دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان
سومین همایش الکترونیکی پژوهش های نوین در علوم و فناوری
شرکت علم محوران آسمان
3rd E-conference on Recent Research in Science and Technology
November 16, 2015 ۲۵ آبان ماه ۱۳۹۴

فرمول ماتریس برای چولگی برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم

مریم معماری[۱]

A matrix formula for the skewness of maximum likelihood estimators

Maryam memari

Email: m_memari2006@yahoo.com

چکیده

فرمول ماتریس کلی برای چولگی مرتبه دوم از برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی محاسبه می گردد. فرمول بندی ماتریس تنها به عملگرهای ساده روی ماتریسها و بردارها نیاز دارد.فرمول چولگی مرتبه دوم برای مدل نرمال یک پارامتر و یک مدل ARMA بررسی شده است.

کلمات کلیدی

بسط مجانبی، عملگر ماتریس، برآوردگر ماکزیمم درستنمایی، چولگی

۱. مقدمه

یک توزیع معمولا به وسیله میانگین، واریانس، چولگی و کشیدگی مشخص می گردد. میانگین و واریانس مکان و پراکندگی را مشخص می کند درصورتی که چولگی و کشیدگی به شکل توزیع برمی گردد. برای تفاوت پراکندگی از نرمال بودن متغیرها هر دو اندازه گیری می تواند استفاده شود که در اینجا به چولگی برآورد ماکزیمم درستنمایی اشاره شده است. اندازه گیری چولگی استاندارد شده به وسیله رابطه $\gamma = K_3 / K_2^{3/2}$ تعریف می شود که K_r، rامین انباشتک ازتوزیع است. زمانی که $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$) توزیع چولگی مثبت(منفی) دارد. برای همه توزیعهای متقارن $\gamma = 0$ می باشد.(به عنوان مثال نرمال، t-استودینت، توان نمایی، لجستیک نوع اول و دوم و همچنین چهارمین.)

تحت شرایط مکرر استاندارد، برآوردهای ماکزیمم درستنمایی به طور مجانبی نرمال توزیع شده اند و سپس به طور مجانبی سومین چولگی مساوی صفر می باشد.اگرچه برای اندازه نمونه متناهی(کوچک)، توزیع دقیق از MLEها ممکن است خیلی متفاوت از نرمال یک باشد و در اینجا به چولگیMLE که انحراف از نرمال را معلوم می کند پرداخته می شود. مرتبه اول تقریب برای چولگی ازMLE صفر است که این هیچ اطلاعی درباره تقارن برآوردگر در اندازه نمونه های متناهی به ما نمی دهد. Shenton(1998), Bowman چولگی مرتبه دوم از MLE که به صورت چولگی دقیق

---

[۱] کارشناسی ارشد آمار ریاضی

اتفاق می افتد محاسبه کردند که می تواند به عنوان یک راهنما برای محاسبه کردن اندازه نمونه که موردتوجه Shenton(2005), Bowman است مورد استفاده قرار گیرد. یک مقدار ثابت برای γ گرفتیم و می گیریم $\gamma=0.1$ و اندازه نمونه برای این چولگی انتخاب می شود.

فرض کنید $L(\theta)$ لگ درستنمایی برای نمونه $P\times 1$ برای θ از پارامترهای ناشناخته باشد و فرض کنید $\hat{\theta}$ ، برآوردMLE ، θباشد و $L(\theta)$ منظم است و برای همه θمشتق وجود دارد و شامل سومین مرتبه می باشد.از کلیه تانسور برای انباشتهای پیوسته از مشتقات لگ درستنمایی استفاده می شود. $K_{r,s}=E\left\{\partial L(\theta)/\partial\theta_r\ \partial L(\theta)/\partial\theta_s\right\}$ و $K_{rs}=E\left\{\partial^2 L(\theta)/\partial\theta_r\partial\theta_s\right\}$

و $K_{r,s}=E\left\{\partial^2 L(\theta)/\partial\theta_r\partial\theta_s\ \partial L(\theta)/\partial\theta_t\right\}$ $K_{rs}=E\left\{\partial^3 L(\theta)/\partial\theta_r\partial\theta_s\partial\theta_t\right\}$ و $K_{rs}{}^{(t)}=\partial K_{r,s}/\partial\theta_t$. این انباشتها، معادلات معین که توسط Bartlett تحت شرایط منظم همچون $K_{r,s}=-K_{rs}$ و $K_{r,st}=K_{rst}-K_{rs}{}^{(t)}$ که $K_{r,s,t}=-K_{rs}-K_{r,st}-K_{s,rt}-K_{t,rs}$ که محاسبه شان ساده می باشد ادعا می کند. ماتریس اطلاع مورد انتظار به وسیله $K_{\theta\theta}=\{-K_{rs}\}$ بدست می دهد. فرض کنید $K^{r,s}$ پاسخ (r,s) ام عنصر ماتریس اطلاع وارون $K_{\theta\theta}{}^{-1}=\{K^{r,s}\}$ می دهد. سومین گشتاور مرکزی از $\hat{\theta}_a$ MLE، $K_3\left(\hat{\theta}_a\right)=E\left[\left(\hat{\theta}_a-\theta_a\right)^3\right]$ برای $a=1,2,\ldots,p$ که با استفاده از بسط تیلور، Shenton(1998), Bowman یک تقریب رتبه ای $o(n^{-2})$ برای سومین گشتاور مرکزی به صورت

$$K_3\left(\hat{\theta}_a\right)=\sum_{r,s,t=1}^{p}K^{a,r}K^{a,s}K^{a,t}m_{rs}^{(t)} \tag{۱}$$

که $m_{rs}^{(t)}=5K_{rs}{}^{(t)}-\left(K_{st}{}^{(r)}+K_{rt}{}^{(s)}+K_{rst}\right)$

از اینرو، دومین مرتبه چولگی $\hat{\theta}_a$ به صورت $\gamma(\hat{\theta}_a)=K_3\left(\hat{\theta}_a\right)/(K^{a,a})^{3/2}$ برای $a=1,2,\ldots,p$، $K_3(\hat{\theta}_a)$ و $(K^{a,a})^{3/2}$ از رتبه های $o(n^{-2})$ و $o(n^{-3/2})$ و سومین انباشت استاندارد $\gamma(\hat{\theta}_a)$ رتبه $o(n^{-1/2})$ می باشد.

در این مقاله یک فرمول ماتریس برای معادله (۱) تحت چهارچوب کلی بدست می آید. در بخش ۲ نتیجه اصلی آورده شده و در بخش ۳ فرمول ماتریس معرفی شده برای یک مدل غیرخطی نرمال چندگانه یک پارامتری بحث شده. در بخش ۴ یک چولگی MLE از پارامترها در مدل ARMA آمده است. در بخش ۵ برای محاسبه چولگی الگوریتم دست نویس R (R Development CoreTeam2007) آورده شده است.

۲. فرمول ماتریس کلی

اگر $E=\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ ماتریس $P*P$ است که e_j بردار $P*1$ است، تعریف می کنیم $p^2\times p^2$ ماتریس $Q(E)=block-diag\left(e_1^T,\ldots,e_p^T\right)$ و وارون ماتریس اطلاع $K_{\theta\theta}{}^{-1}=(K^{(1)},\ldots,K^{(p)})$ که

$K^{(a)} = \left(K^{1.a}, \ldots, K^{p.a}\right)^T$ ، ماتریس $p \times p^2$ $M = (M^{(1)}, \ldots, M^{(p)})$ در معادله(۱) به صورت نمادین،

$M^{(t)} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(t)} & \cdots & m_{1p}^{(t)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{p1}^{(t)} & \cdots & m_{pp}^{(t)} \end{pmatrix}$ باشد.

توجه کنید

$$\sum_{r,s,t=1}^{p} K^{a,r} K^{a,s} K^{a,t}\, m_{rs}^{(t)} = K^{a(T)} \left(K^{a(T)} \otimes I_p\right)\left(K^{a(T)} \otimes I_{p^2}\right) vec(M)$$

$$K_3(\hat{\theta}) = Q\left(K_{\theta\theta}^{-1}\right)\left(Q\left(K_{\theta\theta}^{-1}\right) \otimes I_p\right) \mathrm{vec}\left(M^T K_{\theta\theta}^{-1}\right) \qquad (۲)$$

۳. مدل نرمال چندگانه با پارامتر کلی

معادله (۲) یک مدل غیرخطی نرمال چندگانه با پارامتر کلی توسط Patriota ,Lemonte(2009) معرفی شده است. فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ بردارهای مستقل مشاهده شده برای تعداد پاسخهای اندازه گیری شده در iامین مشاهده q_i باشد. مدل رگرسیون چندگانه به صورت زیر نوشته می شود:

$$Y_i = \mu_i(\theta) + u_i \qquad i=1,\ldots,n \qquad (۳)$$

که $u_i \sim N_{q_i}(0, \Sigma_i(\theta))$ دارای توزیع مستقل می باشد که $Y_i \sim N_{q_i}(\mu_i(\theta), \Sigma_i(\theta))$ که $\mu_i(\theta) = \mu_i(\theta, X_i)$ و $\Sigma_i(\theta) = \Sigma_i(\theta, Z_i)$ میانگین و ماتریس کواریانس-واریانس می باشد.

$$a_r = \frac{\partial \mu}{\partial \theta_r} \text{ و } a_{sr} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta_s \partial \theta_r} \text{ و } c_r = \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_r} \text{ و } c_{sr} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \theta_s \partial \theta_r} \text{ و } A_r = \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \theta_r} = -\Sigma^{-1} c_r \Sigma^{-1}$$

$$D = \left(a_1, \ldots, a_p\right) \text{ و } V = \left(vec(c_1), \ldots, vec(c_p)\right)$$

برای محاسبه کردن چولگی مرتبه دوم

$$K_3(\hat{\theta}) = Q\left((F^T H F)^{-1}\right)\left(Q\left((F^T H F)^{-1}\right) \otimes I_p\right) \mathrm{vec}\left(M^T (F^T H F)^{-1}\right)$$

۴. مدلARMA

یک مدلARMA(p,q) به صورت زیر تعریف می شود:

$$y_i = \alpha_1 y_{i-1} + \ldots + \alpha_{p_1} y_{i-p_1} + u_i - \beta_1 u_{i-1} - \ldots - \beta_{p_2} u_{i-p_2} \qquad (۴)$$

که $u_i's$ متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 و $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ سری زمانی مشاهده شده با طول n می باشد. فرض کنید $\tau = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{p_2})^T$ که بردار $b = p_1 + p_2$ از پارامترهای خطی

باشد. $p=b+1$ پارامترهای ناشناخته که برآورد می شوند. لگ درستنمایی $L(\theta)$ برای $\theta=(\tau^T,\sigma^2)^T$ به صورت زیر است:

$$L(\theta)=\frac{-1}{2}\log|\Sigma|-\frac{1}{2}y^T\Sigma^{-1}y \quad (۵)$$

$$M^{(t)}=V^TH_2O_{2t}H_2V-3(V^TH_2V_t+V_t^TH_2V-\left[V_{2t}^TH_2\right]\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right] \quad (۶)$$

$$V_t=\frac{\partial V}{\partial\theta_t}\text{ ، }O_{2t}=4C_t\otimes\Sigma\text{ ، }H_2=\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}$$

ماتریسها را می توان به وسیله تجزیه کردن V و V_t به صورت زیر نشان داد:

$V=(\tilde{V},\tilde{\gamma})$ و $V=(\tilde{V}_t,\tilde{\gamma}_t)$ که $\tilde{V}=(vec(c_1),\ldots,vec(c_b))$ ، $\tilde{\gamma}=vec(c_p)$ ،

$\tilde{V}_t=(vec(c_{1t}),\ldots,vec(c_{bt}))$ ، $\tilde{\gamma}_t=vec(c_{pt})$ همچنین اطلاع فیشر به صورت زیر می باشد:

$$K_{\theta\theta}=\begin{pmatrix}K_{\tau\tau} & K_{\tau\sigma^2}\\ K_{\sigma^2\tau} & K_{\sigma^2\sigma^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{V}^TH_2\tilde{V} & \tilde{V}^TH_2\tilde{\gamma}\\ \tilde{\gamma}^TH_2\tilde{V} & \tilde{\gamma}^TH_2\tilde{\gamma}\end{pmatrix} \quad (۷)$$

ماتریس M برای مدلARMA به راحتی با استفاده از رابطه (۶) بدست می آید. سپس چولگی MLE ها می تواند با استفاده از ماتریس M و ماتریس اطلاع رابطه(۷) محاسبه شود.

۵. کد برنامهR

برای محاسبه چولگی مرتبه دوم ازMLE ها نیاز به اطلاعات مورد انتظار از ماتریس $K_{\theta\theta}$ و ماتریس M داریم.

```
Require("Matrix")
K3. Corrected<-function(K,M){
K<-solve(K)
1<-ncol(K)
aux<-function(j)
 matrix(kronecker(diga(1)[ ,j], K1 [ ,j]))
D.K<-Matrix(sapply(1:1, aux) ,sparse=TRUE)
Kurtosis.corrected<-t(D.K)%*%kronecher(t(D.K),Diagonal(1))%*%as.vector(t(M)%*%K)
Return(Kurtosis.corrected)
}
```

۶. نتیجه گیری

فرمول ماتریس کلی برای محاسبه چولگی مرتبه دوم برآوردهای ماکزیمم درستنمایی ارائه گردید. این فرمول برای مدل

غیرخطی نرمال و یک مدلARMA کاربرد دارد. برای محاسبه چولگی کد برنامهR بیان گردیده است.

۷. منابع و مراجع

[1] AlexandreG.Patriota, GaussM.Cordeiro,Statistics and Probability Letters81,2011,pp.529-537

[2] Bollen,K.A.,Structural Equations with Latent Variable,Wiley,New York,1989.

[3] Bowman,K.O.,Shenton,L.R, Asymptotic skewness and the distribution of maximum likelihood estimators.Theory and Methods 27,1998,pp.2743-2760

[4] Cordeiro, K.O., Cordeiro,L.R.,Skewness for parameters in generalized linear models. Communications in Statistics.Theory and Methods30,2001,pp.1317-1334

[5] Fuller,W.,Measurement Error Models.Wiley,Chichester,1987.