

محاسبه نیمه عمر واپاشی دو بتایی با گسیل دونوترینو در هسته ^{48}Ca

فاطمه، رنجبر؛ محمد رضا، شجاعی*

دانشگاه شاهرود، دانشکده فیزیک، گروه فیزیک هسته ای

چکیده

در این مقاله نیمه عمر واپاشی دو بتا- دو نوترینو ($2\nu\beta\beta$) در هسته ^{48}Ca به حالت پایه هسته ^{48}Ti محاسبه شده است. به این منظور ما معادله شرودینگر را برای یک سیستم هشت ذره ای یک بار با پتانسیل Woods-Saxon و بار دیگر با پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده با روش ابر تقارن و با استفاده از مختصات ژاکوبی حل کرده و ویژه توابع مورد نظر را به دست آوردیم. سپس با استفاده از قاعده طلایی فرمی، نیمه عمر را برای این واپاشی ها محاسبه کردیم و در نهایت نتایج خود را با مقادیر محاسبه شده در مقالات دیگر و با مقادیر تجربی مقایسه نمودیم.

کلید واژه: واپاشی دو بتا- دونوترینو، مدل پوسته ای، روش ابر تقارن

مقدمه

واپاشی هسته ای دو بتایی یک فرایند مرتبه دوم از نوع برهم کنش ضعیف است. مکانیسم این واپاشی ترکیبی از دو واپاشی مجازی پی در پی است که اولین آن واپاشی از یک هسته زوج - زوج (هسته مادر) به یک هسته فرد - فرد همسایه آن (هسته میانی) است، که این واپاشی تک بتا از نظر انرژی یا نقض بسیار زیاد قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه ای ممنوع است، و در ادامه این فرایند با گذار به هسته دختر که از نظر انرژی پایین تر از هسته مادر قرار دارد تکمیل می شود [۱]. واپاشی دو بتایی دارای دو مد است: مد بدون نوترینو ($0\nu\beta\beta$)، که هنوز مشاهده نشده است و بسیار مورد توجه محققین است چون این مد واپاشی نشانه ای از جرم نوترینوها و ناپایستگی عدد لپتونی در واپاشی خواهد بود. مد دیگر، واپاشی دو بتایی به همراه گسیل دو نوترینو است ($2\nu\beta\beta$)، که در مدل استاندارد مجاز است [۲].

جنبه های فیزیک هسته ای واپاشی دو بتایی به عناصر ماتریس هسته ای در گذارهای $\beta\beta$ مربوط می شود. عناصر ماتریس هسته ای $\beta\beta$ ، که شامل عملگرهای دو تایی اسپین - ایزو اسپین هستند، به تصحیحات هسته ای اسپین - ایزو اسپین و ساختارهای هسته ای اسپین - ایزو اسپین بسیار حساس هستند، بنابراین محاسبات مربوط به عناصر ماتریسی واپاشی $\beta\beta$ سخت است. در حال حاضر با پیشرفت عظیمی که در منابع محاسباتی ایجاد شده است میتوان گفت اساساً دو مسیر تحقیقاتی در بررسی ویژگی هسته ها وجود دارد

: محاسبات Abinitio و Mean Field. با افزایش قدرت محاسباتی، نواحی از تئوری هسته ای که سالها غیر قابل حل باقی مانده بود امروزه قابل حل است و اگر چه این امر باعث تقویت تحقیقات در نواحی Abinitio و Mean Field شد پیشرفتهایی در زمینه تئوری واپاشی $\beta\beta$ نیز به وجود آورده است. در حال حاضر دو مدل برای بررسی واپاشی دو بتایی استفاده می شود: تقریب فاز تصادفی شبه ذره^۱ (QRPA) و مدل پوسته ای.

QRPA: کار روی مدل QRPA از سال ۱۹۶۷ توسط Sorenson و Hableib آغاز شد [۳]. این روش اولین بار در سال ۱۹۷۰ برای مطالعه واپاشی $\beta\beta$ توسط Huffman به کار رفته است [۴]. QRPA با مرتبط کردن حالت‌های اولیه و نهایی با $J^\pi = 0^+$ ، که بر پایه حالت‌های BCS ساخته شده اند، به حالت‌های میانی با $J^\pi = 1^+$ برای محاسبه عناصر ماتریس هسته ای استفاده می شود. (یک حالت BCS، تقریبی از یک حالت مکانیک کوانتومی برای یک سیستم هسته ای است [۵]) ماتریس های QRPA شامل دو نوع عنصر ماتریسی برهم کنش دو جسمی هستند. یک عنصر ماتریسی ذره - حفره (ph) که به برهم کنش دافعه ذره - حفره وابسته است، و دیگری عنصر ماتریسی ذره - ذره (pp) که به برهم کنش جاذبه ذره - ذره وابسته است. هر دو این ماتریس ها دارای ثابت های برهم کنشی مستقل g_{pp} و g_{ph} می باشند [۶].

مدل پوسته ای: یکی از مدل‌های پایه هسته ای است که برای محاسبات مربوط به ساختار هسته ای و خواص هسته ای به کار می رود. یک مرجع بسیار خوب برای اولین محاسبات پیشرفته مدل پوسته ای مقاله ای است که توسط Haxton و Stephenson Jr. در سال ۱۹۸۴ نوشته شده است [۷]. چون محاسبات مدل پوسته ای در مقیاس بزرگ مشکل است و زمان زیادی برای انجام محاسبات باید صرف شود، کارهای اولیه با این روش به هسته های ^{48}Ca ، ^{76}Ge ، ^{82}Se و ^{136}Xe محدود می شد، که اغلب این محاسبات روی هسته ^{48}Ca متمرکز شده بود چون یک هسته با دو عدد جادویی است و مطالعه واپاشی دو بتایی آن کمترین پیچیدگی ساختار هسته ای را دارد [۸].

هسته ^{48}Ca با انجام واپاشی دو بتایی به هسته ^{48}Ti تبدیل می شود. انرژی آزاد شده در واپاشی دو بتایی هسته ^{48}Ca نسبت به سایر هسته ها بیشترین مقدار را دارد که عبارت است از $Q_{\beta\beta} = 4.271 \pm 0.004 \text{ MeV}$. طبق نتایج تجربی حد پایین نیمه عمر واپاشی $2\nu\beta\beta$ این هسته $10^{19} \times 3/6 >$ است [۹]. از جنبه تئوری، با استفاده از روشها و مدل‌های ساختار هسته ای متفاوت محاسبات فراوانی انجام شده است، در سالهای اخیر برهم کنش دو جسمی GXPF1A پیشنهاد شده است که آزمایش این برهم کنش برای پوسته fp به منظور انجام محاسبات واپاشی دو بتا - دو نوترینو ^{48}Ca موفقیت آمیز بوده است [۱۰].

1. Quasiparticle Random Phase Approximation .



هدف ما در این کار محاسبه نیمه عمر واپاشی $2\nu\beta\beta$ در هسته ^{48}Ca در چارچوب مدل پوسته ای است. هسته ^{48}Ca دارای ۲۰ پروتون و ۲۸ نوترون و هسته ^{48}Ti دارای ۲۱ پروتون و ۲۷ نوترون است که طبق آرایش نوکلئونها در مدل پوسته ای، می توان این هسته ها را به صورت یک بخش مرکزی یعنی ^{40}Ca و هشت نوکلئون خارج پوسته بسته بسته در نظر بگیریم که این نوکلئونها می توانند فضای $f_{5/2} - f_{3/2} - p_{3/2} - p_{1/2} - f_{7/2}$ را اشغال کنند [۷،۱۱] اما ما در محاسبات خود ساده ترین فضای مدل یعنی $(f_{7/2})^8$ را در نظر گرفتیم و معادله شرودینگر را برای این نوکلئونهای ظرفیت حل کردیم. برای محاسبه نیمه عمر از رابطه زیر که همان قاعده طلایی فرمی است استفاده کرده ایم [۱۲]

$$t_{1/2} = \left(0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2 f} \right)^2 \quad (1)$$

که در آن $g = 0.88 \times 10^{-4} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$ ثابت شدت واپاشی بنایا و $f(Z, E_\beta)$ انتگرال فرمی نامیده می شود که برای مقادیر مختلف Z (عدد اتمی هسته دختر) و E_β (بیشینه انرژی الکترون) در جداول یافت می شود. $M_{fi} = \int \psi_f^* O_X \psi_i dv$ جزء ماتریس هسته ای است و O_X عملگر مناسب برای توصیف واپاشی بتا است. برای محاسبه M_{fi} ما از ویژه توابعی که از حل معادله شرودینگر به دست آوردیم استفاده کردیم. همچنین ما معادله شرودینگر را برای دو پتانسیل Woods-Saxon (WS) و نوسانگر هماهنگ ساده با روش ابرتقارن [۱۳،۱۴،۱۵] حل کردیم و بعد از محاسبه عنصر ماتریس هسته ای به صورت عددی و جایگزینی آن در معادله (۱) نیمه عمر را به دست آوردیم.

محاسبه توابع موج

چون می خواهیم معادله شرودینگر را برای هشت نوکلئون ظرفیت حل کنیم باید از معادله شعاعی شرودینگر در D بعد استفاده کنیم

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2 R_{n\ell}(x)}{dx^2} + \frac{(D-1)}{x} \frac{dR_{n\ell}(x)}{dx} - \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^2} R_{n\ell}(x) \right] + V(x) R_{n\ell}(x) = E R_{n\ell}(x) \quad (8)$$

در این رابطه، $D = 3N - 3$ که N تعداد ذرات سیستم، μ جرم کاهش یافته و x فوق شعاع مربوط به مختصات ژاکوبی برای سیستم های چند ذره ای است [۱۶]. بادر نظر گرفتن پتانسیل WS و تغییر متغیر

$$u_{n\ell}(x) = x^{\frac{D-1}{2}} R_{n\ell}(x)$$

به صورت زیر در می آید [۱۷]



$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{n\ell}(x)}{dx^2} + \left[\frac{\hbar^2(\ell+9)(\ell+10)}{2\mu x^2} - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{x-R_0}{a}\right)} - E_0 \right] u_{n\ell}(x) = 0 \quad (9)$$

که با استفاده از تقریب پکرینس [۱۸] معادله (۹) به صورت زیر نوشته می شود :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \left[\varepsilon + \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha z))^2} - E_0 \right] u(z) = 0 \quad (10)$$

در این رابطه $\alpha = \frac{R_0}{a}$ و $z = \frac{x-R_0}{R_0}$ است و ثابتهای ε و β و γ برابر است با :

$$\varepsilon = \Omega d_0 \quad , \quad \beta = \Omega d_1 - V_0 \quad , \quad \gamma = \Omega d_2$$

$$d_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2} \quad , \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2} \quad , \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad , \quad \Omega = \frac{\hbar^2(\ell+9)(\ell+10)}{2\mu R_0^2} \quad (11)$$

حال با استفاده از روش ابر تقارن و پیشنهاد ابر پتانسیل مناسب [۱۹] می توان معادله (۱۰) را حل کرد و ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته را به دست آورد. تابع موج حالت پایه به شکل زیر است :

$$R_0^{(1)}(x) = N_0 \left(\frac{\exp\left[A\left(\frac{x-R_0}{R_0}\right)\right]}{x^{10}} \right) \left(1 + \exp\left[-\left(\frac{x-R_0}{a}\right)\right]^{-B/\alpha} \right) \quad (12)$$

که در آن N_0 ثابت بهنجار و A و B به صورت زیر هستند

$$A = \frac{(2\mu/\hbar^2)\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(2\mu/\hbar^2)\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \quad , \quad B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(2\mu/\hbar^2)\gamma}}{2} \quad (13)$$

هم چنین ما معادله (۹) را برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده یعنی $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ به روش ابر تقارن حل کردیم و توابع موج زیر را به دست آوردیم

$$R_0^{(1)}(x) = 2 \left(\frac{k^3}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}kx^2} \quad (15)$$



$$R_1^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2^3}{3}} \left(\frac{k^5}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\frac{1}{2}kx^2} \quad (16)$$

که در این روابط $k = \frac{\mu\omega}{\hbar}$ است، که ما برای محاسبات عددی خود از رابطه $\hbar\omega \approx 41A^{-1/3} \text{ MeV}$ استفاده کرده ایم [۲۰].

محاسبه نیمه عمر واپاشی

با استفاده از توابع موج به دست آمده می توان عنصر ماتریس هسته ای را به صورت عددی محاسبه کرد. اما با توجه به رابطه (۱) برای محاسبه نیمه عمر، باید مقدار عددی انتگرال فرمی f را نیز بدانیم. به این منظور می توانیم از فرمول تجربی زیر استفاده کنیم [۲۱]

$$\log f_{\beta^-} = 4 \log(E_{\beta^-} / \text{MeV}) - 0.005(Z-1) \log(E_{\beta^-} / \text{MeV}) + 0.02Z + 0.78 \quad (17)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (۱) نیمه عمر واپاشی دو بتایی ^{48}Ca را محاسبه کردیم که نتایج آن در جدول (۱) نمایش داده شده است.

جدول (۱): نتایج تجربی و تئوری برای واپاشی دو بتایی ^{48}Ca

نوع گذار	نتایج محاسبات در این مقاله		نتایج تئوری در مرجع [۸]	نتایج تجربی [۲۲]
	$t_{1/2}^{\beta^- \beta^-} \text{ (WS)} \text{ (y)}$	$t_{1/2}^{\beta^- \beta^-} \text{ (HO)} \text{ (y)}$		
$0^+ \rightarrow 0^+$	3.13×10^{19}	2.37×10^{19}	$3.3 \times 10^{19} \text{ y}$	$(4.3_{-1.1}^{+2.4} [\text{stat}] \pm 1.4 [\text{syst}]) \times 10^{19} \text{ y}$

نتیجه گیری: ما در این کار با استفاده از حل معادله شرودینگر و با در نظر گرفتن پتانسیل Woods-Saxon و پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده، توابع موج را به صورت تحلیلی و جزء ماتریس هسته ای و نیمه عمر را به طور عددی برای واپاشی دو بتایی ^{48}Ca محاسبه کردیم که نتایج ما تطابق خوبی با نتایج تجربی و محاسبات انجام شده در سایر مقالات داشته است.

مراجع

۱. E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, **Shell Model description of the $\beta\beta$ decay of ^{136}Xe** , *Phys. Lett. B*, ۱, ۷۱۱, ۶۲-۶۴ (۲۰۱۲).



۲. M. T. Capilla, B. Desplanques, S. Noguera, $\beta\beta^{\nu}$ -decay in ^{48}Ca , *Phys. Rev. C*, ۵, ۶۳, ۰۵۵۰۰۳ (۲۰۰۱).
۳. J.A. Hableib and R.A. Sorensen, **Gamow-Teller beta decay in heavy spherical nuclei and the unlike particle-hole RPA**, *Nucl. Phys. A* ۳, ۹۸, ۵۴۲ (۱۹۶۷).
۴. A.H. Huffman, **Nuclear matrix elements in the double beta decay $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$** , *Phys. Rev. C* ۲, ۲, ۷۴۲ (۱۹۷۰).
۵. J. Suhonen, **From Nucleons to Nucleus: Concepts of Microscopic Nuclear Theory**, Berlin: Springer, ۲۰۰۷.
۶. P. Vogel, M. R. Zirnbauer, **Suppression of the two-neutrino double-beta decay by nuclear-structure effects**, *Phys. Rev. Lett.* ۲۵, ۵۷, ۳۱۴۸ (۱۹۸۶).
۷. W.C.Haxton and G.J.Stephenson Jr., **Double beta decay**, *Prog. Part. Nucl. Phys.* ۱۲, ۴۰۹- ۴۷۹ (۱۹۸۴)
۸. F.T. Avignone, S.R. Elliot, J. Engel, **Double beta decay, Majorana neutrinos, and neutrino mass**, *Rev. Mod. Phys.* ۲, ۸۰, ۴۸۱ (۲۰۰۸).
۹. R. Bardin, P. Gollon, J. Ullman, C. S. Wu, **A search for double beta decay of ^{48}Ca and lepton conservation**, *Nucl. Phys. A*, ۲, ۱۵۸, ۳۳۷-۳۶۳ (۱۹۷۰).
۱۰. M. Horoi, S. Stoica, B. A. Brown, **Shell model calculations of two neutrino double beta decay of ^{48}Ca with GXPF1A interaction**, *Phys. Rev. C*, ۳, ۷۵, ۰۳۴۳۰۳ (۲۰۰۷).
۱۱. K. Muto, E. Bender, H.V. Klapdor-Kleingrothaus, **A comparative study of double beta decay by shell model and quasiparticle RPA**, *Z. Phys. A*, ۴, ۳۳۹ ۴۳۵-۴۴۴ (۱۹۹۱).
۱۲. K.S. Krane, **Introductory Nuclear Physics, Vol. I**, John Willey & Sons (۱۹۸۸).
۱۳. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, **Supersymmetry and quantum mechanics**, *Phys. Rep.* ۵-۶, ۲۵۱, ۲۶۷-۳۸۵ (۱۹۹۵).
۱۴. H. Feizi, M.R. Shojaei, A.A. Rajabi, **Raising and lowering operators for the Dirac-Woods-Saxon potential in the presence of spin and pseudospin symmetry**, *Eur. Phys. J. Plus*, ۱۲۷, ۴۱ (۲۰۱۲).
۱۵. D. A. Morales, **Supersymmetric improvement of the Pekeris approximation for the rotating Morse potential**, *Chem. Phys. Lett.* ۱-۳, ۳۹۴, ۶۸-۷۵ (۲۰۰۴).
۱۶. A.A. Rajabi, **Exact analytical solution of the Schrödinger equation for an N-identical body-force system**, *Few Body System*, ۴, ۳۷, ۱۹۷-۲۱۳ (۲۰۰۵).
۱۷. S. M. Ikhdair, R. Sever, **Approximate analytical solutions of the generalized Woods-Saxon potentials including the spin-orbit coupling term and spin symmetry**, *Cent. Eur. J. Phys.* ۴, ۸, ۶۵۲-۶۶۶ (۲۰۱۰). D. A. Morales, **Supersymmetric improvement of the Pekeris approximation for the rotating Morse potential**, *Chem. Phys. Lett.* ۱-۳, ۳۹۴, ۶۸-۷۵ (۲۰۰۴).
۱۸. C.L. Pekeris, **The Rotation-Vibration Coupling in Diatomic Molecules**, *Phys. Rev.* ۲, ۴۵, ۹۸-۱۰۳ (۱۹۳۴).
۱۹. H. Feizi, A.A. Rajabi, M.R. Shojaei, **Supersymmetric solution of the Schrödinger equation for Woods-Saxon potential by using the Pekeris approximation**, *Acta Phys. Pol. B*, ۱۰, ۴۲, ۲۱۴۳-۲۱۵۲ (۲۰۱۱).
۲۰. D. J. Row, J. L. Wood, **Fundamentals of Nuclear Models: foundational models**, World Scientific (۲۰۱۰).
۲۱. G.Friedlander, J. W. Kennedy, E. S. Macias, J. M. Miller, **Nuclear and Radiochemistry**, John Willey & Sons (۱۹۸۱).
۲۲. A. Balysh *et al*, **Double beta decay of ^{48}Ca** , *Phys. Rev. Lett.* ۲۶, ۷۷, ۵۱۸۶-۵۱۸۹ (۱۹۹۶).