



۳ و ۴ اسفند ماه ۱۳۹۰  
پژوهشکده کاربرد پرتوها (یزد)



Nuclear Society of Iran  
18<sup>th</sup> Iranian's Nuclear Conference  
22-23 February, 2012

Nuclear Science and Technology Research Institute  
Radiation Applications Research School

18<sup>th</sup> Iranian's Nuclear Conference

## نقش ترم جریان موجود در معادله ترابرد و مقدار پراکندگی بر دقت محاسبات در روش $S_N$

بهرامی، مونا\* - مینوچهر، عبدالحمید - خوش احوال، فرخ

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده مهندسی هسته ای، گروه راکتور

چکیده:

روش  $S_N$  یکی از قویترین و قدرتمندترین روش های حل عددی معادله ی ترابرد می باشد. گرچه این روش در بعضی مسائل دارای ضعف هایی است اما با تنظیم درست متغیر های مورد استفاده، تا حد امکان می توان دقت را افزایش داد. ضعف این روش در مختصات یک بعد را می توان کاهش دقت در مسائل دارای جاذب قوی نام برد. در این مقاله سعی شده اثر جاذب قوی، ترم جریان و پراکندگی بر دقت نشان داده شود. بدین منظور نرم افزاری جهت حل معادله ترابرد یک بعدی تهیه و جهت ارزیابی صحت برنامه نوشته شده، با مقادیر تحلیلی و کد ANISN مقایسه شد.

**کلید واژه:** معادله ی ترابرد، روش  $S_N$ ، جاذب قوی، ترم جریان

مقدمه:

یکی از روش های حل معادله ترابرد که سالهاست مورد استفاده قرار می گیرد، روش جهت های گسسته و یا همان  $S_N$  می باشد. گرچه روش  $S_N$  یک روش قدرتمند و بسیار مناسب و سریع برای حل معادله ترابرد می باشد. اما همانطور که می دانیم وابسته به نوع مسئله، قوت و قدرت آن تغییر خواهد کرد. در مسائلی که میزان پراکندگی اندک است میزان دقت کاهش خواهد یافت، در مقابل در مختصات کروی به علت القای یک پراکندگی مجازی حاصل از ترم نشت، دقت افزایش خواهد یافت.



۳ و ۴ اسفند ماه ۱۳۹۰  
پژوهشکده کاربرد پرتوها (یزد)



Nuclear Society of Iran  
18<sup>th</sup> Iranian's Nuclear Conference  
22-23 February, 2012

Nuclear Science and Technology Research Institute  
Radiation Applications Research School

## 18<sup>th</sup> Iranian's Nuclear Conference

روش و معادلات اساسی بکار رفته :

با گسسته کردن معادله ی ترابرد توسط جداسازی روی جهات به رابطه (۱) می رسیم.

$$\Omega \cdot \nabla \psi(x, \Omega) + \sigma(x)\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^L (2l+1)P_l(\mu)\sigma_l(x)\phi_l(x) + s(x, \mu) \quad (1)$$

ترم جریان برای مختصات تیغه و کره به ترتیب با رابطه (۲) و (۳) نشان داده شده است.

$$\Omega \cdot \nabla \psi = \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\Omega \cdot \nabla \psi = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial (r^2 \psi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [(1-\mu^2)\psi]}{\partial \mu} \quad (3)$$

در هندسه تیغه یا در مختصات کارتزین، جهت حرکت نوترون یک مقدار ویژه است به این معنی که در طول محاسبات در یک بعد و پیشروی روی مکان، زاویه تغییر نخواهد کرد. اما در هندسه ی کره با حرکت نوترون در جهت  $\Omega$  و پیشروی روی مکان، زاویه تغییر خواهد کرد، بنابراین انتظار داریم که در ترم نشت هندسه تیغه اثری از زاویه نباشد و متقابلاً انتظار وجود زاویه را در ترم نشت کره داریم.

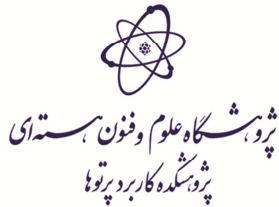
ترم چشمه برای گروه انرژی  $g$  در زیر آورده شده است.

$$s_g(x, \mu) = \sum_{l=0}^L (2l+1)P_l(\mu) \sum_{g' \neq g} \sigma_{lg'}(x)\phi_{lg'}(x) + \bar{s}_g(x, \mu) \quad (4)$$

ترم  $\bar{s}_g(x, \mu)$  مربوط به شکافت و چشمه خارجی است. در ضمن همانطور که می دانیم:

$$\phi_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(x)\psi(x, \mu) \quad (5)$$

برای حل معادله ی ترابرد ، روی مکان و زاویه انتگرال گیری انجام می دهیم. با انتگرال گیری روی مکان ، رابطه به شکل تفاضل محدود در می آید. برای انتگرال گیری روی جهت ها، از روش انتگرال گیری در فواصل



۳ و ۴ اسفند ماه ۱۳۹۰  
پژوهشکده کاربرد پرتوها (یزد)



Nuclear Society of Iran  
18<sup>th</sup> Iranian's Nuclear Conference  
22-23 February, 2012

Nuclear Science and Technology Research Institute  
Radiation Applications Research School

## 18<sup>th</sup> Iranian's Nuclear Conference

نامساوی (توسط سیستم های تربیعی) استفاده می کنیم. به این صورت که برای  $N$  نقطه، یک تابع درجه ی  $N-1$  عبور می دهیم. نتیجه ی این عمل پاسخ هایی با دقت  $2N-1$  خواهد بود. با استفاده از  $N$  نقطه (جهت ها) و وزن که نقاط و وزن های تربیعی نامیده شده اند (ریشه ها و وزن های تابع متعامد) قادر هستیم مقدار انتگرال را به روش زیر بدست آوریم.

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w_n \psi(x, \mu_n) \quad (6)$$

با اعمال انتگرال گیری های ذکر شده به روابط (۷) و (۸) به ترتیب برای تیغه و کره می رسم. در معادلات زیر به جای  $\psi(x, \mu_n)$  عبارت معادل آن  $\psi_n(x)$  نوشته شده است [۳۰].

$$\mu_n \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(x) + \sigma(x) \psi_n(x) = \sum_{l=0}^L (2l+1) P_l(\mu_n) \sigma_l(x) \phi_l(x) + s(x, \mu_n) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \psi(\rho, \mu_n) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \psi(\rho, \mu) \Big|_{\mu_n} + \sigma(\rho) \psi(\rho, \mu_n) \\ = \sum_{l=0}^L (2l+1) P_l(\mu_n) \sigma_l(x) \phi_l(x) + s(x, \mu_n) \end{aligned} \quad (8)$$

همانطور که می دانیم در انتگرال گیری به روش فواصل نامساوی، با استفاده از سیستم تربیعی به دقت بالا و مناسبی خواهیم رسید. و برای چند جمله ای هایی با درجه ی  $N$  یا کمتر جواب دقیق خواهد داد. پس مسئله مهم در دقت انتگرال گیری به این روش را می توان در دو مورد خلاصه کرد.

- تعداد جهت ها ( $N$ )
- درجه و شکل تابعی که روی آن انتگرال گیری انجام می شود

نتایج:

در مسائلی که می‌خواهیم به روش  $S_N$  حل کنیم این مورد که مقادیر شار زاویه ای در هر مش دارای شکلی ساده (نزدیک به شکل یک چند جمله ای با درجه های پایین) سبب افزایش دقت در مسائل می‌شود. واضح است که در مسائلی که مقدار پراکندگی بالاست فلاکس زاویه ای دارای شکلی ساده و مشخص (تایعی با درجه ی پایین تر) و زمانی که پراکندگی بالاست، شکل فلاکس زاویه ای در هر مش دارای شکلی پیچیده تر (تابعی با درجه ی بالاتر) و ممکن است همراه با چند نوسان باشد، که این خود سبب کاهش دقت در مسئله می‌شود. بنابراین انتظار داریم با افزایش میزان پراکندگی مثل افزایش ضخامت در یک محیط دارای سطح مقطع پراکندگی غیر صفر ( $\Sigma_s \neq 0$ ) دقت افزایش پیدا کند. در هندسه ی کروی از آنجایی که ترم جریان دارای یک ترم اضافی دارای جهت نسبت به تیغه است، حتی در جاذب قوی نیز حرکت روی شعاع در یک جهت خاص، مثل تغییر جهت نوترون است که این خود مانند یک پراکندگی مجازی در سیستم کروی عمل کرده و سبب یک شکل ساده و غیر پیچیده در شار زاویه ای در هر مش شده و دقت انتگرال گیری روی زاویه را بالا می‌برد. اما در تیغه از آنجا که این پراکندگی مجازی وجود ندارد شکل شار زاویه ای می‌تواند دارای شکستگی و قله باشد که سبب پیچیده شدن شکل شار (تابع) مورد نظر می‌شود.

برای اعتبار سنجی برنامه نوشته شده چندین مساله مورد بررسی قرار گرفت و خوشبختانه نتایج حاکی از صحت برنامه نوشته شده بود. در این مقاله جهت خلاصه سازی تنها دو مساله نمونه مورد بررسی قرار گرفت. در مسئله اول؛ بحرانیت در یک تیغه و کره برهنه یک بعدی (محاسبه C بحرانی) مورد بررسی قرار گرفت.

رابطه زیر بیانگر معادله ی ترابرد ساده شده در یک گروه و یک بعد در هندسه تیغه است.  $x$  متغیر مکانی است که بر اساس مسافت آزاد متوسط بیان شده است.

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad \text{و} \quad c = \frac{\Sigma_s + (v\Sigma_f/k_{eff})}{\Sigma_t} \quad (9)$$

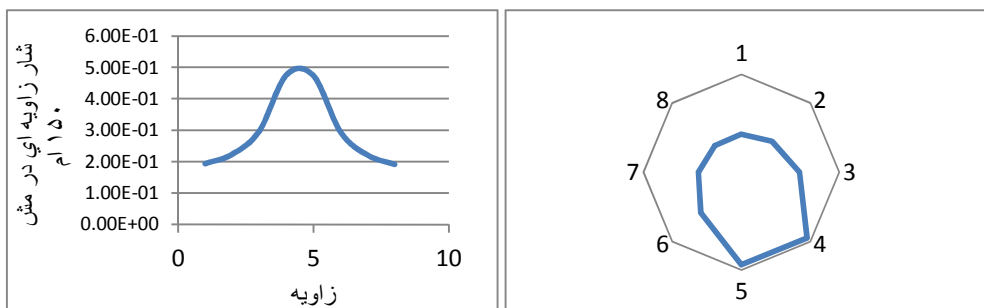
برای شبیه سازی این مسئله، یک تیغه و کره برهنه را با ضخامت های متفاوت و سطوح مقاطع گفته شده، راه اندازی می‌کنیم. توسط  $k_{eff}$  محاسبه شده در برنامه، مقدار  $c$  را می‌توانیم محاسبه می‌کنیم و با مقادیر تحلیلی [۲] مقایسه کنیم. در جدول (۱) نتایج حاصل از برنامه با تقریب  $S_8$  و ۳۰۰ مش، با ضخامت های متفاوت و نیز خطای

حاصل در قیاس با نتیجه تحلیلی آورده شده است. ملاحظه می شود، با افزایش ضخامت، دقت در هر دو هندسه افزایش یافته است. نتیجه دیگر این است که، دقت در هندسه کروی بیشتر از تیغه است.

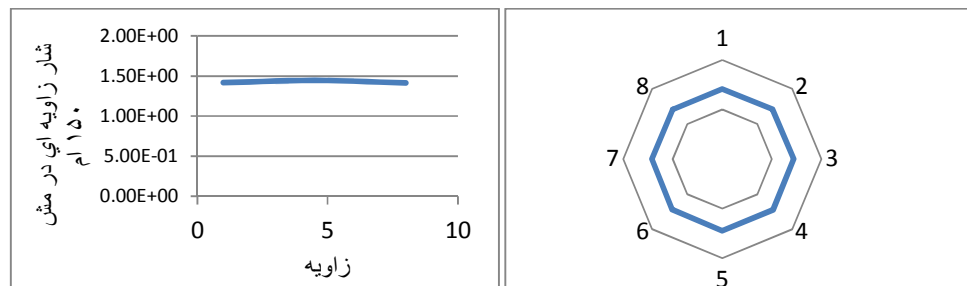
جدول (۱): نتایج حاصل از برنامه با تقریب  $S_8$  و خطای حاصل در قیاس با نتیجه تحلیلی آورده شده است.

| ضخامت | تیغه         |               |                 | کره          |               |                 |
|-------|--------------|---------------|-----------------|--------------|---------------|-----------------|
|       | مقدار c حاصل | جواب تحلیلی c | میزان خطای مطلق | مقدار c حاصل | جواب تحلیلی c | میزان خطای مطلق |
| 1     | 1.626870     | 1.615379      | 0.007114        | 1.982404     | 1.988387      | 0.003009        |
| 20    | 1.007141     | 1.001915      | 0.005216        | 1.007626     | 1.007628      | 0.000002        |

در شکل (۱) و (۲) فلاکس زاویه ای در ۲ گره یکسان (گره مرکزی) در دو مختصات کارتیزین و قطبی برای مسئله تیغه بحرانی یا ضخامت کم 1cm و 20cm نشان داده شده است. با افزایش ضخامت شکل شار تمایل بیشتری به شکل خط افقی پیدا می کند. در مختصات کروی با افزایش ضخامت، شکل شار متمایل به شکل خط شیب دار خواهد شد. (از آوردن نمودارهای هندسه کروی خودداری شده است).



شکل (۱): فلاکس زاویه ای در گره واقع در وسط تیغه به ضخامت 1 Cm در مساله اول



شکل (۲): فلاکس زاویه ای در گره واقع در وسط تیغه به ضخامت 20 Cm در مساله اول

در مسئله دوم چشمه سطحی روی کره جذب کننده خالص مورد بررسی قرار گرفت. در این مساله کره ای به شعاع 2Cm را در نظر می گیریم که یک چشمه سطحی یکنواخت به قدرت  $1 \text{ n/cm}^3$  روی سطح بیرونی آن بطور یکنواخت توزیع شده است. اگر چه محیط جاذب سبب کاهش دقت مسئله خواهد شد، اما ترم جریان سبب افزایش دقت شده است و نتایج حاصل بهتر از روش Pn هستند ( روش Pn به میزان پراکندگی حساس نیست) [۴].

جدول (۳) نتایج حاصل از برنامه با تقریب  $S_4$  و  $S_8$  و با شعاع های متفاوت

| شعاع | $S_4$  | $S_8$  | $P_5$ | $P_7$  | مقادیر تحلیلی |
|------|--------|--------|-------|--------|---------------|
| 0    | 0.1355 | 0.1356 | 0.140 | 0.1305 | 0.1353        |
| 0.5  | 0.1471 | 0.1479 | 0.151 | 0.145  | 0.1471        |
| 1    | 0.1885 | 0.1886 | 0.188 | 0.189  | 0.1882        |
| 2    | 0.6173 | 0.6214 | 0.598 | 0.606  | 0.6227        |

بحث و نتیجه گیری :

همانطور که انتظار داشتیم میزان بالای پراکندگی در مسایل، سبب افزایش دقت می شود. هر چه ضخامت در یک محیط تکثیر شونده یا دارای پراکندگی بیشتر شود، دقت بالاتر خواهد رفت. ضمناً مشاهده شد که ترم جریان نیز در میزان دقت بسیار موثر است، بطور خاص در هندسه کروی که ترم جریان دارای ترم زاویه ای است، دقت به میزان بیشتری افزایش پیدا می کند .

مراجع :

[1] E.E.Lewis and j. W.F.Miller, "Computational Methods of Neutron Transport," ed. canada: John Wiley & Sons Inc, 1984.

[۲] S.Naz and S.K.Loyalka, "One-speed criticality problems for a bare slab and sphere " *annals of NUCLEAR ENERGY*, 2007.

[۳] R. J. J. STAMMLER and M. J. ABBATE, "Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design," ed. NEW YORK: ACADEMIC PRESS INC., 1983.

[۴] ر. عباسی " حل معادله ی یک بعدی و چند گروهی ترابرد نوترون با استفاده از روش اجزاء محدود و هارمونیک های کروی "، فوق لیسانس، مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.