



محاسبه شار در مرز بیرونی یک حفاظ نوترونی با استفاده از روش المان طیفی

محمد رضا عباسی - احمد رضا ذوالفقاری - عبدالحمید مینوچهر - نیما نهاوندی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده مهندسی هسته‌ای

چکیده

یکی از جدیدترین روش‌های مشتق شده از روش المان محدود، روش المان طیفی می‌باشد. در طراحی حفاظ نوترون، شار روی مرز بیرونی مورد نظر است و با توجه به اینکه در این روش از تقریب‌های مرتبه بالا و توزیع نقاط درون‌یابی در بازه‌های نابرابر استفاده می‌شود، می‌تواند ابزاری نیرومند برای تحلیل مکانی معادله ترابرد نوترون با تعداد المان‌های کمتر باشد که استفاده زیادی در طراحی حفاظ نوترون دارد. در این مقاله از بسط هارمونیک‌های کروی (PN) با پاریته زوج^۱ برای بخش زاویه‌ای و از روش المان طیفی^۲ و بسط چند تابع پایه شکلی^۳ مختلف برای بخش مکانی شار زاویه‌ای نوترون استفاده، همچنین پراکنندگی‌ها بصورت ناهمسانگرد در نظر گرفته شده است. در این صورت ماتریس‌های انتگرالی بخش مکانی نسبت به روش المان محدود متفاوت ظاهر خواهند شد و با بالا بردن درجه هر المان و کاهش تعداد المان‌ها می‌توان انتظار داشت که جواب‌های دقیقتر در زمان اجرای کمتری بدست آید. با استفاده از روش المان طیفی شار نوترون برای حفاظ‌های یک‌بعدی با چند تابع پایه شکلی مختلف محاسبه و مقایسه شده و نتایج بدست آمده مورد بررسی قرار گرفته است.

کلید واژه: حفاظ سازی نوترون - معادله ترابرد نوترون - روش المان طیفی - بسط هارمونیک‌های کروی - پاریته زوج

مقدمه

مطالعه رفتار نفوذپذیری نوترون در یک حفاظ به دو روش صورت می‌گیرد یک با استفاده از روش مونت کارلو^۴ [۲،۶] و دیگری به کمک حل عددی معادله ترابرد نوترون که در اصل، می‌توان توزیع زاویه‌ای شار نوترون را با دقت بسیار بالا بدست آورد [۱]. یکی از کدهای هسته‌ای که کاربرد فراوانی در این زمینه دارد کد محاسباتی ANISN می‌باشد که برپایه روش جهت‌های مجزا برای هندسه‌های یک بعدی نوشته شده است. در این مقاله نیز هدف حل معادله ترابرد نوترون در هندسه‌های یک بعدی با استفاده از روش المان طیفی به همراه آزمودن چند تابع پایه

^۱ Even parity

^۲ Spectral Element Method

^۳ Basic Shape Functions

^۴ Monte Carlo



شکلی برای بخش مکانی و استفاده از بسط هارمونیک‌های کروی زوج برای قسمت زاویه‌ای می‌باشد. در پایان نیز کاربرد این روش در حفاظ سازی نوترون بررسی می‌گردد.

معادله ترابرد در قالب پارینه زوج

معادله ترابرد وابسته به مکان و جهت و انرژی نوترون در حالت ایستا را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱,۳]

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(r, E, \Omega) + \Sigma_t(r, E) \Phi(r, E, \Omega) = \int_{\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(r, E', \Omega') + \sum_j \frac{\chi^j(E)}{4\pi} \int_{\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \nu^j(E') \Sigma_f^j(r, E') \Phi(r, E', \Omega') + S(r, E, \Omega) \quad (1)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات [۳] که منجر به تولید خطاهایی روی سطح و حجم می‌شود [۱] می‌توان اصل تغییرپذیری را بصورت زیر معرفی نمود [۱,۳]:

$$K^+(\Phi^+) = \int_V \int_{\pi} \left\{ \nu (S_{eff}^+ \Phi^+) + \nu (S_{eff}^- \mathbb{G}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi^+)) - (\Phi^+ \mathbb{C}(\Phi^+)) \right\} d\Omega dV + \int_S \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| T(r, \Omega) \Phi^+ d\Omega dS + - \int_S \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| (\Phi^+)^2 d\Omega dS \quad (2)$$

در صورتی که اصل وردشی فوقا با استفاده از روش المان طیفی بیشینه شود مقدار خطاهای روی سطح و حجم کمینه خواهد شد و با ارضای شرایط مرزی جواب‌های قابل قبولی برای شار زاویه ای بدست می‌آید.

مروری بر روش المان طیفی

می‌خواهیم جواب را روی المان l ام با یک چندجمله‌ای مرتبه m تقریب بزیم در این صورت $(m+1)$ نقطه درون‌یابی در زیرالمان تعریف می‌شود که شامل دو نقطه پایانی هندسی در دو سر المان و $(m-1)$ نقطه دیگر در درون المان می‌باشد. برای آسان کردن محاسبات زیر - المان l ام را در بازه استاندارد $[-1, 1]$ با محور بی بعد ξ تعریف می‌کنیم

$$x(\xi) = \frac{1}{\nu} (X_\nu^{(l)} + X_1^{(l)}) + \frac{1}{\nu} (X_\nu^{(l)} - X_1^{(l)}) \xi \quad (3)$$

که در آن $X_1^{(l)}$ نقطه ابتدایی المان و $X_\nu^{(l)}$ نقطه انتهایی زیرالمان در محور x می‌باشد. همچنان که ξ بین -1 و 1 افزایش می‌یابد x (نقطه میدانی) از نقطه ابتدایی زیرالمان تا نقطه انتهایی آن حرکت می‌کند. در روش المان طیفی توابع درون‌یابی المان l ام را می‌توان به راحتی با چندجمله‌ای‌های درون‌یابی مرتبه m ام

لاگرانژ تعیین کرد، برای $i = 1, 2, \dots, m+1$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}g_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{m+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{m+1})} \quad (4)$$

۱ Element Interpolation Functions



که در آن ξ_j ها نقاطی با مقدار معلوم می‌باشند. با یک بررسی کوتاه مشخص می‌شود که این چندجمله‌ای‌ها در خاصیت اساسی درونیابی صدق می‌کنند:

$$\mathcal{L}g_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j} \quad (5)$$

که در آن $\delta_{i,j}$ دلتای کرونکر می‌باشد. می‌توان با استفاده از رابطه (۱) متغیر مکانی x را به صورت متغیر استاندارد متقارن ξ تبدیل خواهیم کنیم، پس دیفرانسیل مکانی به صورت زیر نمایش داده می‌شود: [۲]

$$h_l \equiv X_f^{(l)} - X_i^{(l)} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{h_l}{\gamma} d\xi \quad (6)$$

با استفاده از روابط فوق، ماتریس‌های انتگرالی ایجاد شده از روش المان محدود برای بخش مکانی شار زاویه‌ای را می‌توان به صورت روش المان طیفی تعریف کرد:

$$\underline{\mathcal{S}}_1^l = \int_{x_i^{(l)}}^{x_f^{(l)}} \underline{\mathcal{B}}^{lT}(x) dx = \frac{h_l}{\gamma} \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{L}}g_m^l d\xi \quad (7)$$

$$\underline{\mathcal{S}}_2^l = \int_{x_i^{(l)}}^{x_f^{(l)}} \underline{\mathcal{B}}^l(x) \underline{\mathcal{B}}^{lT}(x) dx = \frac{h_l}{\gamma} \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{L}}g_m^l(\xi) \underline{\mathcal{L}}g_m^{lT}(\xi) d\xi \quad (8)$$

$$\underline{\mathcal{S}}_3^l = \int_{x_i^{(l)}}^{x_f^{(l)}} \frac{\partial \underline{\mathcal{B}}^l(x)}{\partial x} \frac{\partial \underline{\mathcal{B}}^{lT}(x)}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{h_l} \int_{-1}^1 \frac{d\underline{\mathcal{L}}g_m^l(\xi)}{d\xi} \frac{\underline{\mathcal{L}}g_m^{lT}(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (9)$$

و بردار $\underline{\mathcal{L}}g_m^{lT}(\xi)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{\mathcal{L}}g_m^{lT}(\xi) = [\mathcal{L}g_1^l(\xi) \quad \mathcal{L}g_2^l(\xi) \quad \dots \quad \mathcal{L}g_{(m+1)}^l(\xi)] \quad (10)$$

که در آن l نشان دهنده المان، m نشان دهنده مرتبه چندجمله‌ای لاگرانژ بکار رفته در آن المان، T نماد ترانزپوز بردار و $x_i^{(l)}$ و $x_f^{(l)}$ مکان ابتدا و انتهای المان می‌باشند.

تنوری درونیابی توسط چندجمله‌ای لاگرانژ به همراه چندجمله‌ای‌های متعامد بیانگر این مطلب است که، $(m-1)$ گره‌های داخلی در هر المان باید در صفرهای یک تابع پایه شکلی متعامد مرتبه $(m-1)$ مانند چندجمله‌ای‌های لوباتو^۱ توزیع شود، زیرا توزیع نقاط درونیابی در بازه‌های برابر، دقت درونیابی را پایین می‌آورد [۲]. در روش المان طیفی نقاط درونیابی در فواصل نابرابر توزیع می‌شوند مثلاً با استفاده از صفرهای چندجمله‌ای مختلف مانند لوباتو، برای درونیابی مرتبه $(m+1)$ ، توزیع نقاط به صورت زیر انجام می‌گیرد: [۲]

$$\xi_1 = -1 \quad \xi_2 = t_1, \quad \xi_3 = t_2, \quad \xi_4 = t_3, \quad \dots, \quad \xi_m = t_{m-1} \quad (11)$$

$$\xi_{m+1} = +1$$

که در آن t_1, t_2, \dots, t_{m-1} صفرهای چندجمله‌ای مرتبه $(m-1)$ لوباتو می‌باشند.

^۱ Lobatto Polynomials

انتگرال گیری عددی با استفاده از توابع متعامد

همان طور پیش تر اشاره شد، از توابع متعامد می توان برای انتگرال گیری عددی با دقت بالا استفاده کرد. با توجه به این که کران انتگرال های ماتریس های مکانی در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد، چند جمله ای هایی که در این بازه تعریف شده اند را برای انتگرال گیری عددی می توان بکار برد.

انتگرال گیری عددی لوباتو برای تابع هموار $f(\xi)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{p=1}^{k+1} f(\xi = z_p) w_p \quad (12)$$

که در آن $k \geq 1$ مرتبه انتخاب شده برای انتگرال گیری عددی می باشد، z_p ها نقاط پایه ای^۱ انتگرال گیری و w_p ها وزن های انتگرال گیری متناظر با این نقاط می باشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$z_1 = -1 \quad z_2 = t_1, \quad z_3 = t_2, \quad z_4 = t_3, \quad \dots, \quad z_k = t_{k-1} \quad (13)$$

که در آن t_1, t_2, \dots, t_{m-1} صفرهای چند جمله ای مرتبه $(k-1)$ لوباتو می باشد. در مراجع مختلف، صفرها و وزن های مرزی (w_1, w_{k+1}) و درونی (w_p) و انتگرال گیری عددی را برای هر تابع متعامد می توان یافت. برای مثال انتگرال گیری عددی لوباتو را به صورت زیر نمایش می دهند:

$$\int_{-1}^1 P_{ij}(\xi) d\xi \cong \sum_{p=1}^{k+1} P_{ij}(\xi = z_p) w_p = \quad (14)$$

$4\delta_{i,j}\delta_{j,1}Lo_{m-1}(\xi = -1)w_1 + \sum_{p=1}^k P_{ij}(\xi = z_p)w_p + 4\delta_{i,m+1}\delta_{j,m+1}Lo_{m-1}(\xi = +1)w_{k+1}$
با استفاده از تعاریف ارائه شده، در این مقاله از توابع متعامد لوباتو، لزاندر، چبیشف نوع اول، چبیشف نوع دوم و رادا برای تحلیل بخش مکانی شار زاویه ای استفاده شده است.

مثال ها و نتایج عددی

با توجه به مطالب ذکر شده یک برنامه محاسباتی برای حل عددی معادله ترابرد با استفاده از روش المان طیفی و بسط هارمونیک های کروی برای هندسه های یک بعدی نوشته شده و در این بخش نتایج بدست آمده از این برنامه با مقادیر مرجع و نتایج حاصل از کد محاسباتی ANISN مقایسه شده است.

^۱ Base Points

مثال ۱: تیغه جاذب خالص

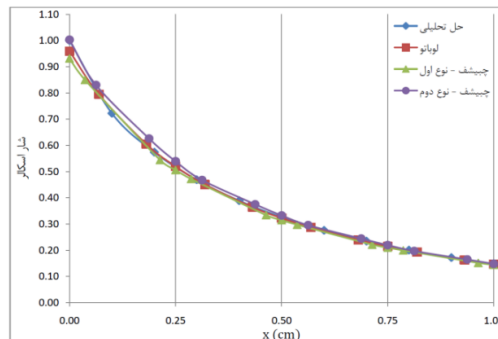
در این مثال تیغه‌ای به ضخامت ۱ سانتی‌متر را در نظر می‌گیریم که متشکل از یک ماده جذب کننده خالص می‌باشد. یک چشمه سطحی در مرز سمت چپ (در نقطه $x = 0$) قرار می‌دهیم. حل تحلیلی این مثال از رابطه زیر بدست می‌آید [۶]:

$$\bar{\Phi}_v(x) = T_a E_v [\Sigma_a(x-a)] + T_b E_v [\Sigma_a(b-x)] \quad (15)$$

که در آن $E_v(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$ و $[a, b]$ نشان دهنده بازه مکانی تیغه می‌باشد و T ها مقدار چشمه سطحی در مرزها را مشخص می‌کند. ورودی‌های مسئله به صورت زیر می‌باشند:

$$d = 1 \text{ cm}, \quad \Sigma = \Sigma_a = 1 \text{ cm}^{-1}, \quad \Sigma_s = 0, \quad S = 0, \quad T = 1$$

این مسئله با استفاده از ۴ المان درجه ۳ و تقریب P_v حل شده و شار اسکالر توسط روش المان طیفی با استفاده سه تابع متعامد لوباتو، چبیشف نوع اول و نوع دوم محاسبه شده است. برای مقایسه نتایج، نمودار پیوسته خطی حل تحلیلی و توابع متعامد بکاررفته در محاسبات در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل (۱) نمودار مقایسه نتایج حل تحلیلی و روش المان طیفی برای مسئله چشمه سطحی بر روی تیغه یک‌بعدی جذب کننده خالص

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تراکم نقاط درون‌یابی در مجاورت مرزهای خارجی و مرزهای بین المان‌ها بیشتر می‌باشد، همین خاصیت توابع متعامد سبب می‌شود که جواب‌هایی با دقت بالاتر بدست آید. بعنوان مثال مقدار شار محاسبه شده در سمت راست تیغه با استفاده از تابع چبیشف نوع دوم، با مقداری که از حل تحلیلی بدست آمده برابر است که کاربرد زیادی در طراحی حفاظ دارد.

مثال ۲: چشمه حجمی نوترون با پراکندگی ناهمسانگرد

در این مثال یک تیغه سوخت (مانند دی‌اکسید اورانیوم) به ضخامت ۱ cm داخل یک لایه کندکننده (مانند گرافیت) به ضخامت ۲ cm قرار دارد. برای حفاظ سازی این مجموعه یک لایه از ماده بازتابنده (مانند آب) به ضخامت ۲ cm به دور آن قرار می‌دهیم. پراکندگی در سوخت و کندکننده ناهمسانگرد و در بازتابنده همسانگرد در نظر گرفته می‌شود. سطح مقاطع استفاده شده در جدول (۱) آمده است.

جدول (۲) جدول سطح مقاطع مورد استفاده در مثال ۲

سطح مقطع (cm ²)	سوخت	کندکننده	بازتابنده
Σ_t	۰,۵۴۲	۰,۳۸۵	۳,۴۵۲
$v\Sigma_f$	۰,۱۲۶	-	-
Σ_{s_0}	۰,۳۷۲	۰,۳۸۴	۳,۴۵۰
Σ_{s_1}	۰,۴۳۰	۰,۱۲۰	-

این مسئله با ۵۰۰ مش و تقریب S_{16} توسط کد ANISN حل شده و برای مقایسه با سه المان درجه ۲ و ۸ به روش المان طیفی و با استفاده از تقریب های P_V , P_{1V} برای توابع پایه مختلف حل شده و مقدار شار اسکالر نرمالیزه در مرز بیرونی، در جدول (۲) با هم مقایسه شده است.

شکل (۱) مقایسه شار اسکالر نرمالیزه در مرز بیرونی برای توابع پایه مختلف

	چبیشف-۲		چبیشف-۱		رادا		لژاندر		لوباتو	
	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸	درجه ۲	درجه ۸
P_V	۰,۰۶۵۸	۰,۰۶۵۰	۰,۰۶۷۶	۰,۰۷۳۶	۰,۰۶۷۰	۰,۰۶۹۵	۰,۰۶۷۰	۰,۰۶۹۵	۰,۰۶۷۰	۰,۰۶۹۵
P_{1V}	۰,۰۶۴۷	۰,۰۶۵۴	۰,۰۶۷۲	۰,۰۷۳۸	۰,۰۶۶۳	۰,۰۶۹۹	۰,۰۶۶۳	۰,۰۶۹۹	۰,۰۶۶۳	۰,۰۶۹۹
ANISN(S_{16})	۰,۰۶۶۲۹۳۴									

نتیجه گیری

با استفاده از روش المان طیفی در زمان کوتاهتر می توان جواب های دقیقی برای شار نوترون روی مرزهای بیرونی بدست آورد که در طراحی حفاظ کاربرد زیادی دارد.

منابع و مراجع

- [۱]. Ron T. Ackroyd, Finite Element Methods for Particle Transport Applications to Reactor and Radiation Physics, John Wiley & Sons, New York, ۱۹۹۷
- [۲]. C. Pozrikidis, Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using MATLAB, Chapman & Hall, San Diego, ۲۰۰۵
- [۳]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ا. حقیقت طلب، " استفاده از اصل تغییر پذیری $K^+(\phi^+)$ و روش اجزاء محدود برای حل معادله ترابرد نوترون"، چهاردهمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، یزد، اسفندماه ۱۳۸۶
- [۴]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ع. مینوچهر، " معرفی توابع لوباتو جهت حل معادله ترابرد در مختصات یک بعدی با استفاده از روش اجزای محدود طیفی"، هفدهمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، اصفهان، اسفندماه ۱۳۸۹
- [۵]. W. M. Stacey, Nuclear Reactor Physics, John Wiley & Sons, New York, ۲۰۰۶
- [۶]. C.R.E. de Oliveria, Finite Element Techniques for Multi group Neutron Transport Calculations with Anisotropic Scattering, London University Ph.D. Thesis., ۱۹۸۷