شوند [۱]:

$$\varphi_{u,g}(u) \equiv \frac{1}{h_v}\int_{-\frac{h_v}{2}}^{+\frac{h_v}{2}} \varphi_g(u,v)dv; \quad u,v = x,y; \;\; u \neq v \tag{۶}$$

$$L_{v,g}(u,t) \equiv \frac{J_{v,g}^{right}(u,t) - J_{v,g}^{left}(u,t)}{h_v}; \quad u,v = x,y; \;\; u \neq v \tag{۷}$$

حل معادلات ۴ در صورتی امکان پذیر است که جملات فرار عرضی در هر گروه انرژی و در هر راستا (سمت راست معادله ۴) تعیین شود. برای محاسبه این جمله، از تقریب فرار عرضی سهموی استفاده می‌شود که در بخش سوم توضیح داده می‌شود. پس از تعیین جملات فرار عرضی، حل تحلیلی معادلات یک بعدی پخش نوترون (معادلات ۴) به دلیل وجود سطح‌مقطع پراکندگی بین گروه‌های انرژی با مشکل روبرو می‌شود. برای حل این مشکل از روش مودال استفاده می‌شود. در این روش، با استفاده از ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ماتریس ξ و اعمال یک سری عملیات مجاز و مناسب ریاضی، معادلات دو گروهی پخش نوترون به صورت مستقل در آمده و به راحتی حل می‌شوند. پس از حل تحلیلی و شبه تک‌گروهی آنها، با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب، تابعیت صریح شار نوترون در هر نود و گروه انرژی و در هر یک از راستاهای x و y بدست می‌آید [۲]. با اعمال شرایط پیوستگی شار و جریان روی مرزهای مشترک بین نودها، یک رابطه دقیق بین جریان و شار نوترون بدست می‌آید و با جایگذاری آن در معادله تراز نوترون (معادله ۸)، توزیع شار فضایی شار گروهی در هر گام زمانی بدست می‌آید [۱]. آنگاه با استفاده معادله ۹، توزیع فضایی غلظت نیاهسته‌های نوترون تاخیری بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_1^{n+1} - \varphi_1^n}{V_1 \Delta t} = -\sum\limits_{u=x,y}\left[J_{u,1}^{r,n+1} - J_{u,1}^{l,n+1}\right] - h_x h_y \Sigma_{r,1}^{n+1}\varphi_1^{n+1} + (1-\beta)h_x h_y\left[\upsilon\Sigma_{f,1}^{n+1}\varphi_1^{n+1} + \upsilon\Sigma_{f,2}^{n+1}\varphi_2^{n+1}\right] + h_x h_y \Sigma_{s,2\to 1}^{n+1}\varphi_2^{n+1} + \sum\limits_{d=1}^{D}\lambda_d C_d^{n+1} \\ \dfrac{\varphi_2^{n+1} - \varphi_2^n}{V_2 \Delta t} = -\sum\limits_{u=x,y}\left[J_{u,2}^{r,n+1} - J_{u,2}^{l,n+1}\right] - h_x h_y \Sigma_{r,1}^{n+1}\varphi_2^{n+1} + h_x h_y \Sigma_{s,1\to 2}^{n+1}\varphi_1^{n+1} \end{cases} \tag{۸}$$

$$C_d^{n+1} = \left(\frac{\Delta t \beta_d}{1+\lambda_d \Delta t}\right)\left[\upsilon\Sigma_{f1}^{n+1}\varphi_1^{n+1} + \upsilon\Sigma_{f2}^{n+1}\varphi_2^{n+1}\right] + \left(\frac{1}{1+\lambda_d \Delta t}\right)C_d^n \tag{۹}$$

۳. تقریب جمله فرار عرضی:

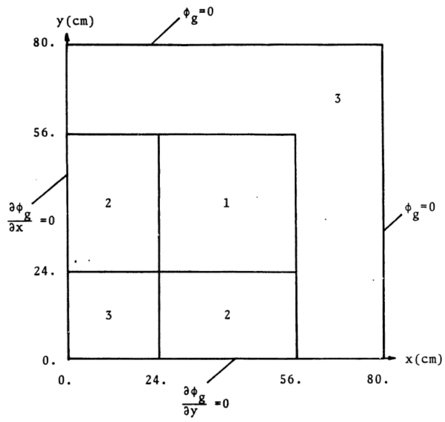
فرار عرضی متقاطع به صورت سهموی (معادله ۱۰) برای هر نود(گره) و در هر راستا تعریف می‌شود:

$$L_{v,g}(u) = c_{0,v,g} + c_{1,v,g}(u) + c_{2,v,g}\left(u^2 - \frac{1}{12}(h_u)^2\right); \quad u,v = x,y; \;\; u \neq v \tag{۱۰}$$

ضرایب بسط معادله فوق با استفاده از محاسبه جریان خالص، در هر راستا، بر روی نود مزبور و دو نود مجاور آن که از پاسخ مسئله در مرحله تکرار قبلی بدست می‌آید.

۴. نتایج:

به منظور راستی‌آزمایی نرم‌افزار نوشته شده در حل مسائل وابسته به زمان، مسئله آزمون TWIGL انتخاب شده است[۱]. مسئله TWIGL یک راکتور دو بعدی مربعی بدون بازتابنده می‌باشد (شکل ۱). سطح‌مقطع‌های دو گروهی در جدول ۱ ارائه شده است. دو حالت تزریق راکتیویته (پله‌ای و وابسته به زمان) با یک گروه نوترونی تاخیری ($\beta = 0.0075; \lambda = 0.8\ s^{-1}$) و بدون وجود فیدبک برای این راکتور تعریف می‌شود.



شکل ۱: راکتور TWIGL [۱]

جدول ۱: سطح‌مقطع‌های دوگروهی [۱]

پارامتر	ماده ۱	ماده ۲	ماده ۳
$D_1\,(cm)$	۱/۴	۱/۵	۱/۳
$D_2\,(cm)$	۰/۴	۰/۴	۰/۵
$\Sigma_{a,1}\,(cm^{-1})$	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۰۸
$\Sigma_{a,2}\,(cm^{-1})$	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۰۵
$\nu\Sigma_{f,1}(cm^{-1})$	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	۰/۰۰۳
$\nu\Sigma_{f,2}(cm^{-1})$	۰/۲	۰/۲	۰/۰۶
$\Sigma_{s,1\to2}(cm^{-1})$	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱

در حالت اول سطح مقطع جذب گروه دوم در ماده شماره ۱ در لحظه t=۰ به اندازه ۲/۳ درصد کاهش می‌یابد. مقایسه بین نتایج حاصل از روش نودال تحلیلی (با گام زمانی ۰/۰۱ ثانیه) در محاسبه قدرت راکتور و مقادیر مرجع در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول۲: تغییر قدرت(نرمالیزه) راکتور بر حسب زمان به ازای مش‌بندی‌های مختلف ناشی از تزریق راکتیویته به صورت پله

زمان (ثانیه)	۱ N/FA*	۴ N/FA	۹ N/FA	۱۶ N/FA	۲۵ N/FA	۳۶ N/FA	مرجع[۱]
۰/۱	۲/۰۶۰	۲/۰۷۱	۲/۰۶۵	۲/۰۶۳	۲/۰۶۲	۲/۰۶۱	۲/۰۶۱
۰/۲	۲/۱۲۲	۲/۰۹۲	۲/۰۸۴	۲/۰۸۲	۲/۰۸۰	۲/۰۸۰	۲/۰۷۸
۰/۳	۲/۱۴۳	۲/۱۱۰	۲/۱۰۲	۲/۰۹۹	۲/۰۹۸	۲/۰۹۷	۲/۰۹۵
۰/۴	۲/۱۶۲	۲/۱۲۸	۲/۱۱۹	۲/۱۱۷	۲/۱۱۵	۲/۱۱۵	۲/۱۱۳
۰/۵	۲/۱۸۰	۲/۱۴۶	۲/۱۳۷	۲/۱۳۴	۲/۱۳۳	۲/۱۳۲	۲/۱۳۱

*معادل تعداد نود (و یا تقسیم‌بندی) در هر مجتمع سوخت

در حالت دوم، سطح مقطع جذب گروه دوم در ماده شماره ۱ به صورت رابطه ۱۱ تغییر می‌کند.

$$\Sigma_{a,2}(t) = \begin{cases} \Sigma_{a,2}(0)[1 - 0.11667 \times t] & t \le 0.2 \\ \Sigma_{a,2}(0)[0.97666] & t \ge 0.2 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

مقایسه بین نتایج حاصل از روش نودال تحلیلی (با گام زمانی ۰/۰۱ ثانیه) در محاسبه قدرت راکتور و مقادیر مرجع در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول۳: تغییر قدرت(نرمالیزه) راکتور بر حسب زمان به ازای مش‌بندی‌های مختلف ناشی از تزریق راکتیویته به صورت تابع زمانی

زمان (ثانیه)	۱ N/FA*	۴ N/FA	۹ N/FA	۱۶ N/FA	۲۵ N/FA	۳۶ N/FA	مرجع[۱]
۰/۱	۱/۲۹۴	۱/۳۰۸	۱/۳۰۹	۱/۳۰۹	۱/۳۰۹	۱/۳۰۹	۱/۳۰۷
۰/۲	۱/۸۸۸	۱/۹۵۵	۱/۹۶۱	۱/۹۶۲	۱/۹۶۳	۱/۹۶۳	۱/۹۵۷
۰/۳	۲/۱۱۳	۲/۰۸۹	۲/۰۸۱	۲/۰۷۸	۲/۰۷۷	۲/۰۷۷	۲/۰۷۴
۰/۴	۲/۱۴۰	۲/۱۰۷	۲/۰۹۹	۲/۰۹۶	۲/۰۹۵	۲/۰۹۴	۲/۰۹۲
۰/۵	۲/۱۵۹	۲/۱۲۵	۲/۱۱۶	۲/۱۱۴	۲/۱۱۲	۲/۱۱۱	۲/۱۰۹

*معادل تعداد نود (و یا تقسیم‌بندی) در هر مجتمع سوخت

۵. بحث و نتیجه‌گیری:

در این پژوهش، سعی شده است تا معادله وابسته به زمان پخش نوترون دو گروهی–دو بعدی به روش نودال تحلیلی حل گردد. روش نودال تحلیلی یکی از دقیق‌ترین روش‌های نودال می‌باشد که از سرعت بالایی در حل مسائل دو و سه بعدی برخوردار است. برتری محسوس این روش، کاهش تعداد مجهولات مسئله نسبت به روش‌های دیگر (اختلاف محدود و ...) می‌باشد. به طوریکه در این روش برای رسیدن به پاسخ با دقت مورد قبول، کافی است که هر مجتمع سوخت حداکثر به یک یا دو مش در هر بعد تقسیم شود. از آنجاییکه پیش‌بینی رفتار قلب راکتور در گذره‌های مختلف بسیار حائز اهمیت است استفاده از روش‌های دقیق و سریع تأثیر بسزایی در کاهش هزینه طراحی خواهد داشت. اعتبارسنجی این روش به کمک حل مسئله مرجع TWIGL صورت گرفته است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که اگر در هر مجتمع سوخت، یک مش در نظر گرفته شود، قدرت راکتور، در هر دو حالت تزریق راکتیویته (به صورت پله‌ای و وابسته به زمان)، با خطای کمتر از ۳ درصد (نسبت به مقادیر مرجع) بدست می‌آید که دقت قابل قبولی در طراحی محسوب می‌شود. البته باید متذکر شد که بزرگترین عیب این روش، پیچیدگی پیاده‌سازی الگوریتم آن است.

۶. مراجع:

۱. K.S. Smith, "An Analytical Nodal Method for Solving the two group, Multi Dimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equation," Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology, ۱۹۷۹.

۲. J. A. Lozano, J. M. Aragonés, N. G. Herranz, "Development of an Analytic Nodal Diffusion Solver in Multigroups for ۳D Reactor Cores with Rectangular or Hexagonal Assemblies," IYNC, Interlaken, Switzerland, ۲۰–۲۶ September, ۲۰۰۸.

۳. A.F. Henry, "Nuclear Reactor Analysis," M.I.T. Press, Cambridge, ۱۹۷۵.