



## تحلیل تعادل توکامک، با در نظر گرفتن چرخش قطبی پلاسما

احسان اله، نوری؛ یحیی، صادقی\*

سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته‌ای

### چکیده

وجود چرخش قطبی و چنبره‌ای در پلاسما، به صورت تجربی مورد تأیید قرار گرفته است. به دلیل به وجود آمدن نیروی مرکز گریز اضافی ناشی از شارش پلاسما، شکل تعادلی پلاسما دستخوش تغییرات عمده می‌گردد. در این مقاله پارامترهای تعادلی توکامکی شبیه توکامک NSTX، با در نظر گرفتن شارش‌های قطبی و چنبره‌ای پلاسما و تأثیرات شارش پلاسما بر روی سطوح شار قطبی و چگالی پلاسما مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلید واژه‌ها: تعادل پلاسما، توکامک، شارش پلاسما

### ۱- مقدمه

شرایط تعادل پایای پلاسما یکی از مهم‌ترین الزامات برای تولید انرژی به روش محصور سازی مغناطیسی است. به همین منظور، سیستم‌های محصور سازی مغناطیسی با هندسه چنبره‌ای، مانند توکامک، از ابزارهای مهم دست‌یابی به شرایط تعادل مطلوب تلقی می‌شوند. در یک سیستم چنبره‌ای مانند توکامک، بررسی مسئله تعادل با چالش‌های زیادی روبرو است. از آنجا که معادلات حاکم بر تعادل پلاسما کاملاً غیر خطی هستند، مطالعه تحلیلی تعادل پلاسما بسیار دشوار، و در بسیاری از موارد غیر ممکن است. از این رو، محاسبات تعادلی توکامک وابستگی زیادی به رهیافت‌های عددی دارند. البته برای ساده سازی‌های بیشتر، فرض‌هایی همچون داشتن تقارن محوری نسبت به محور اصلی چنبره می‌تواند تا اندازه‌ای راهگشا باشد.

به منظور توصیفی جامع و دقیق‌تر از تعادل پلاسما، استفاده از مدل مگنتو هیدرو دینامیک مغناطیسی آرمانی (Ideal MHD)، بسیار سودمند است. به طور کلی، مدل MHD آرمانی، برهمکنش بین پلاسمای ایده‌آل و (کاملاً رسانا)، فشار، میدان‌های مغناطیسی و نیروهای داخلی را مورد مطالعه قرار می‌دهد. برای به دست آوردن شکل کامل معادلات MHD، باید از معادلات ماکسول<sup>۱</sup> و نظریه جنبشی پلاسما استفاده کرد که در آن هر گونه از ذرات توسط معادله بولتزمن<sup>۲</sup> توصیف می‌شوند. با در نظر گرفتن ممان‌های معادله بولتزمن، می‌توان به دسته‌ای از معادلات سیالی رسید که رفتار ماکروسکوپیکی پلاسما را توجیه می‌کنند. معادلات سیالی به دست آمده، توسط معادله حالت یا فشار، کامل شده و یک سیستم معادلات بسته را تشکیل می‌دهند.

<sup>۱</sup> Maxwell equations

<sup>۲</sup> Boltzmann equation



اخیرا گزارش‌های متعددی، وجود چرخش قطبی و چنبره‌ای در پلاسما را تایید کرده‌اند [۱ و ۲]. یکی از دلایل اصلی به وجود آمدن چرخش در پلاسما توکامک، استفاده از روش تزریق باریکه خنثی برای گرم کردن پلاسما است که می‌تواند باعث ناهمسانگردی در توزیع فشار پلاسما توکامک شود. به طور کلی، وجود چرخش چنبره‌ای قوی در پلاسما باعث می‌شود که تعداد زیادی از ناپایداری‌های MHD، پایدارتر شده و عملکرد کلی پلاسما توکامک بهبود یابد [۳]. به عنوان مثال، مدهای مقاومتی دیواره<sup>۱</sup>، در حضور چرخش چنبره‌ای پلاسما، پایدار می‌شوند [۴]. علاوه بر آن، چرخش چنبره‌ای برشی می‌تواند باعث پایداری مدهای بالونی<sup>۲</sup> و پیچشی<sup>۳</sup> در پلاسما شوند [۵]. به دلیل به وجود آمدن نیروی مرکز گریز ناشی از شارش قطبی و چنبره‌ای، شکل تعادلی پلاسما دستخوش تغییراتی می‌شود. در این میان، کد محاسباتی FLOW، به منظور شبیه سازی تعادل توکامک‌های متقارن، با در نظر گرفتن چرخش قطبی و چنبره‌ای پلاسما، توسعه داده شده است [۶]. در این مقاله، پارامترهای تعادلی توکامکی شبیه توکامک NSTX، با ایجاد تغییراتی در کد محاسباتی FLOW و در نظر گرفتن چرخش قطبی پلاسما و تاثیرات چرخش پلاسما بر روی سطوح شار قطبی و چگالی پلاسما مورد مطالعه قرار گرفته است.

## ۲- روش کار

پلاسما چنبره‌ای با تقارن محوری را در نظر می‌گیریم که توسط مدل MHD آرمانی توصیف می‌شود. این مدل می‌تواند شامل سرعت شارش تعادلی در جهت‌های قطبی و چنبره‌ای در پلاسما باشد. معادلات MHD در حالت پایا را می‌توان با در نظر گرفتن پایستگی اندازه حرکت و جرم، به صورت زیر بیان کرد.

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (6)$$

با در نظر گرفتن مولفه  $\mathbf{e}_\phi$  معادله اندازه حرکت و در نظر گرفتن فرض تقارن محوری، می‌توان عبارت زیر را برای میدان مغناطیسی چنبره‌ای نوشت:

<sup>۱</sup> Resistive Wall Modes (RWM)

<sup>۲</sup> Ballooning modes

<sup>۳</sup> Kink modes

$$B_{\phi}R = \frac{F(\psi) + \sqrt{\mu_0}R^2\Phi(\psi)\Omega(\psi)}{\left(1 - \frac{\Phi^2(\psi)}{\rho} - \Delta\right)} \quad (7)$$

در معادله بالا،  $R$  مختصات شعاعی،  $F(\psi)$  تابع آزادی از شار قطبی  $\psi$  و  $\Delta$  نمایانگر ناهمسانگردی پلاسما هستند. با در نظر نگرفتن شارش قطبی ( $\Phi(\psi) = 0$ ) و ناهمسانگردی ( $\Delta = 0$ )، می‌توان معادله بالا را به شکل استاندارد و شناخته شده  $B_{\phi}R = F(\psi)$  ساده کرد. در معادله (۷)،  $\Phi(\psi)$  و  $\Omega(\psi)$  دو تابع آزاد از هستند که به ترتیب، توصیف کننده مولفه‌های چنبره‌ای و قطبی سرعت شارش هستند. مولفه قطبی شارش، تنها به بستگی دارد در حالی که مولفه چنبره‌ای تابعی از  $\Phi$  و  $\Omega$  است. با در نظر گرفتن مولفه  $B$  معادله اندازه حرکت می‌توان به معادله معروف برنولی<sup>۱</sup> رسید که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{2\mu_0} \left[ \frac{\Phi(\psi)B}{\rho} \right]^2 - \frac{1}{2} [R\Omega(\psi)]^2 + W = H(\psi) \quad (8)$$

که در آن  $H(\psi)$  تابعی آزاد و  $W = (\rho, B, \psi)$  تابع آنتالپی است [۷].

در گام آخر نیز مولفه  $\nabla\psi$  معادله اندازه حرکت به معادله گراد- شفرانف تعمیم یافته منجر می‌شود.

$$\nabla \cdot \left[ \left( 1 - \left( \frac{\Phi^2(\psi)}{\rho} \right) \right) \left( \frac{\nabla\psi}{R^2} \right) \right] = -\frac{B_{\phi}}{R} \frac{dF(\psi)}{d\psi} - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{d\Phi(\psi)}{d\psi} - R\rho V_{\phi} \frac{d\Omega(\psi)}{d\psi} - \rho \frac{dH(\psi)}{d\psi} + \frac{\rho^{\gamma}}{\gamma-1} \frac{dS}{d\psi} \quad (9)$$

که در آن  $S(\psi)$  تابع آنتروپی است [۶].

می‌توان مدل تعادلی پلاسما را با سه معادله زیر توصیف کرد:

- معادله میدان چنبره‌ای
- معادله برنولی
- معادله گراد- شفرانف تعمیم یافته<sup>۲</sup>

بنابراین، با معرفی مناسب توابع آزاد، معادلات نام برده شده را به صورت عددی حل کرد.

### ۳- الگوریتم محاسبه با توجه به کد FLOW

<sup>۱</sup> Bernoulli Equation

<sup>۲</sup> Modified Grad- Shafranov equation



با استفاده از کد محاسباتی FLOW، سه معادله یاد شده در بخش قبل، برای توکامکی شبیه توکامک NSTX، با نسبت منظر تقریبی  $1/5$ <sup>۱</sup> و پارامتر بیضی‌گونی<sup>۲</sup> تقریبی  $1/9$  و با در نظر گرفتن شارش قطبی پلاسما حل شده اند. در این کد از دیدگاه شبکه چندگانه<sup>۳</sup> برای حل معادلات تعادل استفاده شده است. الگوریتم استفاده شده در کد را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

- a. حل معادله برنولی برای به دست آوردن  $\rho$
- b. حل معادله گراد- شفرانف برای به دست آوردن  $\psi$
- c. حل معادله برای به دست آوردن مولفه چنبره‌ای میدان مغناطیسی

مراحل بالا تا رسیدن به همگرایی مناسب تکرار می‌شوند. پس از آن، حل‌های به دست آمده بر روی یک شبکه ریزتر درون‌یابی می‌شوند. با تعریف باقیمانده مناسب برای معادلات، می‌توان از حصول همگرایی اطمینان حاصل کرد. برای در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب در معادله گراد- شفرانف، می‌توان بر روی مرز،  $\psi = const$  قرار داد و مقدار  $\psi$  را برای سطوح مغناطیسی از روش تکرار<sup>۴</sup> به دست آورد. به دلیل جبری بودن ماهیت معادله برنولی، از روش‌های نیوتن- رافسون<sup>۵</sup> و تنصیف<sup>۶</sup> برای حل آن استفاده شده است.

#### ۴- نتایج

شکل (۱) سطوح شار مغناطیسی تعادلی  $\psi$  را نشان می‌دهد. در شکل (۲) چگالی پلاسما بر حسب شعاع اصلی پلاسما،  $R$ ، نشان داده شده است. شکل (۳)، مولفه قطبی سرعت شارش پلاسما در لحظه تشکیل پلاسما رسم شده است. همان‌گونه که از شکل (۳) مشخص است، در لحظه تشکیل پلاسما، سرعت قطبی در مرکز پلاسما صفر و در قسمت‌های لبه (کناری) سرعت شارش غیر صفر است.

<sup>۱</sup> Aspect ratio

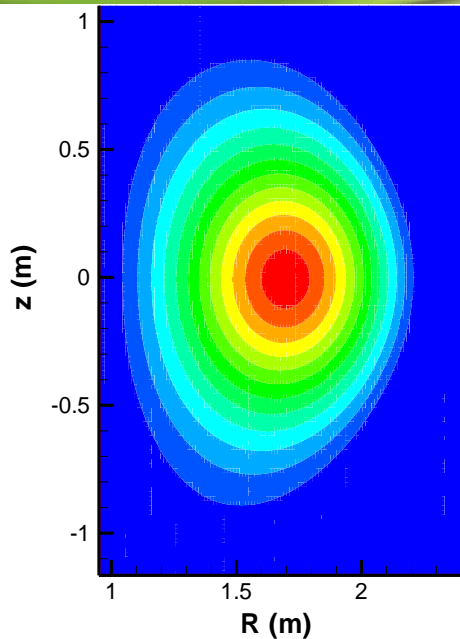
<sup>۲</sup> Ellipticity

<sup>۳</sup> Multi- Grid approach

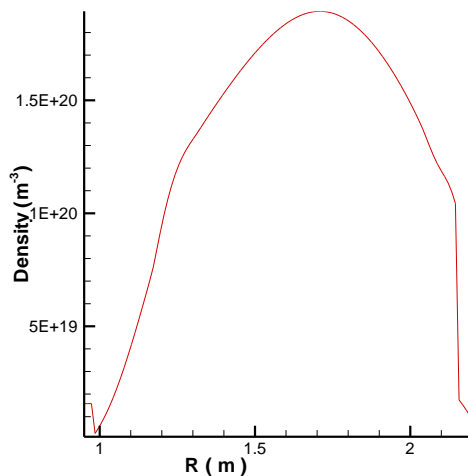
<sup>۴</sup> Iteration method

<sup>۵</sup> Newton- Raphson method

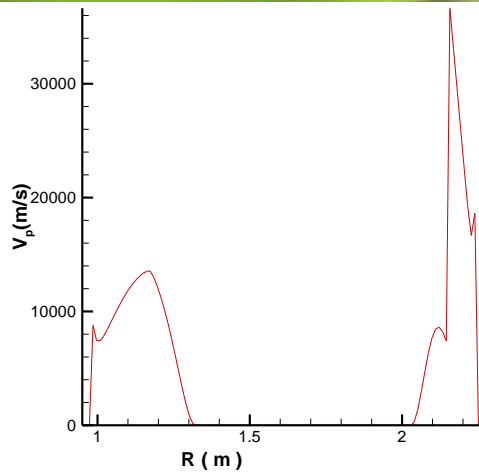
<sup>۶</sup> Bisection method



شکل ۱- نمایش سطوح مغناطیسی در تعادل شبه NSTX



شکل ۲- چگالی پلاسما در توکامک شبه NSTX با در نظر گرفتن شارش قطبی



شکل ۳- مولفه قطبی سرعت شارش در لحظه تشکیل پلاسما

#### ۵- بحث و نتیجه گیری

تأثیرات چرخش قطبی پلاسما در توکامکی شبیه توکامک NSTX بر روی سطوح شار تعادلی، چگالی پلاسما مورد مطالعه قرار گرفت. بدین منظور، معادلات MHD به معادلات برنولی، گراد- شفرانف تعمیم یافته و معادله ای جبری برای توصیف میدان مغناطیسی چنبره‌ای، تقلیل پیدا کردند. با استفاده از کد محاسباتی FLOW معادلات تعادلی پلاسما حل شدند.

#### ۶- مراجع

- [۱] R. J. Taylor, J. L. Gauvreau, M. Gilmore, P. A. Gourdain, D. J. La- Fontese and L.W. Schmitz, Nucl. Fusion ۴۲ (۲۰۰۲) ۴۶.
- [۲] S. K. Erements, A. V. Chankin, G. F. Matthews and P. C. Stangeby, Plasma Phys. Control. Fusion ۴۲ (۲۰۰۰) ۹۰۵.
- [۳] Chapman, I.T., Graves, J.P., Wahlberg, C. Nucl. Fusion ۵۰ (۲۰۱۰) ۰۲۵۰۱۸.
- [۴] Sontag, A. et al, Phys. Plasmas ۱۲ (۲۰۰۵) ۰۵۶۱۱۲.
- [۵] Furukawa, M., and Tokuda, S., Nucl. Fusion ۴۵ (۲۰۰۵) ۳۷۷.
- [۶] Guazzotto, L., Betti, R., Manickam, J., and Kaye, S., Phys. Plasmas ۱۱ (۲۰۰۴) ۶۰۴.
- [۷] R. Iacono, A. Bondeson, F. Troyon and R. Gruber, Phys. Fluids B ۲ (۱۹۹۰) ۱۷۹۴.