



## کاربرد روش المان طیفی در طراحی حفاظ نوترون

نیما، نهاوندی؛ احمدرضا، ذوالفقاری؛ عبدالحمید، مینوچهر؛ محمدرضا، عباسی

دانشگاه شهید بهشتی - دانشکده مهندسی هسته‌ای

### چکیده

یکی از جدیدترین رویکردهای تحلیل عددی معادله ترابرد نوترون به روش المان محدود، روش المان طیفی می‌باشد. در روش المان طیفی از تقریب‌های مرتبه بالا و توزیع نقاط درون‌یابی در بازه‌های نابرابر استفاده می‌شود که ابزاری نیرومند برای تحلیل مکانی معادله ترابرد نوترون با تعداد المان‌های کمتر می‌باشد که کاربرد فراوانی در طراحی حفاظ سازی نوترون دارد. در این مقاله برای حل معادله ترابرد چند گروهی نوترون از بسط هارمونیک‌های کروی (PN) با پارامتر زوج<sup>۱</sup> برای بخش زاویه‌ای و از روش المان طیفی<sup>۲</sup> و بسط چند تابع پایه شکلی<sup>۳</sup> مختلف برای بخش مکانی شار زاویه‌ای نوترون استفاده، همچنین پراکنندگی‌ها بصورت ناهمسانگرد در نظر گرفته شده است.

**کلید واژه:** حفاظ سازی نوترون - معادله ترابرد نوترون - روش المان طیفی - بسط هارمونیک‌های کروی - پارامتر زوج

### مقدمه

مطالعه رفتار نفوذپذیری نوترون در یک حفاظ به دو روش صورت می‌گیرد یک با استفاده از روش مونت کارلو<sup>۴</sup> [۲،۶] و دیگری به کمک حل عددی معادله ترابرد نوترون که در اصل، می‌توان توزیع زاویه‌ای شار نوترون را با دقت بسیار بالا بدست آورد [۱]. یکی از کدهای هسته‌ای که کاربرد فراوانی در این زمینه دارد کد محاسباتی ANISN می‌باشد که برپایه روش جهت‌های مجزا برای هندسه‌های یک بعدی نوشته شده است. در این مقاله نیز هدف حل معادله ترابرد چند گروهی نوترون در هندسه‌های یک بعدی با استفاده از روش المان طیفی به همراه آزمودن چند تابع پایه شکلی برای بخش مکانی و استفاده از بسط هارمونیک‌های کروی زوج برای قسمت زاویه‌ای در مسائل چشمه خارجی ثابت و در مسائل محاسبات بحرانیست می‌باشد. در پایان نیز کاربرد این روش در حفاظ سازی نوترون بررسی می‌گردد که نتایج آن پیش نیاز محاسبات شیلدینگ و حفاظ‌گذاری در برابر پرتوهای گاما می‌باشد.

### معادله ترابرد در قالب پارامتر زوج

معادله ترابرد وابسته به مکان و جهت و انرژی نوترون در حالت ایستا را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱،۳]

<sup>۱</sup> Even parity

<sup>۲</sup> Spectral Element Method

<sup>۳</sup> Basic Shape Functions

<sup>۴</sup> Monte Carlo

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(r, E, \Omega) + \Sigma_t(r, E) \Phi(r, E, \Omega) = \int_{\forall \pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(r, E', \Omega') + \sum_j \frac{\chi^j(E)}{\forall \pi} \int_{\forall \pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \nu^j(E') \Sigma_f^j(r, E') \Phi(r, E', \Omega') + S(r, E, \Omega) \quad (1)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات [۳] که منجر به تولید خطاهایی روی سطح و حجم می شود [۱] می توان اصل تغییرپذیری را بصورت زیر معرفی نمود [۱, ۳]:

$$K^+(\Phi^+) = \int_V \int_{\forall \pi} \{ \nu (S_{eff}^+ \Phi^+) + \nu (S_{eff}^- \mathbb{G}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi^+)) - (\Phi^+ \mathbb{C}(\Phi^+)) \} d\Omega dV + \nu \int_S \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| T(r, \Omega) \Phi^+ d\Omega dS + -\nu \int_S \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| (\Phi^+)^2 d\Omega dS \quad (2)$$

در صورتی که اصل وردشی فوق با استفاده از روش المان طیفی بیشینه شود مقدار خطاهای روی سطح و حجم کمینه خواهد شد و با ارضای شرایط مرزی جواب های قابل قبولی برای شار زاویه ای بدست می آید.

### مروری بر روش المان طیفی

می خواهیم جواب را روی المان  $l$ ام با یک چندجمله ای مرتبه  $m$  تقریب بزنیم در این صورت  $(m + 1)$  نقطه درون یابی در زیرالمان تعریف می شود که شامل دو نقطه پایانی هندسی در دو سر المان و  $(m - 1)$  نقطه دیگر در درون المان می باشد. برای آسان کردن محاسبات زیر - المان  $l$ ام را در بازه استاندارد  $[-1, 1]$  با محور بی بعد  $\xi$  تعریف می کنیم:

$$x(\xi) = \frac{1}{\forall} (X_{\forall}^{(l)} + X_1^{(l)}) + \frac{1}{\forall} (X_{\forall}^{(l)} - X_1^{(l)}) \xi \quad (3)$$

که در آن  $X_1^{(l)}$  نقطه ابتدایی المان و  $X_{\forall}^{(l)}$  نقطه انتهایی زیرالمان در محور  $x$  می باشد. همچنان که  $\xi$  بین  $-1$  و  $1$  افزایش می یابد  $x$  (نقطه میدانی) از نقطه ابتدایی زیرالمان تا نقطه انتهایی آن حرکت می کند. در روش المان طیفی توابع درون یابی المان  $l$  را می توان به راحتی با چندجمله ای های درون یابی مرتبه  $m$ ام لاگرانژ تعیین کرد، برای

$i = 1, 2, \dots, m + 1$  چندجمله ای های لاگرانژ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Lg_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{m+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{m+1})} \quad (4)$$

که در آن  $\xi_i$ ها نقاطی با مقدار معلوم می باشند. با یک بررسی کوتاه مشخص می شود که این چندجمله ای ها در خاصیت اساسی درون یابی صدق می کنند:

$$Lg_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j} \quad (5)$$

که در آن  $\delta_{i,j}$  دلتای کرونکر می باشد. می توان با استفاده از رابطه (۳) متغیر مکانی  $x$  را به صورت متغیر استاندارد متقارن  $\xi$  تبدیل خواهیم کنیم، پس دیفرانسیل مکانی به صورت زیر نمایش داده می شود [۲]:

$$h_l \equiv X_{\forall}^{(l)} - X_1^{(l)} \Rightarrow dx = \frac{h_l}{\forall} d\xi \quad (6)$$

<sup>۱</sup> Element Interpolation Functions

با استفاده از روابط فوق، ماتریس‌های انتگرالی ایجاد شده از روش المان محدود برای بخش مکانی شار زاویه‌ای را می‌توان به صورت روش المان طیفی تعریف کرد:

$$\underline{S}_1^l = \int_{x_i^{(l)}}^{x_f^{(l)}} \underline{B}^{lT}(x) dx = \frac{h_l}{\gamma} \int_{-1}^1 \underline{L}g_m^l d\xi \quad (7)$$

$$\underline{S}_2^l = \int_{x_i^{(l)}}^{x_f^{(l)}} \underline{B}^l(x) \underline{B}^{lT}(x) dx = \frac{h_l}{\gamma} \int_{-1}^1 \underline{L}g_m^l(\xi) \underline{L}g_m^{lT}(\xi) d\xi \quad (8)$$

$$\underline{S}_3^l = \int_{x_i^{(l)}}^{x_f^{(l)}} \frac{\partial \underline{B}^j(x)}{\partial x} \frac{\partial \underline{B}^{jT}(x)}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{h_l} \int_{-1}^1 \frac{d\underline{L}g_m^l(\xi)}{d\xi} \frac{d\underline{L}g_m^{lT}(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (9)$$

و بردار  $\underline{L}g_m^{lT}(\xi)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{L}g_m^{lT}(\xi) = [\underline{L}g_1^l(\xi) \quad \underline{L}g_2^l(\xi) \quad \dots \quad \underline{L}g_{(m+1)}^l(\xi)] \quad (10)$$

که در آن  $l$  نشان دهنده المان،  $m$  نشان دهنده مرتبه چندجمله‌ای لاگرانژ بکار رفته در آن المان،  $T$  نماد ترانهاده بردار و  $x_i^{(l)}$  و  $x_f^{(l)}$  مکان ابتدا و انتهای المان می‌باشند.

تئوری درونیابی توسط چندجمله‌ای لاگرانژ به همراه چندجمله‌ای‌های متعامد بیانگر این مطلب است که،  $(m-1)$  گره‌های داخلی در هر المان باید در صفرهای یک تابع پایه شکلی متعامد مرتبه  $(m-1)$  مانند چندجمله‌ای‌های لوباتو<sup>۱</sup> توزیع شود، زیرا توزیع نقاط درونیابی در بازه‌های برابر، دقت درونیابی را پایین می‌آورد [۲]. در روش المان طیفی نقاط درونیابی در فواصل نابرابر توزیع می‌شوند مثلاً با استفاده از صفرهای چندجمله‌ای مختلف مانند لوباتو، برای درونیابی مرتبه  $(m+1)$ ، توزیع نقاط به صورت زیر انجام می‌گیرد [۲]:

$$\xi_1 = -1 \quad \xi_2 = t_1, \quad \xi_3 = t_2, \quad \xi_4 = t_3, \quad \dots, \quad \xi_m = t_{m-1} \quad (11)$$

$$\xi_{m+1} = +1$$

که در آن  $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$  صفرهای چندجمله‌ای مرتبه  $(m-1)$  لوباتو می‌باشند.

### انتگرال‌گیری عددی با استفاده از توابع متعامد

همان‌طور پیش‌تر اشاره شد، از توابع متعامد می‌توان برای انتگرال‌گیری عددی با دقت بالا استفاده کرد. با توجه به این که کران انتگرال‌های ماتریس‌های مکانی در بازه  $[-1, 1]$  قرار دارد، چندجمله‌ای‌هایی که در این بازه تعریف شده‌اند را برای انتگرال‌گیری عددی می‌توان بکار برد.

انتگرال‌گیری عددی لوباتو برای تابع هموار  $f(\xi)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{p=1}^{k+1} f(\xi = z_p) w_p \quad (12)$$

که در آن  $k \geq 1$  مرتبه انتخاب شده برای انتگرال‌گیری عددی می‌باشد،  $z_p$ ها نقاط پایه‌ای<sup>۲</sup> انتگرال‌گیری و  $w_p$ ها وزن‌های انتگرال‌گیری متناظر با این نقاط می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

<sup>۱</sup> Lobatto Polynomials

<sup>۲</sup> Base Points



$$z_1 = -1$$

$$z_2 = t_1, \quad z_3 = t_2, \quad z_4 = t_3, \quad \dots, \quad z_k = t_{k-1} \quad (13)$$

$$z_{k+1} = +1$$

که در آن  $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$  چندجمله‌ای مرتبه  $(k-1)$  لوباتو می‌باشد. در مراجع مختلف، صفرها و وزن‌های مرزی  $(w_1, w_{k+1})$  و درونی  $(w_p)$ ها و انتگرال‌گیری عددی را برای هر تابع متعامد می‌توان یافت. برای مثال انتگرال‌گیری عددی لوباتو را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\int_{-1}^1 P_{ij}(\xi) d\xi \cong \sum_{p=1}^{k+1} P_{ij}(\xi = z_p) w_p = \quad (14)$$

$4\delta_{i,j}\delta_{j,1}Lo_{m-1}(\xi = -1)w_1 + \sum_{p=1}^k P_{ij}(\xi = z_p)w_p + 4\delta_{i,m+1}\delta_{j,m+1}Lo_{m-1}(\xi = +1)w_{k+1}$   
با استفاده از تعاریف ارائه شده، در این مقاله از توابع متعامد لوباتو، لژاندر، چیبیشف نوع اول، چیبیشف نوع دوم و رادا برای تحلیل بخش مکانی شار زاویه‌ای استفاده شده است.

### مثال‌ها و نتایج عددی

با توجه به مطالب ذکر شده یک برنامه محاسباتی برای حل عددی معادله ترابرد با استفاده از روش المان طیفی و بسط هارمونیک‌های کروری برای هندسه‌های یک بعدی نوشته شده و در این بخش نتایج بدست آمده از این برنامه با مقادیر مرجع و نتایج حاصل از کد محاسباتی ANISN مقایسه شده است. داده‌ها و اطلاعات هسته‌ای استفاده شده در مثال‌ها از مراجع [۴] و [۶] استخراج شده است.

### مثال ۱: تیغه جاذب خالص

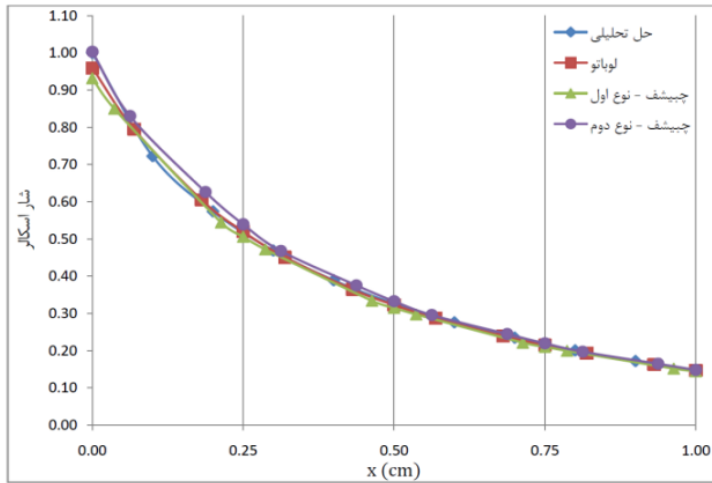
در این مثال تیغه‌ای به ضخامت ۱ سانتی‌متر را در نظر می‌گیریم که متشکل از یک ماده جذب کننده خالص می‌باشد. یک چشمه سطحی در مرز سمت چپ (در نقطه  $x = 0$ ) قرار می‌دهیم. حل تحلیلی این مثال از رابطه زیر بدست می‌آید [۶]:

$$\bar{\Phi}(x) = T_a E_\gamma[\Sigma_a(x-a)] + T_b E_\gamma[\Sigma_a(b-x)] \quad (15)$$

که در آن  $E_\gamma(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^\gamma} dt$  و  $[a, b]$  نشان دهنده بازه مکانی تیغه می‌باشد و  $T$ ها مقدار چشمه سطحی در مرزها را مشخص می‌کند. ورودی‌های مسئله به صورت زیر می‌باشند:

$$d = 1 \text{ cm}, \quad \Sigma = \Sigma_a = 1 \text{ cm}^{-1}, \quad \Sigma_s = 0, \quad S = 0, \quad T = 1$$

این مسئله با استفاده از ۴ المان درجه ۳ و تقریب  $P_V$  حل شده و شار اسکالر توسط روش المان طیفی با استفاده سه تابع متعامد لوباتو، چیبیشف نوع اول و نوع دوم محاسبه شده است. برای مقایسه نتایج، نمودار پیوسته خطی حل تحلیلی و توابع متعامد بکاررفته در محاسبات در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل (۱) نمودار مقایسه نتایج حل تحلیلی و روش المان طیفی برای مسئله چشمه سطحی بر روی تیغه یک‌بعدی جذب کننده خالص

همان طور که مشاهده می‌شود، تراکم نقاط درون‌یابی در مجاورت مرزهای خارجی و مرزهای بین المان‌ها بیشتر می‌باشد، همین خاصیت توابع متعامد سبب می‌شود که جواب‌هایی با دقت بالاتر بدست آید. بعنوان مثال مقدار شار محاسبه شده در سمت راست تیغه با استفاده از تابع چبیشف نوع دوم، با مقداری که از حل تحلیلی بدست آمده برابر است که کاربرد زیادی در طراحی حفاظ دارد.

## مثال ۲: چشمه حجمی نوترون با پراکندگی ناهمسانگرد

در این مثال یک تیغه سوخت (مانند دی‌اکسید اورانیوم) به ضخامت ۱cm داخل یک لایه کندکننده (مانند گرافیت) به ضخامت ۲cm قرار دارد. برای حفاظ سازی در برابر شار نوترون‌ها یک لایه از ماده بازتابنده (مانند آب) به ضخامت ۲cm به دور آن قرار می‌دهیم. پراکندگی در سوخت و کندکننده ناهمسانگرد و در بازتابنده همسانگرد در نظر گرفته می‌شود. سطوح مقاطع استفاده شده در جدول (۱) آمده است. این مسئله با ۵۰۰ مش و تقریب  $S_{16}$  توسط کد ANISN حل شده و برای مقایسه با سه المان درجه ۲ و ۸ به روش المان طیفی و با استفاده از تقریب‌های  $P_7, P_{17}$  برای توابع پایه مختلف حل شده و مقدار شار اسکالر نرمالیزه در مرز بیرونی، در جدول (۲) با هم مقایسه شده است.

سطح مقطع ( $cm^{-2}$ )	سوخت	کندکننده	بازتابنده
$\Sigma_t$	۰,۵۴۲	۰,۳۸۵	۳,۴۵۲
$\nu\Sigma_f$	۰,۱۲۶	-	-
$\Sigma_{s0}$	۰,۳۷۲	۰,۳۸۴	۳,۴۵۰
$\Sigma_{s1}$	۰,۴۳۰	۰,۱۲۰	-

جدول (۱) جدول سطوح مقاطع استفاده شده در مثال ۲



	لوباتو		لزاند		رادا		چبیشف - ۱		چبیشف - ۲	
	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸
$P_7$	۰,۰۶۹۵	۰,۰۶۷۰	۰,۰۶۹۵	۰,۰۶۷۰	۰,۰۶۹۵	۰,۰۶۷۰	۰,۰۷۳۶	۰,۰۶۷۶	۰,۰۶۵۰	۰,۰۶۵۸
$P_{17}$	۰,۰۶۹۹	۰,۰۶۶۳	۰,۰۶۹۹	۰,۰۶۶۳	۰,۰۶۹۹	۰,۰۶۶۳	۰,۰۷۳۸	۰,۰۶۷۲	۰,۰۶۵۴	۰,۰۶۴۷

ANISN ( $S_{16}$ )

۰,۰۶۶۲۹۳۴

جدول (۲) مقایسه شار اسکالر نرمالیزه شده نوترون در مرز بیرونی برای توابع پایه مختلف در مثال ۲

## نتیجه گیری

در روش المان طیفی، ماتریس های انتگرالی بخش مکانی نسبت به روش المان محدود متفاوت ظاهر خواهند شد و با بالا بردن درجه هر المان می توان انتظار داشت که جواب های دقیق تر برای شار نوترون روی مرزهای بیرونی در مدت زمان اجرای کمتر بدست آورد که در محاسبات طراحی حفاظ بسیار پر کاربرد خواهد بود.

## منابع و مراجع

- [۱]. Ron T. Ackroyd, Finite Element Methods for Particle Transport Applications to Reactor and Radiation Physics, John Wiley & Sons, New York, ۱۹۹۷
- [۲]. C. Pozrikidis, Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using MATLAB, Chapman & Hall, San Diego, ۲۰۰۵
- [۳]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ا. حقیقت طلب، " استفاده از اصل تغییر پذیری  $K^+(\phi^+)$  و روش اجزاء محدود برای حل معادله ترابرد نوترون"، چهاردهمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، یزد، اسفندماه ۱۳۸۶
- [۴]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ع. مینوچهر، " معرفی توابع لوباتو جهت حل معادله ترابرد در مختصات یک بعدی با استفاده از روش اجزای محدود طیفی"، هفدهمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، اصفهان، اسفندماه ۱۳۸۹
- [۵]. W. M. Stacey, Nuclear Reactor Physics, John Wiley & Sons, New York, ۲۰۰۶
- [۶]. C.R.E. de Oliveria, Finite Element Techniques for Multi group Neutron Transport Calculations with Anisotropic Scattering, London University Ph.D. Thesis., ۱۹۸۷