

## بررسی تابع چگالی انرژی عناصر ماتریس هسته ای برای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو

حسین، رشیدی\*؛ هادی، گودرزی؛ رسول، خدابخش

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه فیزیک

### چکیده

در این مقاله، عناصر ماتریس هسته ای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو برای هسته های  $^{136}\text{Xe}$ ،  $^{116}\text{Zr}$ ،  $^{76}\text{Ge}$ ،  $^{48}\text{Ca}$ ،  $^{150}\text{Nd}$  بر اساس روش تابع چگالی انرژی با استفاده از تابع  $Gogny D^1s$ ، مورد بررسی قرار گرفته است. اثر فراتر از میدان میانگین در روش مختصات تعمیم یافته، شامل تعداد ذرات و ممتم زاویه ای پرتابه برای هر دو حالت پایه هسته اولیه و نهایی است. مقدار بدست آمده برای عناصر ماتریس هسته ای نسبتاً ثابت بوده و در حدود ۴,۷ بوده و برای هسته های  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{48}\text{Ca}$  مقدار کوچکتری است.

**واژه‌های کلیدی:** واپاشی دو بتایی بدون نوترینو، عناصر ماتریس هسته ای، تابع چگالی انرژی، جفتیدگی، ممتم زاویه ای

### مقدمه

واپاشی دو بتایی بدون نوترینو ( $0\nu\beta\beta$ ) یک فرآیند نادر هسته ای است که در آن واپاشی دو بتا به طور همزمان در یک هسته رخ می دهد [۱]. در این واپاشی عدد اتمی  $Z$  دو واحد تغییر می کند اما عدد جرمی  $A$  ثابت می ماند که به فرم زیر است:

(۱)

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^{-}$$

در این واپاشی نوترینوها منتشر نمی شوند که به نقض پایستگی عدد لپتونی منجر می شود  $\Delta l = 2$  که در مدل استاندارد مجاز نیست، اما در بعضی مدل های خارج از مدل استاندارد مجاز است. در هر حال، در صورتی واپاشی دو بتا بدون نوترینو رخ می دهد که نوترینو یک ذره مایورانا (ذره مایورانا یعنی نوترینو، پاد ذره خودش باشد) باشد که در این صورت عدد لپتونی دیگر کمیت پایسته ای نیست [۲]. تئوری این واپاشی شامل دو قسمت است: اولاً یک فرآیند هسته ای است که نیاز به محاسبات دقیق عناصر ماتریس هسته ای دارد و دوم یک مکانیسم خاص باید پیشنهاد شود که در آن نوترینوها انتشار نیابند. نیمه عمر واپاشی دو بتا بدون نوترینو بین حالت  $0^{+}$  هسته مادر و هسته دختر به فرم زیر است:

(۲)

$$[T_{1/2}^{0\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = G_{01} |M^{0\nu}|^2 \left| \frac{\langle m_{ee} \rangle}{m_e} \right|^2$$

که در رابطه بالا  $G_{01}$  عامل فضای فاز،  $M^{0\nu}$  عناصر ماتریس هسته ای<sup>۱</sup> (NME) و  $\langle m_{ee} \rangle$  جرم موثر نوترینو است که نشان دهنده برهمکنش های مدل غیر استاندارد است. معادله (۲) نشان می دهد که به تعیین دقیق جرم موثر نوترینو نیاز داریم. یک بخش اندازه گیری نیمه عمر واپاشی دو بتایی بدون نوترینو است که به صورت تجربی اندازه گیری می شود و بخش دیگر محاسبات NME است. بنابر این، چند روش مختلف برای محاسبه NME به کار برده می شود. یک روش مدل برهمکنش پوسته<sup>۲</sup> (ISM) و برای پروتون-نوترون مدل تقریب شبه فاز تصادفی<sup>۳</sup> (QRPA) و اخیراً بیشتر از روش<sup>۴</sup> (PHFB) استفاده می شود. در این مقاله، عمدتاً محاسبات PHFB توسعه داده شده است.

## روش کار

از یک روش تابع حالت چگالی انرژی که بر اساس یک تابع Gogny D1S ایجاد شده و بر اساس یک تک ذره بزرگتر است، استفاده می شود [۳]. برای تعداد ذرات و ممتنم زوایه ای پرتابه، برای هسته مادر و دختر انجام می شود و شامل پیکربندی ترکیبی در روش مختصات تعمیم یافته<sup>۵</sup> (GCM) است [۴]. در این بخش، تعداد ذرات پرتابه قبل اینکه برای یک رفتار درستی از همبستگی جفتیدگی تغییرات اساسی داشته باشد نقش مهمی را در واپاشی دو بتایی بدون نوترینو بازی می کند. عناصر ماتریس هسته ای را می توان به صورت زیر نوشت:

$$M^{0\nu} = \left( -\frac{g_v}{g_A} \right)^2 M_F^{0\nu} + M_{GT}^{0\nu} - M_T^{0\nu} \quad (۳)$$

که  $g_A = 1$ ,  $g_v = 1.25$  است و  $M_T^{0\nu}$  بسیار کوچک بوده لذا می توان آن را نادیده گرفت. از تقریب بسته استفاده می شود تا همه حالت های میانی در هسته فرد-فرد جمع شود که در حال حاضر ممکن نیست که

<sup>۱</sup> Nuclear matrix elements

<sup>۲</sup> Interacting shell model

<sup>۳</sup> Quasi-random phase approximation

<sup>۴</sup> Projected-Hatree-Fock-Bogoliubov

<sup>۵</sup> Generating coordinate method

هسته فرد-فرد را با استفاده از روش فراتر از میدان میانگین، محاسبه کرد. لذا از تقریب بسته در فرایند واپاشی دو بتایی با دو نوترینو  $2\nu\beta\beta$  نمی توان استفاده کرد چون که این تقریب در این مد واپاشی نامعتبر است. عمگلد دو بعدی بین حالت اولیه و نهایی به صورت زیر است:

(۴)

$$M_{F/GT}^{0\nu\beta\beta} = \langle 0_f^+ | \hat{M}_{F/GT}^{0\nu\beta\beta} | 0_i^+ \rangle$$

در روش **GCM+PNAMP**، تابع موج دو بعدی برای هسته های حالت اولیه  $i$  و حالت نهایی  $f$  به عنوان ترکیب خطی تعداد ذرات  $N$  و  $Z$  بوده و ممتنم زاویه ای  $I = 0$  تابع موج پرتابه با چهار قطبی ذاتی متفاوت  $\beta$  به صورت زیر است:

$$|0^+\rangle = \sum_{\beta} g_{\beta} p^{I=0} p^N p^Z |\varphi_{\beta}\rangle \quad (۵)$$

که اینجا  $p^{I=0} p^N p^Z$  به ممتنم زاویه ای  $I = 0$  و تعداد ذره های پرتابه مربوط می شود. تقارن ذاتی محوری **HFB** تابع موج  $|\varphi_{\beta}\rangle$  با تغییر تعداد ذرات بعدی پرتابه حل می شود که با مقدار تغییر چهار قطبی محوری برابر است [۵]. بنابر این تغییر ذاتی سیستم به طور طبیعی شامل فرمالیسم و همبستگی جفت شدگی است. پایستگی تعداد ذرات با دیدگر با استفاده از فضای پیکربندی مشابه برای پرتون و نوترون به طور تضمینی است که نقش تکمیلی خواهد داشت. علاوه بر این، ما می دانیم که پیاده سازی اولیه روش **CGM** برای محاسبات گذار بین هسته های مختلف حالت اولیه و نهایی است که شامل تقارن بازگردانی است.

در حال حاضر نتایجی برای عناصر ماتریس هسته ای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو  $^{130}\text{Nd}$  بحث می شود و نیز ضرایب  $g_{\beta}$  بوسیله حل معادله  $(HWB)^{\epsilon}$  پیدا می شود. اولاً، برای هر هسته مجموعه توابع موج غیر متعامد

$$\left\{ |\Lambda\rangle = \sum_{\beta} \frac{u_{\Lambda,\beta}}{\sqrt{n_{\Lambda}}} p^{I=0} p^N p^Z |\varphi_{\beta}\rangle \right\}$$

ماتریس همپوشانی  $\langle \varphi_{\beta} | p^{I=0} p^N p^Z | \varphi_{\beta'} \rangle u_{\Lambda,\beta'} = u_{\Lambda} u_{\Lambda,\beta}$  بر این اساس، معادله **HWB** است که در اینجا  $\mathcal{E}_{\Lambda\Lambda'}$  انرژی کرنل می باشد. سرانجام، ضرایب پایین

ترین ویژه مقدار، برای محاسبه هر دو تابع موج پیوسته  $F(\beta) = \sum_{\Lambda} G_{\Lambda}^0 u_{\Lambda,\beta}$  مورد استفاده قرار می گیرد.

احتمال توزیع برای حالت های انرژی عناصر ماتریس هسته ای به صورت زیر است [۶]:

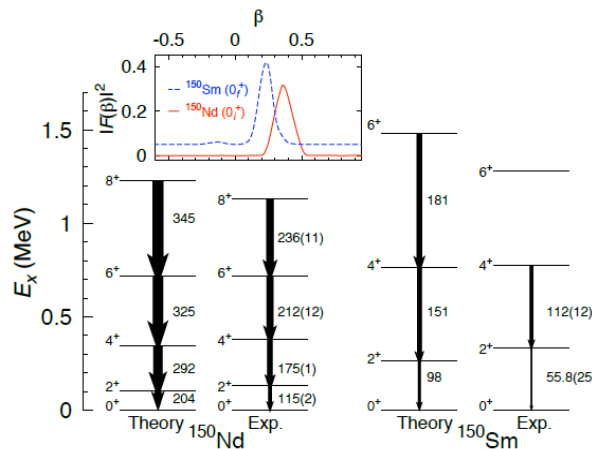
<sup>1</sup> Hill-wheeler-griffin



(۶)

$$M_{F/GT}^{0v} = \sum_{\Lambda_i} \sum_{\beta_i} \left( \frac{u_{\Lambda_i, \beta_i}^*}{\sqrt{n_{\Lambda_i}}} \right) G_{\Lambda_i}^{0*} \langle \Phi_{\beta_f} | P^{N_f} P^{Z_f} \hat{M}_{F/GT}^{0v} P^{I=0} P^{N_i} P^{Z_i} | \Phi_{\beta_i} \rangle G_{\Lambda_i}^{0*} \frac{u_{\Lambda_i, \beta_i}^*}{\sqrt{n_{\Lambda_i}}}$$

توصیفی از خواص هسته نهایی و اولیه برای این روش در شکل (۱) نشان داده و حالت تئوری و تجربی برای  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{150}\text{Sm}$  مقایسه شده است.



شکل ۱. مقایسه تجربی و تئوری برای حالت پایه  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{150}\text{Sm}$ . تابع موج حالت پایه به عنوان تابعی از تغییر شکل ذاتی است و مقدار  $^{150}\text{Sm}$  به ۰,۰۵ تغییر می کند [۶].

یک توافق خوبی برای انرژی های برانگیخته و احتمال گذار  $B(E_\gamma)$  مشاهده می شود. مقدار محاسبه شده برای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو  $2,99\text{MeV}$  است در حالی که مقدار تجربی آن  $3,37\text{MeV}$  می باشد. احتمال توزیع برای هسته های دختر و مادر در حالت  $0^+$  یک تغییر شکل چهار قطبی ذاتی  $\beta$  خواهد داشت. برای هر دو  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{150}\text{Sm}$  مقادیر ترتیب برابر  $\beta \approx +0.25$ ,  $\beta \approx +0.40$  می باشد. معادله (۴) نشان می دهد که عناصر ماتریس هسته ای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو می توانند به عنوان جمعی از عناصر ماتریسی بین حالت هایی با تغییر شکل چهار قطبی ذاتی متفاوت در هسته اولیه و نهایی باشند. در نتیجه داریم:

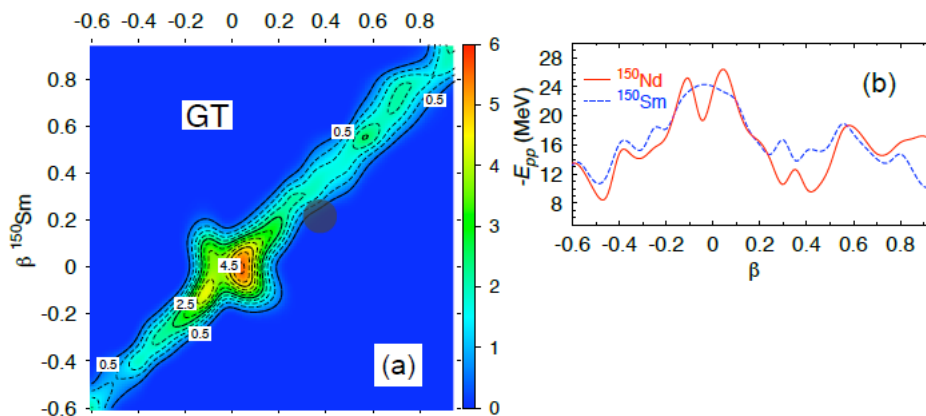
$$\frac{\langle \Phi_{\beta_f} | P^{N_f} P^{Z_f} \hat{M}_{F/GT}^{0v} P^{I=0} P^{N_i} P^{Z_i} | \Phi_{\beta_i} \rangle}{\sqrt{\langle \Phi_{\beta_f} | P^{N_f} P^{Z_f} P^{I=0} | \Phi_{\beta_f} \rangle \langle \Phi_{\beta_i} | P^{I=0} P^{N_i} P^{Z_i} | \Phi_{\beta_i} \rangle}} \quad (7)$$

که عناصر ماتریسی به صراحت از عملگر واپاشی دو بتایی بدون نوترینو تهیه شده و به عنوان تابعی از هسته های درگیر در این واپاشی است.

در شکل (۲) عناصر ماتریسی برای GT نشان داده شده و پیکربندی کروی بیشتر برای واپاشی ترجیح داده می



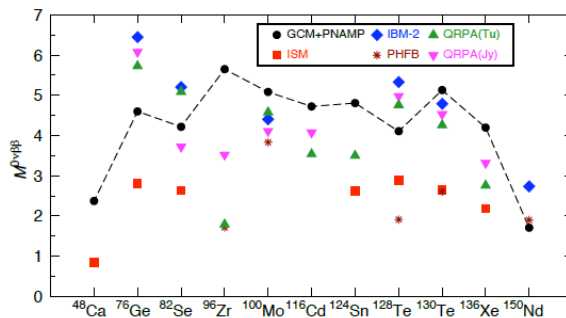
شود. با این وجود، همچنین یک بازه از تغییر شکل نزدیک به پیکربندی کروی است که در اینجا عنصر ماتریسی غیر قطری نادیده گرفته می شود که  $\beta \in [-0.2, +0.2]$  بدست میاید. مقدار ماکزیمم بدست آمده  $(+0.03, 0)$  بوده و با محاسبات PHFB و IBM تفاوت خوبی دارد که یک کاهش قابل توجهی از NME با تغییر شکل چهار قطبی های ذاتی متفاوت را در بین هسته اولیه و نهایی نشان میدهد. همچنین این رفتار برای واپاشی دو بتایی  $2\nu\beta\beta$  برای محاسبات QRPA مشاهده می شود.



شکل ۲. (a) عملگر GT به عنوان تابعی از تغییر شکل ذاتی هسته دختر و مادر. ناحیه سایه خورده به ماکزیمم احتمال برای پیدا کردن حالت های هسته دختر و مادر مربوط است. (b) انرژی جفتیدگی به عنوان تابعی از تغییر شکل ذاتی [۷].

سرانجام نتایج برای NME برابر ۱,۷۱ و ۰,۴۳ به ترتیب برای Gamow-Teller و Fermi می باشد. در شکل (b.۲) انرژی جفتیدگی  $E_{pp}$  هسته های درگیر در واپاشی نشان داده شده است که به عنوان قسمت تانسوری جفتیدگی در روش PNAMP تعریف می شود. یک همبستگی قوی بین ساختار NME و  $E_{pp}$  باید پیدا کرد چون که هر دو ماکزیمم مقدار مشابهی برای تغییر شکل هسته دختر و مادر دارند. سپس مقدار NME در معادله (۴) برای چندین واپاشی دو بتایی گسیلی را باید محاسبه کرده و با دیگر روش های محاسباتی که از فرض های مشابه مربوط به پتانسیل نوتروینو استفاده می کنند، مقایسه نمود.





شکل ۳. عناصر ماتریس هسته ای محاسبه شده با همبستگی کوتاه برد برای روش های مختلف

[۷] (ISM, PHFB, GRPA, IBM-۲)

در شکل (۳) می بینیم که NME برای همه هسته ها نسبتاً ثابت بوده و در حدود ۴٫۷ می باشد ولی برای  $^{96}\text{Zr}$  مقداری بزرگتر و برای  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{48}\text{Ca}$  مقداری کمتر از این ثابت می باشد که برای Ca این مقدار ۲٫۵ می باشد. انتظاری رود که با بسط مدل فضا در محاسبات ISM مقدار NME بالا رود و باید توجه کنیم که برانگیختگی شبه ذره در تابع موج ذاتی ممکن است مقدار ما را یک کمی پایین آورد [۷].

بعضی تفاوت هم بین مقدار بدست آمده از GCM و QRPA وجود دارد. این تفاوت به خاطر فرض تقارن کروی در QRPA و فقدان برانگیختگی شبه ذره در GCM می باشد. انتظار می رود که درجه آزادی هسته مورد مطالعه در حالت پایه به طور قابل توجهی تغییر نکند. سپس عملگر  $S_{+(-)}$  از GT برای واپاشی هسته دختر و مادر تعریف شده و مقدار محاسبه شده  $S_{+(-)}$  با مقدار اندازه گیری شده تجربی با استفاده از جدول (۱) مقایسه می شود.

جدول ۱. تفاوت مقدار Q بین تجربی و تئوری،  $S_{+}$  برای هسته دختر و  $S_{-}$  برای هسته مادر از عملگر کل GT [۸].

A	$Q_{\text{theo}} - Q_{\text{exp}}$ (MeV)	$S_{+}$	$S_{-}$	$M^{\nu\beta}$	$T_{1/2}$ ( $\times 10^{23}$ y)
48	0.265	1.99 ( $1.9 \pm 0.5$ [25])	13.55 ( $14.4 \pm 2.2$ [25])	2.37	28.5
76	0.271	1.49 ( $1.45 \pm 0.07$ [20])	20.97 (19.89 [24])	4.60	76.9
82	-0.366	1.24	23.56 (21.91 [24])	4.22	20.8
96	2.580	2.56 ( $0.29 \pm 0.08$ [28])	27.63	5.65	5.48
100	1.879	2.48	27.87 (26.69 [24])	5.08	8.64
116	1.365	2.61 ( $1.09^{+0.13}_{-0.57}$ [29])	34.30 (32.70 [24])	4.72	9.24
124	-0.830	1.63	40.65	4.81	16.2
128	-0.564	1.45	40.48 (40.08 [24])	4.11	343.1
130	-0.348	1.19	43.57 (45.90 [24])	5.13	8.84
136	-1.027	0.96	46.71	4.20	12.7
150	-0.380	1.45	50.32	1.71	16.5

همانطور که در جدول (۱) نشان داده شده در همه موارد مقدار Q محاسبه شده تئوری و تجربی به جز در  $^{96}\text{Zr}$  و  $^{100}\text{Mo}$  از توافق عالی برخوردار است و کمترین نیمه عمر و بیشترین NME مربوط به این دو عنصر است [۸].



## نتیجه گیری

عناصر ماتریس هسته ای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو برای هسته‌های  $^{96}\text{Zr}$  و  $^{76}\text{Ge}$  و  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{136}\text{Xe}$  بر اساس روش های تابع حالت چگالی انرژی با استفاده از تابع  $Gog\ y\ D\ 's$ ، مورد بررسی قرار گرفت. یک توافق خوبی برای انرژی های برانگیخته و احتمال گذار  $B(E_2)$  مشاهده می شود. مقدار محاسبه شده برای واپاشی دو بتایی بدون نوترینو  $2,99\text{Mev}$  است در حالی که مقدار تجربی آن  $3,37\text{Mev}$  می باشد. احتمال توزیع برای هسته های دختر و مادر در حالت  $0^+$  یک تغییر شکل چهار قطبی ذاتی  $\beta$  خواهد داشت. محاسبات PHFB و IBM تفاوت خوبی دارد که یک کاهش قابل توجهی از NME با تغییر شکل چهار قطبی های ذاتی متفاوت را در بین هسته اولیه و نهایی نشان میدهد. نتایج برای NME برابر  $1,71$  و  $0,43$  به ترتیب برای Fermi و Gamow-Teller می باشد. عناصر ماتریس هسته ای محاسبه شده با همبستگی کوتاه برد برای روش های مختلف بررسی شد که NME برای همه هسته ها نسبتاً ثابت بوده و در حدود  $4,7$  می باشد ولی برای  $^{96}\text{Zr}$  مقداری بزرگتر و برای  $^{150}\text{Nd}$  و  $^{48}\text{Ca}$  مقداری کمتر از این ثابت می باشد که برای  $\text{Ca}$  این مقدار  $2,5$  می باشد. انتظاری رود که با بسط مدل فضا در محاسبات ISM، مقدار NME بالا رود و باید توجه کنیم که برانگیختگی شبه ذره در تابع موج ذاتی ممکن است مقدار ما را یک کمی پایین آورد.

## مراجع

- [۱] F. T. Avignone, S. R. Elliott, J. Engel, Rev. Mod. Phys. **۸۰**, ۴۸۱ (۲۰۰۸).
- [۲] E. Majorana, NuovoCim. **۱۴**, ۱۷۱ (۱۹۳۷).
- [۳] J. F. Berger, M. Girod, and D. Gogny, Nucl. Phys. A **۴۲۸**, ۲۳ (۱۹۸۴).
- [۴] M. Bender, P.-H. Heenen, and P.-G. Reinhard, Rev. Mod. Phys. **۷۵**, ۱۲۱ (۲۰۰۳).
- [۵] P. Ring and P. Schuck, The nuclear many body problem, Springer-Verlag, Berlin (۱۹۸۰).
- [۶] R. Rodr\_guez-Guzm\_an, J. L. Egido, L. M. Robledo, Nucl. Phys. A **۷۰۹**, ۲۰۱ (۲۰۰۲).
- [۷] K. Chaturvedi et al., Phys. Rev. C **۷۸**, ۰۵۴۳۰۲ (۲۰۰۸).
- [۸] E. Caurier et al., Rev. Mod. Phys. **۷۷**, ۴۲۷ (۲۰۰۵).