



محاسبه حجم و مساحت اشکال هندسی نامتعارف با استفاده از مفهوم شار

زهرا، رجب‌پور نیک‌فام؛ عبدالحمید، مینوچهر؛ مهدی، زنگیان؛ حیدرعلی، کیا

دانشگاه شهید بهشتی-دانشکده مهندسی هسته‌ای-گروه راکتور

چکیده:

یکی از قابلیت‌های مهم کدهای محاسباتی بر مبنای روش مونت کارلو، توانایی آن‌ها در پیاده‌سازی جزئیات دقیق هندسی سیستم است. در این کدها محاسبه برخی پارامترهای فیزیکی نیازمند محاسبه دقیق سطح و حجم سلول‌ها است. در کد MCNP محاسبات مربوط به تعیین حجم و مساحت چند وجهی‌ها و سلول‌های دارای تقارن دورانی انجام می‌شود، اما محاسبات این کمیات برای سلول‌های غیر متعارف و پیچیده از طریق تعاریف خاص در ورودی برنامه و در نهایت توسط کاربر باید انجام شود. در این تحقیق روش‌هایی برای محاسبه حجم و مساحت این نوع از سلول‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه: محاسبه حجم و مساحت، سلول‌های غیر متعارف، روش مونت کارلو

مقدمه:

تقسیم‌بندی در نظر گرفته شده برای انواع سلول‌ها بدین شرح می‌باشد [۱]: ۱. سلول‌ها یا اشکال هندسی که دارای تقارن دورانی هستند ۲. چندوجهی‌ها ۳. اشکال هندسی پیچیده و متفاوتی که جزء دو نوع تعریف شده‌ی قبل نیستند. کد MCNP قادر به محاسبه حجم و مساحت سلول‌های نوع سوم نمی‌باشد و این عملیات باید توسط خود کاربر و از طریق روش مطرح شده در راهنمای MCNP صورت پذیرد [۱]. در این تحقیق با استفاده از روش مونت کارلو و مفاهیم مربوط به تعریف انواع شار، این روش برای محاسبه حجم و مساحت اشکال هندسی نامتعارف طراحی و اجرا گردیده است.

روش کار: در این تحقیق برای انجام محاسبات از مفهوم شار متوسط حجمی و شار متوسط سطحی استفاده شده است. مبنای روش مذکور در نظر گرفتن یک کره‌ی فرضی^۱ در اطراف سلول مورد بررسی می‌باشد. مختصات مرکز و شعاع کره از کاربر دریافت می‌گردد.

^۱ هر کره‌ای که سلول مورد بررسی را کاملاً در خود جای دهد قابل قبول است، اما توجه شود که نزدیک بودن کره‌ی تعریفی به کره‌ی محیطی منجر به دقت بیشتر پاسخ‌ها خواهد بود و بالعکس.

• محاسبه‌ی حجم و مساحت با استفاده از روش ردیابی

در این روش کره‌ی فرضی احاطه کننده‌ی سلول به صورت یک چشمه‌ی سطحی با توزیع کسینوسی $p(\mu) =$ در $0 \leq \mu \leq 1$ در نظر گرفته می‌شود. اساس روش به کار گرفته شده، محاسبه‌ی شار متوسط حجمی داخل چشمه‌ی کره‌ی فرضی و تعیین رابطه‌ی آن با شار سایر نقاط و اشکال داخل کره می‌باشد. طبق تعاریف موجود، رابطه‌ی شار متوسط حجمی به صورت زیر شمارش می‌شود [۱]:

$$\bar{\phi}_v = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{k_i} W_{i,k} d_{i,k}}{N} \quad (1)$$

در این رابطه $d_{i,k}$ برابر با مسافت پیموده شده توسط نوترون i ام در حجم V بین دو رخداد k و $k-1$ است و $W_{i,k}$ وزن نوترون i قبل از برخورد k می‌باشد. بدین ترتیب با استفاده از رابطه‌ی زیر حجم سلول قابل محاسبه است:

$$V_{cell} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{k_i} W_{i,k} d_{i,k}}{\bar{\phi}_v N} \quad (2)$$

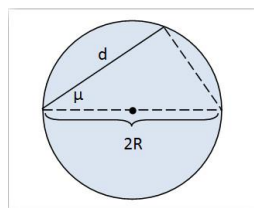
بنابراین گام اول، محاسبه‌ی شار متوسط حجمی چشمه‌ی کره می‌باشد. برای حالتی که $W_{i,k}$ ها برابرند، با در نظر گرفتن \bar{d} به عنوان متوسط طول پیمایش هر ذره گسیلی از چشمه، می‌توان نوشت:

$$\bar{\phi}_v = \frac{NW\bar{d}}{V_{cell}N} = \frac{W\bar{d}}{V_{cell}} \quad (3)$$

برای محاسبه شار حجمی لازم است مقدار \bar{d} محاسبه شود. رابطه زیر برای این پارامتر برقرار است:

$$\bar{d} = \int d \cdot P(\mu) d\mu = \int \sqrt{R\mu} \cdot \sqrt{\mu} d\mu = \sqrt{R} \int \mu^{\frac{3}{2}} d\mu = \left. \frac{2}{5} R\mu^{\frac{5}{2}} \right|_0^1 = \frac{2}{5} R \quad (4)$$

$P(\mu) = \sqrt{2R\mu}$ تابع توزیع احتمال کسینوس زاویه‌ی پراکندگی است. مقدار d نیز با توجه به شکل زیر برابر $\sqrt{2R\mu}$ جایگذاری شده است.

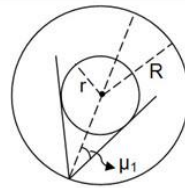


شکل ۱: محاسبه مقدار d برای چشمه کره‌ی فرضی

حال اگر وزن ذرات مورد بررسی برابر πR^2 در نظر گرفته شود، آن گاه:

$$\bar{\phi}_v = \frac{\pi R^2 \cdot \frac{4}{3} R}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 1 \quad (5)$$

بنابراین برای چشمه سطحی کروی با توزیع کسینوسی با وزن πR^2 شار متوسط حجمی داخل چشمه‌ی کروی برابر واحد است. برای هر سلول و یا هر نقطه واقع در کره‌ی فرضی نیز ثابت می‌شود که شار برابر یک است.



شکل ۲: محاسبه شار برای سلولی داخل چشمه کروی فرضی

برای نشان دادن این موضوع یک سلول کروی در داخل چشمه کروی مطابق شکل فوق در نظر می‌گیریم. در این حالت رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\sqrt{1 - \mu_1^2} = \frac{r}{R} \rightarrow \mu_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad (6)$$

با استفاده از تعریف شار متوسط در داخل سلول و در نظر گرفتن شرایط مشابه با حالت چشمه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_v &= \int_{\mu_1}^1 \frac{P(\mu) d\mu \times W \times d(\mu)}{\frac{4}{3} \pi r^3} \quad , \quad d(\mu) = 2r\mu' \\ \bar{\phi}_v &= \int_{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}^1 \frac{2\mu \times \pi R^2 \times 2r\mu'}{\frac{4}{3} \pi r^3} d\mu = \frac{3R^2}{r^2} \int_{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}^1 \mu \mu' d\mu \\ &= \frac{3R^2}{r^2} \int_{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}^1 \mu \sqrt{1 - (1 - \mu^2) \left(\frac{R}{r}\right)^2} d\mu = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

بدین ترتیب با استفاده از رابطه‌ی (۳) می‌توان حجم سلول واقع شده در چشمه‌ی کروی را محاسبه نمود:

$$V_{cell} = \frac{\pi R^2 \bar{d}}{1} \quad (8)$$

در این رابطه \bar{d} برابر طول پیمایش‌های پیموده شده نوترون در سلول می‌باشد.

محاسبه مساحت سلول‌ها نیز با استفاده از مفهوم شار متوسط سطحی انجام می‌شود. طبق تعاریف موجود،

رابطه‌ی شار متوسط سطحی به صورت زیر مطرح می‌شود [۱]:



$$\bar{\phi}_s = \frac{1}{A} \int \phi(r, \Omega) d\Omega dA \quad (9)$$

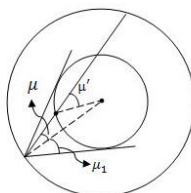
این کمیت به صورت زیر شمارش می شود.

$$\bar{\phi}_s = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{k_i} \frac{W_{i,k}}{A |\vec{n} \cdot \vec{\Omega}|_{i,k}}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{k_i} \frac{W_{i,k}}{A \mu_{i,k}}}{N} \quad (10)$$

مقدار شار سطحی متوسط برای چشمه ی کروی فرضی به صورت زیر نیز قابل محاسبه می باشد:

$$\bar{\phi}_s = \frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{dn}{dA} \vec{\Omega} \cdot d\Omega dA = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{-1}^1 \frac{W}{\mu} P(\mu) d\mu = \frac{2\pi R^2}{4\pi R^2} \int_{-1}^1 d\mu = 1 \quad (11)$$

ثابت می شود که شار سطحی متوسط در هر سطح واقع در داخل این چشمه کروی نیز برابر یک است:



شکل ۳: محاسبه شار سطحی برای سلول واقع در چشمه کروی فرضی

مقدار شار متوسط سطحی برای سطح سلول قرار گرفته در داخل چشمه کروی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\bar{\phi}_s|_{cell} = \int_{\mu_1}^1 \frac{W}{\mu'} P(\mu) d\mu + \int_{-1}^{-\mu_1} \frac{W}{\mu'} P(\mu) d\mu = 2 \int_{\mu_1}^1 \frac{W}{\mu'} P(\mu) d\mu \quad (12)$$

با توجه به شکل ۳ و روابط موجود برای مقادیر μ' و μ_1 رابطه فوق به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\bar{\phi}_s|_{cell} = \frac{2}{4\pi r^2} \int_{\mu_1}^1 \frac{\pi R^2 \cdot 2\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \sqrt{1 - (1 - \mu^2) \left(\frac{R}{r}\right)^2}} d\mu = 1 \quad (13)$$

بدین ترتیب با استفاده از رابطه (۱۰) مقدار مساحت سطح سلول به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$A_{cell} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{k_i} \frac{W_{i,k}}{\mu_{i,k}}}{N} \quad (14)$$

نتایج :

به منظور بررسی نتایج حاصل شده، حجم و مساحت یک سلول بیضی گون مورد بررسی قرار گرفته و نتایج به

دست آمده از برنامه طراحی شده با نتایج کد MCNP و نتایج روابط تحلیلی^۲ مقایسه می گردد.

^۲ حجم بیضی گون از رابطه $V = \frac{4}{3}\pi abc$ و مساحت آن از رابطه $S \approx 4\pi \left(\frac{a^p b^p + a^p c^p + b^p c^p}{3} \right)^{1/p}$ قابل محاسبه است.



شکل ۴: شکل سلول مورد بررسی

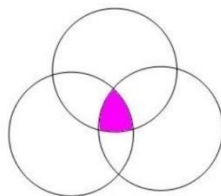
جدول ۱: مقادیر حجم و مساحت محاسبه شده برای سلول مورد بررسی برای ده میلیون ذره

روش به کار رفته	حجم سلول (cm ³)	درصد خطای نسبی	مساحت سلول (cm ²)	درصد خطای نسبی
روابط تحلیلی	۲۲۶,۱۹۴	-	۲۳۰,۳۴۶	-
MCNP	۲۲۵,۸۴۳	۰,۱۵	۲۳۰,۶۶۲	۰,۱۴
روش ردیابی	۲۲۶,۳۲۲	۰,۰۵	۲۳۰,۲۹۵	۰,۰۲

جدول ۲: تغییرات حجم محاسبه شده بر حسب تعداد ذرات

تعداد ذرات		۱۰۰۰۰ ذره		۵۰۰۰۰۰ ذره		۵۰۰۰۰۰۰ ذره	
روش به کار رفته	حجم (cm ³)	خطا	حجم (cm ³)	خطا	حجم (cm ³)	خطا	حجم (cm ³)
MCNP	۲۲۸,۳۳۵	۰,۹۵	۲۲۵,۷۱۶	۰,۲۱	۲۲۵,۸۹۷	۰,۱۳	
روش ردیابی	۲۲۵,۳۵	۰,۳۷	۲۲۵,۷۴۶	۰,۱۹	۲۲۶,۳۳۲	۰,۰۵	

به عنوان مثالی دیگر ناحیه به وجود آمده از برخورد سه کره شکل ۵ مورد بررسی قرار گرفته و نتایج به دست آمده از برنامه طراحی شده با نتایج کد MCNP مقایسه می‌گردد.



شکل ۵: شکل سلول مورد بررسی



جدول ۳: مقادیر حجم و مساحت محاسبه شده برای سلول مورد بررسی

مساحت (cm ²)			حجم سلول (cm ³)	روش به کار رفته
سطح ۳	سطح ۲	سطح ۱		
۲۶,۱۵۳۵	۲۵,۹۴۹۷	۲۶,۴۳۹۹	۵۳,۵۹۵۴	MCNP
۲۶,۱۷۸۲	۲۶,۰۵۶۱	۲۶,۱۴۹۶	۵۳,۵۵۹۲	روش ردیابی

بحث و نتیجه گیری:

با توجه به میزان خطاهای محاسبه شده می توان گفت روش ردیابی دارای دقت مناسبی در محاسبات حجم و مساحت می باشد. این امر می تواند در محاسبه بسیاری از کمیات نظیر شار سطحی و حجمی، جرم و دانسیته سلول، گرمایش جرمی و حجمی و ... بسیار مفید و تاثیرگذار باشد.

مراجع:

۱. X-^o Monte Carlo Team. "MCNP - A General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version ۵", Vol. ۱, LA-UR-۰۳-۱۹۸۷, ۲۰۰۳.
۲. Kim, Jihan. "Monte Carlo Integration", ۲۰۱۲
۳. Yu-Shen Liu, Jun-Hai Yong, Hui Zhang, Dong-Ming Yan, Jia-Guang Sun. "A quasi-Monte Carlo method for computing areas of point-sampled surfaces", ۲۰۰۵