جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی

حسینی، محمد- خلفی، حسین*

سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، پژوهشکده کاربرد پرتوها

چکیده

یکی از روش های متداول نودال، روش تحلیلی می باشد که در این پژوهش به جزئیات آن پرداخته می شود. رویکردهای متنوعی برای حل معادله پخش به روش تحلیلی وجود دارد، یکی از این رویکردها که در اینجا به آن پرداخته می شود، تقریب فرار عرضی است. بر اساس این رویکرد، معادلات دو و سه بعدی پخش نوترون به ترتیب به دو و سه معادله یک بعدی شکسته شده، سپس پاسخ هر معادله به صورت تحلیلی محاسبه خواهد شد. با استفاده از پاسخ های بدست آمده در هر بعد، رابطه ای بین شار متوسط هر نود و جریان خالص متوسط روی سطوح هر نود محاسبه شده و در نهایت توزیع شار وابسته مکان در محیط مورد نظر بدست خواهد آمد.

کلیدواژه: نودال، تحلیلی، فرار عرضی، شار متوسط هر نود، جریان خالص متوسط

۱- مقدمه

دانستن توزیع فضایی قدرت در طراحی و آنالیز راکتورهای آب سبک از اهمیت بالایی برخوردار است. پاسخ به مسائل ایمنی در زمینه سناریوهای حوادث مختلف، اغلب نیازمند پیدا کردن توزیع گذرای قدرت می باشد. از این رو، سازندگان راکتورهای هسته ای همواره تحت فشار فزاینده ای قرار دارند تا به دنبال توسعه روش های جدیدی برای تضمین ایمنی محصولاتشان باشند. یکی از بهترین روش های پاسخ به مسائل ایمنی، توسعه روش های نظری پیچیده است، که ما را قادر می سازد تا اطلاعات ایمنی مربوطه را تولید کنیم. در ضمن، بحث اقتصادی نیز ما را مجاب می کند که به دنبال چنین روش هایی باشیم[۱].

روش نودال، عنوان کلی برای دسته ی بزرگی از روش های نودال است که در حالات مختلف دو بعدی و سه بعدی در هندسه های مختلف مستطیلی، هگزاگونال و با تقریب های گوناگون برای توزیع شار، توسط پژوهشگران ابداع شده و توسعه یافته است. شروع روش نودال از معادله تراز نوترون می باشد، یعنی تولید و نشت ورودی نوترون به هر نود برابر جذب و نشت خروجی نوترون از همان نود می

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

باشد. اسمیت[1] در سال ۱۹۷۶، روش تحلیلی نودال را برای حل معادله پخش دو گروهی چند بعدی در حالت پایا و گذرا مورد بررسی قرار داده است. همچنین هبرت[2] در سال ۲۰۰۸ با ساده سازی این روش آن را به حالت چند گروهی نیز تعمیم داده است[۱].

۲- روش نودال تحلیلی

روش نودال تحلیلی یکی از روش های نودال می باشد که در این پژوهش، مورد بررسی قرار گرفته است. این روش به دلیل تحلیلی بودن، از دقت خوبی برخوردار می باشد. در این روش، تابع تحلیلی شار نوترون در هر نود بدست می آید سپس از این توابع تحلیلی در محاسبه جریان خالص روی صفحات بین نودها استفاده می گردد و نهایتاً، با استفاده از جریان بدست آمده، تصحیح معادلات پخش انجام می گیرد.
دو مزیت مهم روش نودال تحلیلی عبارت است از: اولاً، بر معادله تراز نوترون بنا شده است و ثانیاً، برای مش های با طول زیاد به پاسخ های با دقت قابل ملاحظه ای می رسد.
معادله پخش نوترون چند گروهی در حالت پایا (مستقل از زمان) به صورت معادله ۱ می باشد:

$$-\nabla.\vec{J}_g(\vec{r})-\Sigma_{t,g}(\vec{r})\varphi_g(\vec{r})+\sum_{g'=1}^{G}\left[\Sigma_{g'\to g}(\vec{r})+\chi_g\left(\frac{1}{k_{eff}}\right)\upsilon\Sigma_{f,g'}(\vec{r})\right]\varphi_{g'}(\vec{r})+Q_g(\vec{r})=0 \quad (۱)$$
$$g=1,..,G$$

با فرض اینکه تعداد گروه های انرژی دو در نظر گرفته شود، شکل معادله پخش نوترون به صورت رابطه ۲ نوشته می شود:

$$\begin{cases} g=1\Rightarrow -\nabla.\vec{J}_1(\vec{r})-\Sigma_{t,1}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\Sigma_{s,1\to 1}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\Sigma_{s,1\to 2}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r}) \\ +\chi_1\left(\frac{1}{k_{eff}}\right)\left[\upsilon\Sigma_{f,1}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\upsilon\Sigma_{f,2}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})\right]+Q_1(\vec{r})=0 \\ g=2\Rightarrow -\nabla.\vec{J}_2(\vec{r})-\Sigma_{t,2}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})+\Sigma_{s,2\to 2}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})+\Sigma_{s,2\to 1}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r}) \\ +\chi_2\left(\frac{1}{k_{eff}}\right)\left[\upsilon\Sigma_{f,1}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\upsilon\Sigma_{f,2}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})\right]+Q_2(\vec{r})=0 \end{cases} \quad (۲)$$

با تعریف سطح مقطع برداشت به صورت $\Sigma_{r,g}=\Sigma_{t,g}-\Sigma_{s,g\to g}$ و صرف نظر کردن از احتمال شکافت در گروه دو، رابطه ۲ به صورت رابطه ۳ در می آید.

$$\begin{cases} -\nabla.\vec{J}_1(\vec{r})-\Sigma_{r,1}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\Sigma_{s,1\to 2}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\left(\frac{1}{k_{eff}}\right)\left[\upsilon\Sigma_{f,1}(\vec{r})\varphi_1(\vec{r})+\upsilon\Sigma_{f,2}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})\right]+Q_1(\vec{r})=0 \\ -\nabla.\vec{J}_2(\vec{r})-\Sigma_{r,2}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})+\Sigma_{s,2\to 1}(\vec{r})\varphi_2(\vec{r})+Q_2(\vec{r})=0 \end{cases} \quad (۳)$$

---
[1] Smith
[2] Hebert

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

با انتگرال گیری از رابطه ۳ بر روی حجم کنترل (بر روی حجم نود mام) و با فرض $\int_{\vec{r}_m}^{\vec{r}_{m+1}} dV = h_x^m h_y^m h_z^m$، معادله تراز نوترون به صورت معادله ۴ بدست می آید:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_x^m}\left[J_{1x}^{m+} - J_{1x}^{m-}\right] + \frac{1}{h_y^m}\left[J_{1y}^{m+} - J_{1y}^{m-}\right] + \Sigma_{r,1}^m \varphi_1^m = \Sigma_{s,21}^m \varphi_2^m + \frac{1}{k_{eff}}\left[\upsilon\Sigma_{f,1}^m \varphi_1^m + \upsilon\Sigma_{f,2}^m \varphi_2^m\right] + Q_1^m \\ \frac{1}{h_x^m}\left[J_{2x}^{m+} - J_{2x}^{m-}\right] + \frac{1}{h_y^m}\left[J_{2y}^{m+} - J_{2y}^{m-}\right] + \Sigma_{r,2}^m \varphi_2^m = \Sigma_{s,12}^m \varphi_1^m + Q_2^m \end{cases} \quad (۴)$$

به طوریکه

$h_u^m \equiv$ طول نود m ام در راستای u

$J_{gu}^{m+} \equiv$ جریان خالص نوترون در گروه g، روی صفحه سمت راست نود mام در راستای u

$J_{gu}^{m-} \equiv$ جریان خالص نوترون در گروه g، روی صفحه سمت چپ نود mام در راستای u

$\varphi_g^m \equiv$ شار متوسط (انتگرال گیری شده بر روی حجم نود) نود mام در گروه g

اکنون با استخراج رابطه ای بین جریان خالص متوسط روی سطوح و شار متوسط هر نود در هر گروه انرژی، معادله ۴ حل خواهد شد. این ارتباط با استفاده از حل تحلیلی در هر بعد برقرار می شود. در ادامه، جهت سادگی، روابط مورد نظر برای یک مسئله چشمه ثابت در یک صفحه دو بعدی و برای یک گروه انرژی بدست خواهد آمد.

۳- تقریب فرار عرضی

اگر معادله دیفرانسیل پخش نوترون برای نود مفروض m_x, m_y در دو بعد را به صورت رابطه ۵ داشته باشیم:

$$-D\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} - D\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} + \Sigma_r\varphi(x,y) = S \quad (۵)$$

با انتگرالگیری از معادله فوق در دو راستای y و x به صورت مجزا به معادلات ۶ و ۷ خواهیم رسید:

$$-D\frac{d^2\varphi_x(x)}{dx^2} + \Sigma_r^{m_x,m_y}\varphi_x(x) = S^{m_x,m_y} - \frac{1}{h_y^{m_x,m_y}}\left(L_y^{m_x,m_y}(x)\right) \quad (۶)$$

$$-D\frac{d^2\varphi_y(y)}{dx^2} + \Sigma_r^{m_x,m_y}\varphi_y(y) = S^{m_x,m_y} - \frac{1}{h_x^{m_x,m_y}}\left(L_x^{m_x,m_y}(y)\right) \quad (۷)$$

عبارات $L_y^{m_x,m_y}(x)$ و $L_x^{m_x,m_y}(y)$ به ترتیب جمله فرار عرضی در راستای x و y نامیده می شوند. اگر معادلات ۶ و ۷ حل شوند، تابع توزیع شار یک بعدی در هر نود و در هر راستا بدست خواهد آمد و این

تابع توزیع می تواند در بازسازی توزیع قدرت تولیدی درون هر نود مورد استفاده قرار گیرد. از آنجاییکه در حل معادلات فوق الذکر به پاسخ خصوصی معادله نیاز می باشد لذا باید عبارات نشت عرضی در هر راستا بدست آیند. برای این کار می توان از تقریب چند جمله ای استفاده کرد. در این پژوهش از تقریب های درجه صفر (تخت) و درجه دو استفاده شده است که بسیار متداول هستند[۲و۳]. در بخش بعدی به توصیف تقریب درجه ۲ برای فرار عرضی پرداخته می شود.

۴- تقریب جمله فرار عرضی

جمله فرار عرضی برای راستاهای مختلف در هر نود به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$
\begin{gathered}
L_u^{m_x,m_y}(v) \cong c_{0,v}^{m_x,m_y} + c_{1,v}^{m_x,m_y} F_1(v) + c_{2,v}^{m_x,m_y} F_2(v) \\
\begin{cases} F_1(v) = v \\ F_2(v) = 3v^2 - \dfrac{1}{4} \end{cases} \\
u, v = x, y \\
u \neq v
\end{gathered}
\tag{۸}
$$

ضرایب مجهول این تقریب به راحتی و با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر هر نود (که از آخرین مرحله تکرار قبل بدست می آید) می تواند محاسبه شود[۴]. با جایگذاری رابطه ۸ در معادلات ۶ و ۷ پاسخ آنها به صورت رابطه ۹ در می آید:

$$
\begin{cases}
\varphi_x(x) = A_x^{m_x,m_y} \mathrm{Exp}\left(\mu_x^{m_x,m_y} x\right) + B_x^{m_x,m_y} \mathrm{Exp}\left(-\mu_x^{m_x,m_y} x\right) + P_x^{m_x,m_y}(x) \\
\varphi_y(y) = A_y^{m_x,m_y} \mathrm{Exp}\left(\mu_y^{m_x,m_y} y\right) + B_y^{m_x,m_y} \mathrm{Exp}\left(-\mu_y^{m_x,m_y} y\right) + P_y^{m_x,m_y}(y)
\end{cases}
\tag{۹}
$$

با انجام یک سری عملیات ریاضی مجاز و مناسب به روابط ۱۰ و ۱۱ برای هر یک از جهت های x و y خواهیم رسید:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{u,L}^{m_x,m_y} = {} & \left[C_{f,u}^{m_x,m_y}\right]\varphi^{m_x,m_y} + \left(D^{m_x,m_y}\right)^{-1}\left[C_{j,u}^{m_x,m_y}\right]\frac{h_u^{m_x,m_y}}{2} J_{u,L}^{m_x,m_y} \\
& - \left[C_{f,u}^{m_x,m_y}\right]P_u^{m_x,m_y} + P_{u,L}^{m_x,m_y} + \left[C_{j,u}^{m_x,m_y}\right]\frac{h_u^{m_x,m_y}}{2} P'^{m_x,m_y}_{u,L}
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{u,R}^{m_x,m_y} = {} & \left[C_{f,u}^{m_x,m_y}\right]\varphi^{m_x,m_y} - \left(D^{m_x,m_y}\right)^{-1}\left[C_{j,u}^{m_x,m_y}\right]\frac{h_u^{m_x,m_y}}{2} J_{u,L}^{m_x,m_y} \\
& - \left[C_{f,u}^{m_x,m_y}\right]P_u^{m_x,m_y} + P_{u,L}^{m_x,m_y} - \left[C_{j,u}^{m_x,m_y}\right]\frac{h_u^{m_x,m_y}}{2} P'^{m_x,m_y}_{u,L}
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

پارامترهای $C_{f,u}^{m_x,m_y}$ و $C_{j,u}^{m_x,m_y}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$
\begin{cases}
C_{f,u}^{m_x,m_y} = \dfrac{\mu_u^{m_x,m_y} h_u^{m_x,m_y}}{\mathrm{Sinh}\left(\mu_u^{m_x,m_y} h_u^{m_x,m_y}\right)} \\
C_{j,u}^{m_x,m_y} = \dfrac{\mathrm{Tanh}\left(\mu_u^{m_x,m_y} \dfrac{h_u^{m_x,m_y}}{2}\right)}{\mu_u^{m_x,m_y} \dfrac{h_u^{m_x,m_y}}{2}}
\end{cases}
$$

با استفاده از روابط ۱۰ و ۱۱ می توان و پیوستگی های شار و جریان متوسط بر مرزهای بین نودها می توان به رابطه مورد نظر بین شار متوسط هر نود و جریان خالص متوسط بر روی سطوح هر نود دست یافت. با جایگذاری این رابطه در روابط ۴ توزیع شار وابسته به مکان و در هر گروه انرژی بدست خواهد آمد.

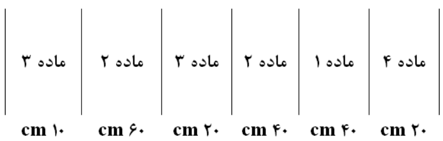
۵- نتایج

به منظور راستی آزمایی روش مورد مطالعه، دو مسئله یک و دو بعدی به عنوان نمونه حل می گردد و نتایج بدست آمده با مقادیر مرجع در طول مش های مختلف مقایسه خواهد شد.

مسئله۱:تیغه یک بعدی نشان داده شده در شکل ۱، دارای ضخامت ۱۷۰ سانتیمتر با مشخصات ذکر شده در جدول ۱ می‌باشد.

جدول ۱- مشخصات مواد مسئله۱

	شماره گروه	$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\to g+1}(cm^{-1})$	$D(cm)$
ماده ۱	اول	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۱/۵
	دوم	۰/۱۳۵	۰/۰۸	۰/۰۰	۰/۴
ماده ۲	اول	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۱/۵
	دوم	۰/۱۳۵	۰/۰۸۵	۰/۰۰	۰/۴
ماده ۳	اول	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۱/۵
	دوم	۰/۱۳۵	۰/۱۳	۰/۰۰	۰/۴
ماده ۴	اول	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۲/۰
	دوم	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۴	۰/۳



شکل ۱- راکتور تیغه ای با بازتابنده

مقایسه مقدار ضریب تکثیر مؤثر برای طول مش های مختلف با مقدار مرجع (IAEA) در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲- مقایسه ضریب تکثیر مؤثر حاصل از محاسبات مستقیم و الحاقی

طول مش (cm)	حل مستقیم	حل الحاقی	اختلاف (pcm)
۱	۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۰/۰۰۰۰۰۰
۵	۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۰/۰۰۰۰۰۰
۱۰	۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۰/۰۰۰۰۰۰
۲۰	۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۰/۰۰۰۰۰۰

مسئله۲: یک صفحه مربعی دو بعدی به مساحت ۹ سانتیمتر مربع که از ۹ نود هم اندازه تشکیل شده، شامل جاذب خالص با سطح مقطع ماکروسکوپی $0/33\ cm^{-1}$ و چشمه نوترونی با قدرت واحد که به طور همگن در آن پخش شده است، می باشد. شرط مرزی در اطراف این صفحه، خلا با طول برونیابی صفر در نظر گرفته شده است. حداکثر خطا در محاسبه توزیع شار تک گروهی این صفحه با استفاده از روش نودال تحلیلی و کد CITATION در طول مش های مختلف در جدول ۳ آورده شده است.

نتیجه کد CITATION با طول مش ۰/۰۲۵ سانتیمتر به عنوان مقدار مرجع در نظر گرفته شده است.

جدول ۳- مقایسه حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع شار تک گروهی

CITATION	Flat App.	Quadratic App.	طول مش ($h_x \times h_y$)	تعداد مش($N_x \times N_y$)	ابعاد صفحه($L_x \times L_y$)
۰/۲۳۴۷۰	۰/۰۴۵۴۳	۰/۰۰۷۵۷۱	۰/۰۵×۰/۰۵	۶۰×۶۰	۳/۰۰×۳/۰۰
۰/۹۵۴۰۰	۰/۱۹۶۸۰	۰/۰۱۵۱۴۰	۰/۱۰×۰/۱۰	۳۰×۳۰	
۳/۸۰۰۱۰	۰/۸۱۷۷۰	۰/۰۴۵۴۳۰	۰/۲۰×۰/۲۰	۱۵×۱۵	
۲۲/۰۶۲۰	۴/۸۹۱۰۰	۰/۷۷۲۲۰۰	۰/۵۰×۰/۵۰	۶×۶	
۷۴/۱۰۳۰	۱۷/۱۰۳۰	۵/۱۳۳۰۰۰	۱/۰۰×۱/۰۰	۳×۳	

۶- بحث و نتیجه گیری:

در مسئله اول به علت یک بعدی بودن محیط هیچ تقریبی از فرار عرضی در حل معادله وارد نمی شود، بنابراین می توان نتیجه گرفت که روش نودال تحلیلی در یک بعد منجر به رسیدن به پاسخ دقیق می شود. نتایج مسئله دوم دو نکته مهم را بیان می کند. اولاً، روش نودال تحلیلی از روش اختلاف محدود بسیار دقیق تر است؛ و ثانیاً، تقریب درجه ۲ فرار عرضی از تقریب تخت بهتر می باشد. این برتری ناشی از این نکته است که در تقریب فرار عرضی، نودهای مجاور هر نود در پیدا کردن ضرایب جمله فرار دخیل هستند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که روش نودال (به ویژه تحلیلی) ما را قادر می سازد تا تعداد مجهولات مسئله را تا حد امکان کاهش داده (متعاقبا زمان اجرای برنامه کاهش می یابد) و در عین حال دقت مورد نظر در بدست آوردن پاسخ نهایی حفظ شود.

۷- مراجع

1. Smith, K.S., "*An Analytic Nodal Method for Solving the Two Group Multidimensional Static and Transient Neutron Diffusion Equations,*" PhD Thesis, MIT, 1976.
2. Chao, Y.A., "*A Theoretical Analysis of the Coarse Mesh Finite Difference Representation in Advanced Nodal Methods,*" Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis, in Nuclear Applications, vol. 1, Madrid, pp. 117, 1999.
3. Herranz, N.G., "*Analytic Coarse-Mesh Finite-Difference Method Generalized for Heterogeneous Multidimensional Two Group Diffusion Calculations,*" Nucl. Sci. Eng., 144, 23, 2003.
4. Aragones, J.M. Ahnert, C. and Herranz, N.G., "*The Analytic Coarse Mesh Finite Difference Method for Multi group and Multidimensional Diffusion Calculations,*"Nucl. Sci. Eng., 157, 1, 2007.