

حل دقیق مدل $X(5)$ برای هسته ها در انرژیهای تحریک پایین

سیده زهره آقامیری

سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته ای

چکیده

مدل جمعی بوهر یکی از مدل‌های هسته ای است که تغییر شکل هسته و گذارهای تغییر شکل فازهای هسته را بخوبی توصیف می‌کند، این مدل تغییر شکلهای چهار قطبی و هشت قطبی هسته ها را با دقت بالایی توجیه می‌کند. گذار فاز از حالت‌های حدی $SU(3) \rightarrow U(5)$ در هسته ها منطقه‌ی مناسبی از انرژیهای تحریک پایین را برای هسته ها فراهم می‌آورد، مدل توصیف کننده گذار هسته در این منطقه $X(5)$ میباشد. هامیلتونین هسته را با استفاده از تقریب آدیاباتیک و به روش بورن-اوپنهایمر حل می‌کنیم. تقریب اعمال شده در حل هامیلتونین در [۱،۲] جایگزینی $\frac{1}{\beta^3} \rightarrow \frac{1}{\langle \beta^3 \rangle}$ میباشد، در این مقاله دقت این تقریب را با در نظر گرفتن تقریب $\langle \frac{1}{\beta^3} \rangle \rightarrow \frac{1}{\beta^3}$ تا حدود زیادی افزایش داده ایم.

کلید واژه: مدل جمعی، تقارنهای دینامیکی، نقطه بحرانی، هامیلتونین بوهر و مدل $X(5)$.

مقدمه

در تغییر شکلهای چهار قطبی، با وجود حالت‌های حدی و تقارنهای دینامیکی $SU(3)$ و $SO(6)$ و $U(5)$ سیستمی که هامیلتونین هسته را در آن بررسی می‌شود سیستمی پنج بعدی، غیر متعامد و متصل به هسته می‌باشد. متغیر دینامیکی β در هامیلتونین بوهر اسکیل هسته، متغیر دینامیکی γ میزان انحراف هسته از تقارن محوری و θ زاویای اوپلر را نشان می‌دهند، R_i مولفه‌ی i ام اندازه حرکت زاویه ای در راستای محور i ام متصل به هسته می‌باشد و K تصویر اندازه حرکت زاویه ای روی محور z ها در سیستم متصل به هسته و M تصویر اندازه حرکت زاویه ای روی محور z ها در سیستم آزمایشگاهی است.

روش کار

بسته به نوع تابع پتانسیل وابسته به متغیرهای دینامیکی β و γ حل هامیلتونین هسته در این منطقه از گذار فاز می‌تواند دقیق و یا تقریبی باشد. در مدل $X(5)$ تابع پتانسیل ایجاب می‌کند که حل هامیلتونین هسته تقریبی باشد و معادله دیفرانسیل γ با متغیر دینامیکی β توأم شود [۳]. پتانسیلی که در مدل $X(5)$ در هامیلتونین هسته قرار می‌گیرد به شکل کلی $u(\beta, \gamma) = u_1(\beta) + u_2(\gamma)$ می‌باشد، هامیلتونین بوهر برای هسته به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \frac{R_i^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{\gamma \pi i}{3} \right)} \right] \right\} + V(\beta, \gamma) \quad (1)$$

پارامترهای جدید انرژی و پتانسیل کاهش یافته را به ترتیب به شکل زیر در هامیلتونین وارد می‌کنیم.

$$\frac{\gamma B}{\hbar^2} E = \epsilon = \epsilon_\beta + \epsilon_\gamma \quad , \quad \frac{\gamma B}{\hbar^2} V(\beta, \gamma) = u(\beta, \gamma) \quad (2)$$

تابع پتانسیل β چاه بینهایت و تابع پتانسیل γ نوسانگر هماهنگ است که در $\gamma \approx 0$ دارای می نیمم و نوسانات کوچک است.

$$u(\beta, \gamma) = u_\beta(\beta) + u_\gamma(\gamma) \quad , \quad \begin{cases} u_\beta(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta \leq \beta_w \\ \infty & \beta > \beta_w \end{cases} \\ u_\gamma(\gamma) = \frac{1}{2} c \gamma^2 \end{cases} \quad (3)$$

هامیلتونین را به روش جداسازی متغیرها در سه مرحله حل می کنیم، ابتدا معادله‌ی زوایای اوپلر را حل میکنیم که در آن $D_{MK}^L(\theta_i)$ ها توابع ویگنر می باشند.

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \xi(\beta) \eta(\beta, \gamma) D_{MK}^L(\theta_i) \quad (4)$$

الف) معادله زوایای اوپلر

$$\frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{R_i^\gamma}{\sin^\gamma(\gamma - \frac{\gamma \pi i}{\gamma})} \Big|_{\gamma \approx} = \frac{1}{\gamma} R^\gamma + \frac{R_Z^\gamma}{\xi} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\xi}{\gamma} \right) \quad (5)$$

$$\left[\frac{1}{\gamma} R^\gamma + \frac{R_Z^\gamma}{\xi} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\xi}{\gamma} \right) \right] D_{MK}^L(\theta_i) = \left[\frac{1}{\gamma} L(L+1) + \frac{K^\gamma}{\xi} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\xi}{\gamma} \right) \right] D_{MK}^L(\theta_i) \quad (6)$$

بعد از حل معادله‌ی زوایای اوپلر هر یک از معادلات β و γ را با اعمال تقریب آدیاباتیک، به شکل مستقل حل می کنیم.

ب) معادله γ

$$\left\{ \frac{1}{\beta^\gamma} \left[\frac{1}{\sin^\gamma \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^\gamma \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \left(\frac{1}{\gamma} L(L+1) + \frac{K^\gamma}{\xi} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\xi}{\gamma} \right) \right) \right] - \frac{1}{2} c \gamma^2 \right\} \eta \Big|_{\gamma \approx} = -\epsilon_\gamma \eta \quad (7)$$

$$\frac{1}{\beta^\gamma} = a \quad , \quad \epsilon_\gamma - \frac{a}{\gamma} (L(L+1) - K^\gamma) = a\lambda \quad (8)$$

با معرفی پارامترهای جدید به شکل فوق معادله‌ی نوسانگر دو بعدی γ را به شکل زیر حل می کنیم.

$$\left[\frac{d^\gamma}{d\gamma^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} - \frac{K^\gamma}{\xi} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{c}{2a} \gamma^2 + \lambda \right] \eta(x) = 0 \quad (9)$$

برای ساده تر کردن معادله (9) تغییر متغیر $\sqrt{\frac{c}{2a}} \gamma = x$ را انجام می دهیم.

$$\left[\frac{d^\gamma}{dx^\gamma} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{K^\gamma}{\xi x^\gamma} - x^\gamma + \sqrt{\frac{\gamma a}{c}} \lambda \right] \eta(x) = 0 \quad (10)$$

معادله (۱۰) را ابتدا برای حالت‌های مجانبی حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & \eta_1 \cong x^{\frac{|k|}{\gamma}} \\ x \rightarrow \infty & \eta_2 \cong e^{-\frac{x^\gamma}{\gamma}} \end{cases} \rightarrow \eta(x) = f(x) x^{\frac{|k|}{\gamma}} e^{-\frac{x^\gamma}{\gamma}} \quad (11)$$

تابع بدست آمده را در رابطه (۱۰) قرار می‌دهیم و معادله جدید را برحسب تابع جدید $f(x)$ می‌نویسیم.

$$\left[\frac{d^\gamma}{dx^\gamma} + \left(\frac{K+1}{x} - \gamma x \right) \frac{d}{dx} - \left(K + \gamma - \sqrt{\frac{\gamma a}{c}} \lambda \right) \right] f(x) = 0 \quad (12)$$

معادله دیفرانسیل (۱۲) را با معرفی تابع $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ به روش بسط سری حل می‌کنیم، طیف انرژی را با استفاده از رابطه بازگشتی به شکل زیر بدست می‌آوریم.

$$a_{m+\gamma} = \frac{\gamma m + K + \gamma - \sqrt{\frac{\gamma a}{c}} \lambda}{(m+\gamma)(m+K+\gamma)} a_m, \quad \lambda = \sqrt{\frac{c}{\gamma a}} (\gamma m + K + \gamma) \quad (13)$$

با اعمال تغییر پارامتر $m \rightarrow n$ و تغییر متغیر $y = x^\gamma$ معادله دیفرانسیل (۱۲) به معادله دیفرانسیل لاگر تبدیل می‌شود که از آن ویژه مقادیر معادله γ را برحسب اعداد کوانتومی و ثابت a بدست می‌آوریم.

$$\left[\frac{d^\gamma}{dy^\gamma} + \left(\frac{|K|}{y} + 1 - 1 \right) \frac{d}{dy} + \frac{n}{y} \right] f_n(y) = 0 \quad (14)$$

$$f_n(y) = C' L_n^{\frac{|K|}{\gamma}} \left(\sqrt{\frac{c}{\gamma a}} y^\gamma \right) \quad (15)$$

ویژه توابع متغیر دینامیکی γ به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} \epsilon_\gamma = \sqrt{\frac{ca}{\gamma}} (\xi n + K + \gamma) + \frac{a}{\gamma} (L(L+1) - K^\gamma) \\ \eta(\gamma) = C L_n^{\frac{|K|}{\gamma}} \left(\sqrt{\frac{c}{\gamma a}} y^\gamma \right) y^{\frac{|k|}{\gamma}} e^{-\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{c}{\gamma a}} y^\gamma} \end{cases} \quad (16)$$

بعد از حل معادله γ ، معادله متغیر دینامیکی β را به شکل زیر حل می‌کنیم.

ج) معادله β

$$\left(\frac{d^\gamma}{d\beta^\gamma} + \frac{\xi}{\beta} \frac{d}{d\beta} + \epsilon_\beta \right) \xi(\beta) = 0 \quad (17)$$

با اعمال تغییر پارامتر $\epsilon_\beta = k^\gamma$ و تغییر متغیر $x = k\beta$ معادله دیفرانسیل (۱۷) به معادله دیفرانسیل بسط تبدیل می شود و با اعمال شرط مرزی، ویژه مقادیر و ویژه توابع متغیر β را به شکل زیر بدست می آوریم.

$$\epsilon_\beta = \left(\frac{x_{s,\gamma}}{\beta_w}\right)^\gamma, \quad \xi(\beta) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\beta_w J_\gamma^\gamma(x_{s,\gamma})} \beta^{-\gamma} J_\gamma^\gamma(x) \quad (18)$$

s امین ریشه تابع بسط است که به ازای آن ویژه مقدار s ام معادله β بدست می آید و ویژه مقادیر کل کاهش یافته را برای ترازهای هسته با استفاده از رابطه (۱۶) و (۱۸) به شکل رابطه (۱۹) بدست می آوریم.

$$\epsilon_{s,L,n,K} = \left(\frac{x_{s,\gamma}}{\beta_w}\right)^\gamma + \sqrt{\frac{ca}{\gamma}} (\xi n + K + \gamma) + \frac{a}{\gamma} (L(L+1) - K^2) \quad (19)$$

با استفاده از المان حجم در فضای پنج بعدی بوهر $\left(dv = d\beta \beta^\gamma d\gamma \sin^2 \gamma \frac{d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3 d\theta_4}{d\Omega}\right)$ برای محاسبه تراز $s-1$ ام هسته، حد بالای انتگرالهای زیر را s امین صفر تابع بسط قرار می دهیم و a_1 را برای تقریب [۱،۲] محاسبه می کنیم و (ب) کار انجام شده در این مقاله می باشد.

$$a_1 = \frac{1}{\langle \beta^\gamma \rangle} \quad \text{(الف)}$$

$$\langle \beta^\gamma \rangle = \int_0^{\beta_w} d\beta \beta^\gamma \xi(\beta) \beta^\gamma \xi^*(\beta) = |c|^\gamma \int_0^{\beta_w} d\beta \beta^\gamma J_\gamma^\gamma(k\beta) \quad (20)$$

$$= \frac{\beta_w^\gamma}{x_{1,\gamma}^\gamma J_\gamma^\gamma(x_{1,\gamma})} \int_0^{x_{1,\gamma}} dx x^\gamma J_\gamma^\gamma(x) \rightarrow a_1 = \frac{0.2339}{\beta_w^\gamma} \quad (21)$$

$$a_2 = \langle \frac{1}{\beta^\gamma} \rangle \quad \text{(ب)}$$

$$\langle \frac{1}{\beta^\gamma} \rangle = \int_0^{\beta_w} d\beta \beta^\gamma \xi(\beta) \frac{1}{\beta^\gamma} \xi^*(\beta) = |c|^\gamma \int_0^{\beta_w} d\beta \frac{1}{\beta} J_\gamma^\gamma(k\beta) \quad (22)$$

$$= \frac{\gamma}{\beta_w^\gamma J_\gamma^\gamma(x_{1,\gamma})} \int_0^{x_{1,\gamma}} dx \frac{1}{x} J_\gamma^\gamma(x) \rightarrow a_2 = \frac{3.897}{\beta_w^\gamma} \quad (23)$$

ترازهای پایه برای تقریب اول و دوم به ترتیب $\epsilon_{0,1}$ و $\epsilon_{0,2}$ می باشند و در حالت کلی آنها را به ازای β_w های غیر مشخص رسم می کنیم و ملاحظه می شود که ترازهای انرژی با تغییرات عرض چاه پتانسیل و ضریب سختی هسته تغییر می کنند. این تغییرات را برای تعداد محدودی از پارامترهای ذکر شده رسم می کنیم.

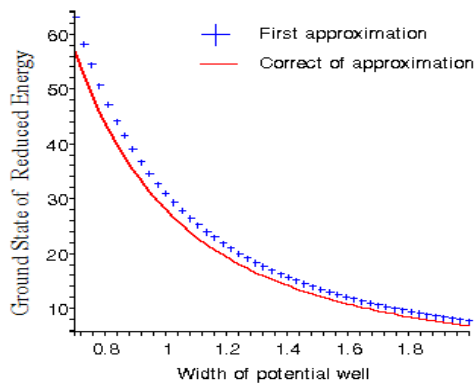
نتایج

با استفاده از اصل وردش نشان می دهیم که دقت حل هامیلتونین با بکار بردن تقریب دوم افزایش یافته است. برای این منظور انرژی تراز پایه را از رابطه (۱۹) به ازای اعداد کوانتومی ($S=1$ و $n=0$, $L=2$, $K=0$) برای تقریب الف و ب بدست می آوریم و پایین تر قرار گرفتن انرژی تراز پایه تقریب دوم را تحقیق می کنیم.

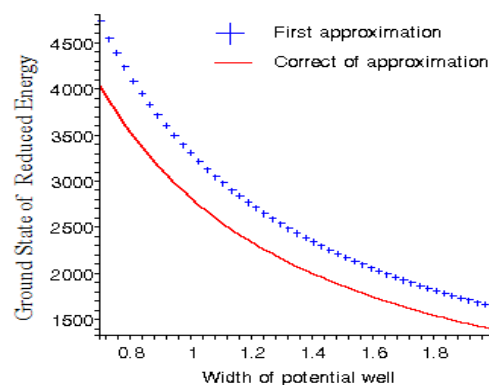
$$\xrightarrow{a=a_1} \epsilon_{\cdot,1} = \left(\frac{x_{1,\beta}}{\beta_w}\right)^2 + \sqrt{2ca_1} + 2a_1 = \frac{30.869}{\beta_w^2} + \frac{3.268}{\beta_w} \sqrt{c} \quad (24)$$

$$\xrightarrow{a=a_2} \epsilon_{\cdot,2} = \left(\frac{x_{1,\beta}}{\beta_w}\right)^2 + \sqrt{2ca_2} + 2a_2 = \frac{27.985}{\beta_w^2} + \frac{2.792}{\beta_w} \sqrt{c} \quad (25)$$

تغییرات β برای عرض چاه پتانسیل اگر به شکل $\beta_w > 0$ باشد تغییر شکل *Prolate* هسته و اگر $\beta_w < 0$ باشد، تغییر شکل *Oblate* هسته را نشان می دهد.

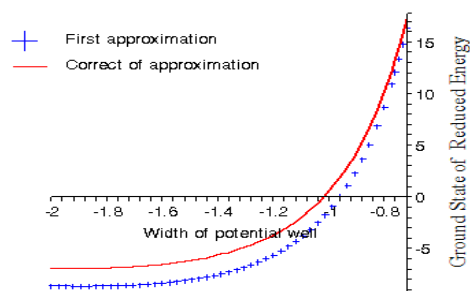


شکل (۲)

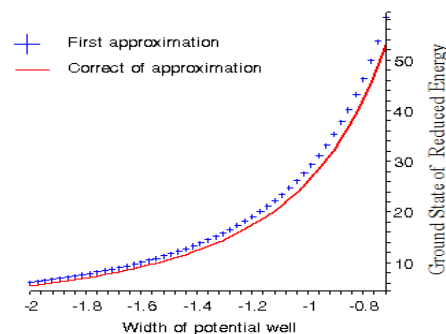


شکل (۱)

شکل (۱) و (۲) تغییرات انرژی تراز پایه *Prolate* هسته بر حسب عرض چاه پتانسیل با ضریب سختی پتانسیل به ترتیب $c_1=c_2=10^6$ و $c_1=c_2=10^8$ برای دو تقریب را نشان می دهند.

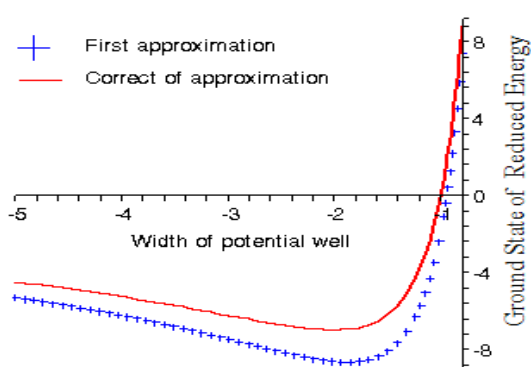


شکل (۴)

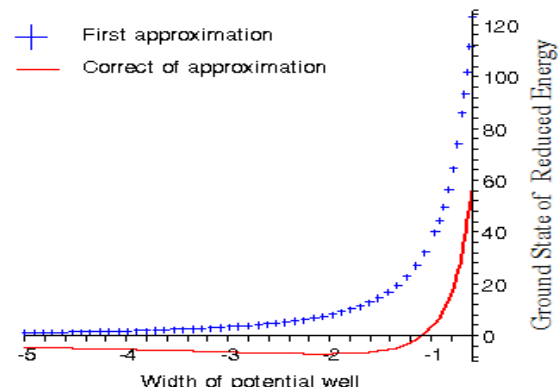


شکل (۳)

شکل (۳) و (۴) تغییرات انرژی تراز پایه *Oblate* هسته بر حسب عرض چاه پتانسیل با ضریب سختی پتانسیل به ترتیب $c_1=c_2=1$ و $c_1=c_2=10^2$ برای دو تقریب را نشان می دهند.



شکل (۶)



شکل (۵)

شکل (۵) و (۶) تغییرات انرژی تراز پایه *Oblate* هسته برحسب عرض چاه پتانسیل با ضریب سختی پتانسیل را به ترتیب $c_1=1$ و $c_2=10^2$ و $c_1=c_2=10^2$ برای دو تقریب را نشان می دهند.

بحث و نتیجه گیری

- ۱- در منطقه تغییر شکل *Prolate* هسته با افزایش ضریب سختی پتانسیل ترازهای انرژی پایه بیشتر از هم فاصله می گیرند و تقریب دوم جوابهای دقیق تری نسبت به تقریب اول می دهد و با کاهش ضریب سختی پتانسیل ترازهای پایه بهم نزدیکتر می شوند و با کاهش هر چه بیشتر آن، دو تقریب بیشتر به هم نزدیک می شوند.
- ۲- در منطقه تغییر شکل *Oblate* هسته با افزایش ضریب سختی پتانسیل تقریب اول جوابهای دقیق تری نسبت به تقریب اول می دهد و با کاهش ضریب سختی پتانسیل دقت تقریب اول بیشتر میشود و جوابهای بهتری می دهد.
- ۳- با افزایش ضریب سختی پتانسیل در منطقه تغییر شکل *Oblate* سطح تراز پایه در تقریب دوم نسبت به تقریب اول کاهش می یابد و با افزایش همزمان ضریب سختی و عرض چاه پتانسیل سطح تراز پایه در تقریب اول نسبت به تقریب دوم کاهش می یابد.

مراجع

- [۱] C.David Sherrill, *The Born-Oppenheimer Approximaton, School of Chemistry and Biochemistry, Georgia Institute of Thechnology*, (۲۰۰۵).
- [۲] F.Iachello, *Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition, physical Review Letters, Volume ۸۷, number ۵, ۰۵۲۵۰۲-۱ ۰۵۲۵۰۲-۴*, (۲۰۰۱).
- [۳] Dennis.Bonatsos, D.Lenis, D.petrellis, P.A.Terziev, *Z(۵):Critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition, physics Letters B, ۵۸۸, ۱۷۲-۱۷۹*, (۲۰۰۴).