



تعیین شار مغناطیسی در توکامک دماوند با استفاده از روش رشته جریان به منظور نمایش

مرز پلاسما

رسول قدیری^{*(۱)} - یحیی صادقی^(۲) - محمدحسین استکی^(۳)

^۱دانشگاه اصفهان، دانشکده علوم و فناوریهای نوین، گروه مهندسی هسته ای
^۲سازمان انرژی اتمی ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته ای

چکیده

تعیین مرز پلاسما که با محاسبه شار مغناطیسی صورت می‌پذیرد یکی از مهمترین مراحل تشخیص پلاسما در فرآیند کنترل مغناطیسی توکامک است. روش رشته جریان به دلیل توانمندی در محاسبه شار مغناطیسی با استفاده از محاسبه ممان‌های جریان راهکار مناسبی است. در همین راستا با به‌کارگیری این روش به محاسبه شار مغناطیسی در توکامک دماوند پرداختیم. مدل ایجاد شده به خوبی توانایی پیش‌بینی مرکز پلاسما و همچنین آخرین سطح بسته مغناطیسی و در نتیجه مرز پلاسما را دارد. در این مدل‌سازی الگوریتم‌ها به شکلی نوشته شده‌اند که زمان محاسبه شار پلاسما با استفاده از یک رایانه معمولی با پردازشگر اینتل (کُر ۲) ۴/۴ گیگا هرتز کمتر از یک میلی‌ثانیه باشد.

کلمات کلیدی: توکامک، روش رشته جریان، مدل ممان جریان، مرز پلاسما، تابع گرین

۱- مقدمه

با استفاده از روش رشته جریان می‌توان به حل معادله گراد-شفرانف در توکامک [۱ و ۲] به صورت غیر مستقیم پرداخت. در این روش، پلاسما و کلیه پیچ‌هایی که در آن‌ها جریان الکتریکی وجود دارد، به صورت رشته‌هایی از جریان در نظر گرفته می‌شوند. با محاسبه شار مغناطیسی حاصل از هریک از این رشته‌ها می‌توان به شار مغناطیسی کل و در نتیجه شکل و موقعیت پلاسما پی برد. در همین راستا مقادیر شار مغناطیسی ناشی از رشته جریان‌ها توسط تابع گرین محاسبه می‌شود. علاوه بر این در بخشی از محاسبات به معکوس این تابع نیز نیاز است که برای محاسبه آن از روش تجزیه مقدار منفرد^۱ (SVD) [۳] استفاده می‌شود. محاسبه ممان‌های جریان [۴ و ۵] آخرین مرحله‌ای است که برای کامل شدن فرآیند مدل‌سازی پلاسما به منظور تعیین مرز پلاسما انجام می‌شود.

۲- روش رشته جریان

^۱ - Singular value Decomposition



با توجه به تقارن چنبره‌ای در توکامک می‌توان به تحلیل دوبعدی مسئله پرداخت. مقادیر شار ناشی از رشته-جریان‌ها در هر نقطه از فضای مکانی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\psi(r, z) = \sum_{j=1}^{N_f} G(r, z, r_j, z_j) I_j(r_j, z_j) \quad (1)$$

در این رابطه r_j و z_j مختصات هندسی رشته‌ها، I_j جریان رشته j ام، N_f تعداد رشته‌ها و G تابع گرین است که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$G = \frac{2\mu_0 \sqrt{rr_j}}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k^2) - E(k^2) \right] \quad (2)$$

در این رابطه $K(k^2)$ و $E(k^2)$ به ترتیب انتگرال‌های کامل بیضوی گون اول و دوم می‌باشند که از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad (3-الف)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (3-ب)$$

در رابطه‌های ۲ و ۳ مقدار k از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$k^2 = \frac{4rr_j}{(r+r_j)^2 + (z-z_j)^2} \quad (4)$$

علاوه بر این‌ها، رابطه‌های مشابهی برای مقادیر میدان مغناطیسی در راستای شعاعی و قطبی نیز وجود دارد. رجوع شود به [۹].

مقادیر جریان مربوط به پیچ‌های القایی (اولیه)، تعادلی و کنترلی قابل اندازه‌گیری هستند بنابراین آنچه که باقی می‌ماند تعیین توزیع جریان پلاسما و جریان‌های القایی در دیواره‌های فولادی توکامک می‌باشد. برای این منظور با اندازه‌گیری مقادیر تجربی میدان و شار مغناطیسی در یک مجموعه از نقاط توسط پیچ‌های میرنف و حلقه‌های ولتاژ [۲] می‌توان توزیع جریان پلاسما را به طریق زیر محاسبه نمود.

مرحله اول ← محاسبه شار ناشی از پیچ‌های القایی (اولیه)، تعادلی و کنترلی در نقاطی که شناساگرهای مغناطیسی (پیچ‌های میرنف و حلقه‌های ولتاژ) قرار گرفته‌اند که با استفاده از رابطه‌ی ۱ صورت می‌پذیرد.

مرحله دوم ← تفریق نقطه به نقطه‌ی مقادیر بدست آمده در گام اول از مقادیر تجربی اندازه‌گیری شده که شکل ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد.

$$\psi_{P+inductive} = \psi_{Measurement} - \psi_{Primary+Equilibrium+control} \quad (5)$$



در اینجا $\psi_{P+inductive}$ سهم شار ناشی از پلاسما و جریان‌های القایی، $\psi_{Measurement}$ مقادیر تجربی شار مغناطیسی و $\psi_{Primary+Equilibrium+control}$ سهم شار ناشی از پیچ‌های حامل جریان است. مرحله سوم ← به عنوان اولین تقریب، از سهم شار ناشی از جریان‌های القایی چشم پوشی می‌کنیم [۶]. محاسبه‌ی جریان پلاسما با استفاده از سهم شار باقی مانده به دو روش متفاوت می‌تواند صورت پذیرد.

• روش اول

با توجه به رابطه‌های ۵ خواهیم داشت:

$$\psi_p = \psi_{Measurement} - \psi_{Primary+Equilibrium+control} = \sum_{j=1}^N G(r, z, r_j, z_j) I_{p_j}(r_j, z_j) \quad (6)$$

در اینجا N تعداد رشته‌های در نظر گرفته شده به عنوان پلاسما و I_{p_j} جریان مربوط به هریک از این رشته‌ها است. با توجه به شکل ماتریسی رابطه ۶، جریان رشته‌های مربوط به پلاسما از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$[\psi_p] = [G][I_p] \Rightarrow [I_p] = [G]^{-1}[\psi_p] \quad (7)$$

• روش دوم

در این روش ابتدا ممان‌های جریان محاسبه خواهد شد. رابطه مربوط به ممان‌های جریان پلاسما [۱ و ۵] که معادله تعادل پلاسما را در دل خود دارد به صورت زیر می‌باشد.

$$M = \int_{\Omega} \chi J_{\phi} ds = \oint_{\partial\Omega} r^{-1} \mu_0^{-1} \left(\xi \frac{\partial \chi}{\partial s} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = \oint_{\partial\Omega} \mu_0^{-1} (\xi B_n + \chi B_s) ds \quad (8)$$

در اینجا M ممان جریان، J_{ϕ} چگالی جریان چنبره‌ای و Ω سطحی است که پلاسما را به طور کامل در بر می‌گیرد. همچنین $\partial\Omega$ منحنی بسته‌ای است که سطح Ω را در بر می‌گیرد. $\partial/\partial s$ و $\partial/\partial n$ به ترتیب مشتق‌های جزئی در راستای عمود و مماس بر سطح $\partial\Omega$ هستند. علاوه بر این χ و ψ به ترتیب حل معادله همگن و غیرهمگن گراد-شفرانف و B_n و B_s به ترتیب میدان‌های مماسی و عمودی بر روی منحنی $\partial\Omega$ می‌باشند. می‌توان نشان داد χ و ψ از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0 = 1, \xi_0 = 0 \\ \chi_1 = z, \xi_1 = -r \log r \\ \chi_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{1}{2} (-4)^{-k} \frac{(n-1)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} r^{2k+2} z^{n-2k-2} \quad \text{for } n \geq 2 \\ \xi_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (-4)^{-k} \frac{(n-1)!}{(k!)^2 (n-2k-1)!} r^{2k+1} z^{n-2k-1} \quad \text{for } n \geq 2 \end{array} \right. \quad (9)$$

در اینجا $[L]$ و $[G]$ به ترتیب مقادیر گرد شده به مقدار صحیح پایینی و بالایی می‌باشند.

با توجه به شکل ماتریسی رابطه ۸، جریان رشته‌های مربوط به پلازما از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$[M_p] = [\chi][I_p] \Rightarrow [I_p] = [\chi]^{-1} [M_p] \quad (10)$$

در اینجا مقادیر χ از رابطه‌ی ۹ و مقادیر M_p با استفاده از پیچ‌های میرنف و با به‌کارگیری رابطه‌ی ۸ به دست می‌آیند. در روابط ۷ و ۱۰ مقادیر $[G]^{-1}$ و $[\chi]^{-1}$ از روش SVD قابل محاسبه می‌باشند.

مرحله چهارم ← محاسبه شار کل و استخراج مرز پلازما بعد از تشخیص آخرین سطح مغناطیسی بسته^۱ که با ناحیه‌ی محدودکننده تماس پیدا می‌کند [۹].

۳- شار مغناطیسی و مرز پلازما در توکامک دماوند

اندازگیری‌های مغناطیسی انجام شده در طی این پژوهش با استفاده از ۱۸ عدد پیچ‌های میرنف و یک عدد پیچ‌های روگوسکی^۲ و دو عدد پیچ‌های زینی شکل صورت گرفته است [۹]. پس از کالیبره کردن پیچ‌ها و با به‌کارگیری ۱۳ عدد از پیچ‌های میرنف به ایجاد دو مدل مختلف از پلازما پرداختیم و با استفاده از ۵ عدد از پیچ‌های میرنف خطای مدل سازی را محاسبه نمودیم.

• مدل تک رشته جریان

این مدل با استفاده از یک رشته جریان به جای پلازما و یک رشته جریان برای هر یک از حلقه‌های حامل جریان ایجاد شده است. در این مدل مکان رشته‌ی در نظر گرفته شده به جای پلازما بر روی محور مغناطیسی قرار دارد. این مکان با استفاده از اندازه‌گیری تجربی و با به‌کارگیری پیچ‌های زینی شکل [۲ و ۹] به دست می‌آید. در این مدل مرحله-ی سوم که در قسمت قبل اشاره شد با استفاده از روش اول صورت می‌پذیرد.

• مدل ممان جریان

دومین مدل ساخته شده، مدل ممان جریان می‌باشد که با استفاده از ۱۲۱ رشته جریان به جای پلازما و یک رشته جریان برای هر یک از حلقه‌های حامل جریان، ایجاد شده است. در این مدل مرحله‌ی سوم با استفاده از روش دوم صورت می‌پذیرد.

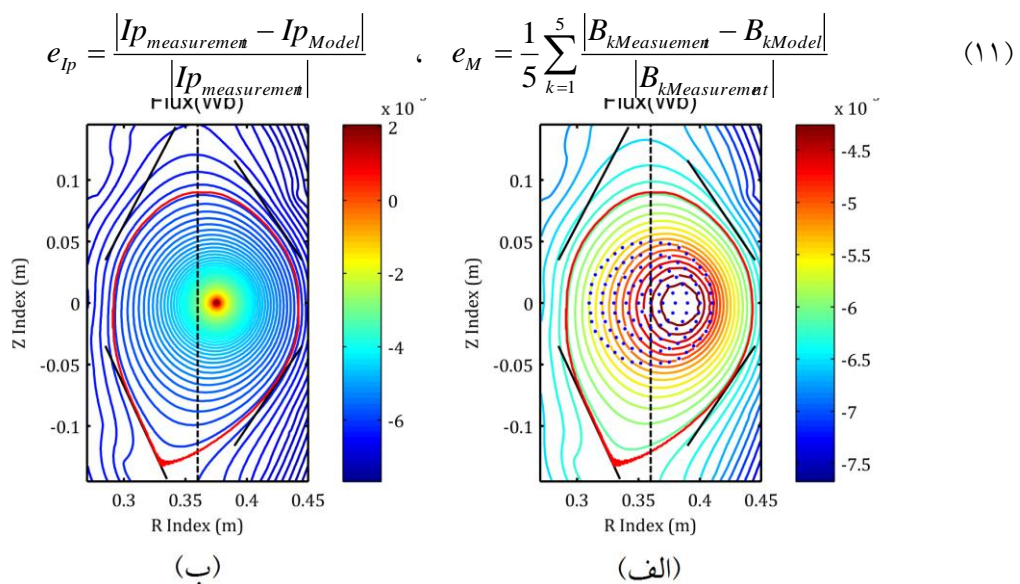
^۱- Last Closed Magnetic Surface

^۲- Rogowski Coil

آنچه که به مدل دوم (ممان جریان) به عنوان مدل برتر اعتبار می‌بخشد استفاده از راه حلی است که معادله‌ی گراد-شفرانف را در بر دارد. در نهایت می‌توانیم با استخراج یک ماتریس ضرائب از قلب محاسبات، مرز پلازما را با استفاده از یک ضرب ماتریسی ساده در ماتریس مربوط به داده‌های ورودی که با استفاده از پیچ‌های میرنف به دست می‌آید، محاسبه کنیم. شار مغناطیسی و مرز پلازما به دست آمده از این دو مدل در شکل ۱ نمایش داده شده است.

۴- بررسی صحت مدل

با توجه به این که پلازما رفتار متفاوتی از خود در طی هر شات بروز می‌دهد آنچه که برای ایجاد یک مدل مناسب می‌تواند مورد توجه قرار گیرد تعداد و نوع چیدمان رشته جریان‌ها است. بنابراین با جستجوی یک مجموعه از رشته جریان‌ها می‌توان خطای محاسبات را به حداقل رساند. علاوه بر این آنچه که در مدل‌سازی اهمیت دارد استفاده از تعداد معقولی از رشته جریان‌ها است. در واقع انتخاب تعداد کمی از رشته جریان‌ها باعث بالا رفتن خطای محاسبات و انتخاب تعداد بی‌شماری از رشته‌ها باعث افزایش خطای محاسباتی و همچنین عدم توفیق در انجام محاسبات با استفاده از یک کامپیوتر خانگی می‌شود. اولین خطای مدل (e_{Ip})، مربوط به جریان پلازما است که اختلاف مقادیر واقعی در مقایسه با مقادیر به دست آمده از مدل را نشان می‌دهد. دومین خطای مدل (e_M)، مربوط به پیچ‌های میرنف است که با به کارگیری ۵ عدد از پیچ‌ها انجام شده است.



شکل (۱) خطوط شار مغناطیسی در توکامک دماوند، شات ۲۰۰، زمان ۴۹/۶۰ میلی ثانیه. (الف) با استفاده از مدل ممان جریان. (ب) با استفاده از مدل تک رشته جریان. (خط بسته‌ی قرمز رنگ، مرز پلازما و نقاط آبی در شکل الف رشته‌های جریان و چهار خط مورب سیاه محدود کننده را نشان می‌دهد. خط چین در $R = 36 \text{ cm}$ قرار گرفته است.)

خطای e_M و e_{Ip} در مدل ممان جریان به ترتیب کمتر از ۳٪ و ۰/۰۴٪ می‌باشند.

۵- نتیجه گیری

با استفاده از مدل ایجاد شده می‌توان مرز پلاسما را پیش‌بینی نمود و با این کار وضعیت کنترل پلاسما را در هر مرحله بهبود بخشید. این کار را می‌توان با ایجاد شات‌های متوالی و یکسان و با اعمال تغییرات به صورت مرحله به مرحله انجام داد. علاوه بر این روش دیگری که بسیار پیچیده‌تر می‌تواند باشد این است که با ایجاد یک فرایند کنترلی فعال شرایط را برای بهبود وضعیت کنترل پلاسما ایجاد نمود. در اینجا منظور از فرایند کنترلی فعال این است که بتوان مرز پلاسما را در زمان کوتاه محاسبه نمود و پس از آن دستور کنترلی لازم را به صورت آنلاین به کنترل کننده سوئیچ‌های الکتریکی ارسال نمود. این فرایند در طی یک شات چندین بار می‌تواند تکرار شود. علاوه بر این، به خاطر عدم وجود شناساگرهای شار مغناطیسی مناسب در توکامک دماوند نمی‌توان به شکل مستقیم به حل عددی معادله گراد-شفرانف و محاسبه شار مغناطیسی پرداخت. بنابراین نتایج به دست آمده از این پژوهش امکان حل مستقیم این معادله را نیز فراهم می‌آورد.

سپاسگذاری

جا دارد از حمایت‌های بیدریغ تیم توکامک دماوند پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته‌ای در انجام این پژوهش، داده‌گیری و تحلیل آن تشکر بنمائیم.

مراجع

- [۱] B.J. Braams, "The interpretation of tokamak magnetic diagnostics," *Plasma Phys. Controlled Fusion* ۳۳,۷۱۵, ۱۹۹۱.
- [۲] M.Ariola , A.Pironti, "Magnetic Control of Tokamak Plasmas," Springer, first edition ۲۰۰۷.
- [۳] Bau III, David , "Numerical linear algebra, " Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, ۱۹۹۷.
- [۴] A. Cenedese; F. Sartori; M. Macuglia, "Development of fixed-position filamentary plasma model based on the current moment description", *Fusion Engineering and Design*, Volume: ۱۵۱ Issue: ۶, ۴۸۴ - ۴۸۷, ۲۰۰۴.
- [۵] A. Wootton, "Measurement of plasma shape in a tokamak", *Nuclear Fusion* , Vol.۱۹, No.۷, ۱۹۷۹
- [۶] L. Spagnoli, "Algoritmi di stima in real-time della topologia magnetica per il controllo di plasma nelle macchine da fusione," M.S. Research, the University of Rome Tor Vergata, ۲۰۰۷.
- [۷] Yu. K. Kuznetsov, I. C. Nascimento, R. M. O. Galvao, IV. Yasin, "Plasma boundary determination in ITER by the optimized current filament method " , *Nucl. Fusion* ۳۸, p.۱۸۲۹, ۱۹۹۸.
- [۸] B.Ph. Van Milligen, "Exact relations between multipole moments of the flux and moments of the toroidal current density in tokamaks," *Nucl. Fusion*, ۳۰, ۱۵۷. ۱۹۹۰.

[۹] رقدیری؛ پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه اصفهان، مهر ۱۳۹۱.