

بازیابی سطوح مقاطع دو گروهی معادله پخش از توزیع شار رآکتور به روش معکوس

القار نوری*، عبدالحمید مینوچهر، احمد ذوالفقاری، مهدی زنگیان، مصطفی یوسفی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده مهندسی هسته‌ای، گروه رآکتور.

چکیده:

در این مقاله از روی توزیع شار رآکتور و ضریب تکثیر مؤثر نوترون در آن، پارامترهای دو گروهی معادله پخش با استفاده از روش معکوس^۱ بازیابی می‌شود. این پارامترها شامل ضرایب پخش گروهی و سطوح مقاطع حذف، شکافت و پراکندگی می‌باشد. در این روش معادله دوگروهی پخش به شکل عملگری^۲ بازنویسی شده و ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس سطوح مقاطع با در دست داشتن توزیع شار، کسر توان تولیدی در هر ناحیه، ضریب تکثیر مؤثر و ضریب پخش گروهی مربوط به تنها یکی از نواحی بازیابی می‌شوند. سپس با حل مسئله معکوس از روی این مقادیر و بدون استفاده از کتابخانه‌های داده‌های هسته‌ای و مقادیر شار الحاقی همه سطوح مقاطع گروهی نواحی با دقت خوبی برآورد می‌شوند.

کلمات کلیدی: مسئله معکوس، معادله پخش نوترون، طراحی رآکتور

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مسئله معکوس در بیشتر زمینه‌های علوم و مهندسی مورد توجه قرار گرفته است. در برخی از موارد حل مسئله معکوس به اندازه حل مسائل مستقیم^۳ آن دارای اهمیت است. در یک مسئله معکوس، مجهولات بر اساس مشاهدات و تاثیرات ناشی از آن تعیین می‌شوند. در حوزه مهندسی هسته‌ای یافتن پارامترهای قلب یک رآکتور در حال کار و اطلاع از وضعیت سوخت از جمله غنای آن (سطح مقطع شکافت) و چینش بهینه و اقتصادی سوخت از اهمیت بالایی برخوردار است که پیش از طراحی رآکتور باید مورد توجه قرار گیرد که در این بخش علیرغم مزایای قابل توجه، بهره‌گیری از مسئله معکوس تا حد زیادی مغفول مانده است.

در حل رو به جلوی^۴ معادله چندگروهی پخش و مسئله ویژه مقداری آن، توزیع شار و کسر توان در هر ناحیه را محاسبه می‌کنیم. با دانستن نتایج حل مستقیم معادله پخش نوترون (مثلاً از طریق اندازه‌گیری‌های

^۱ Inverse Method

^۲ Operator

^۳ Direct

^۴ Forward

آزمایشگاهی) می‌توان با استفاده از روش معکوس پارامترهای مربوط به این معادله را که عبارتند از ضرایب گروهی پخش نوترون و سطوح مقاطع گروهی در نواحی مختلف قلب را بدست آوریم. در تئوری معکوس بیشتر مسائلی به جواب مطلوب می‌رسند که در آن‌ها حساسیت پاسخ سامانه نسبت به تغییرات ضرایب معادله پایین باشد. همچنین بنابر نظریه معکوس امکان بازیابی همه پارامترهای حل مستقیم در همه مسائل وجود ندارد و اعمال قیود و شرط‌های جانبی برای محدودسازی پارامترها در برخی مواقع کاملاً ضروری است. بعلاوه، باید توجه نمود که ورودی‌های مسئله معکوس شامل برخی خطاهای آزمایشگاهی بوده و تنظیم کردن داده‌ها نیز در این روش ضروری است.

در این مقاله بعنوان داده ورودی از مقادیر توزیع شار گروهی و ضریب تکثیر مؤثر بدست آمده از خروجی حل معادله پخش رو به جلو توسط یک کد معتبر (DONJON) استفاده شده و با الگوریتم پیشنهادی پارامترهای معادله پخش برای یک رآکتور چند ناحیه‌ای دوگروهی شامل ضرایب پخش و سطوح مقاطع بازیابی می‌شوند. در این محاسبات از هیچ کتابخانه داده‌های هسته‌ای یا شار الحاقی استفاده نشده است. به دلیل محدودیت‌های ذاتی نظریه حل معکوس مقدار ضریب پخش یکی از نواحی از قبل دانسته شده چرا که در غیر این صورت، مسئله معکوس دارای بی‌نهایت جواب است. با اعمال قید پیوستگی جریان در مرز بین نواحی ضرایب پخش سایر نواحی محاسبه می‌شوند. در ادامه ضمن تشریح مبانی کار، برای صحت‌سنجی، نتایج محاسبات معکوس برای چند محک مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲ - بازیابی معادله پخش نوترون دو گروهی از دیدگاه عملگری

معادله دو گروهی پخش نوترون بصورت زیر نوشته می‌شود: [۱]

$$-D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \Sigma_{r1} \phi_1 = \frac{\nu \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f2} \phi_2}{k} \quad (1-الف)$$

$$-D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + \Sigma_{a2} \phi_2 = \Sigma_{21} \phi_1 \quad (1-ب)$$

دو معادله دیفرانسیل وابسته به هم را می‌توان بصورت عملگری زیر باز نویسی نمود:

$$-\nabla^2 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

با مقایسه دو معادله (۱-الف)، (۱-ب)، با معادله (۲) آرایه‌های ماتریس ضرایب را بصورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} m_{11} &= (\nu \Sigma_{f1} / k - \Sigma_{r1}) / D_1 & ; & & m_{12} &= \nu \Sigma_{f2} / D_2 k & (3) \\ m_{21} &= \Sigma_{21} / D_2 & ; & & m_{22} &= -\Sigma_{a2} / D_2 \end{aligned}$$

معادله (۲) یک معادله ویژه مقادیری با و دو ویژه مقدار مربوط به ماتریس سطوح مقاطع بشکل زیر است:

$$e_1 = \{m_{11} + m_{22} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}\} / 2 \quad (4-f)$$

$$e_2 = \{m_{11} + m_{22} - \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}\} / 2 \quad (4-b)$$

این ویژه مقادیر e_i متناظر با ویژه توابع $\Phi_i = [\varphi_{i1}, \varphi_{i2}]^T$ برای $i = 1, 2$ می باشند. راه حل کلی رابطه (۲) ترکیب خطی این ویژه توابع است که یکی شار حالت پایا و دیگری در شرایط پویای گذرا ظاهر می شود:

$$\phi_g(x) = \varphi_{1g}\psi_1(x) + \varphi_{2g}\psi_2(x) \quad g = 1, 2 \quad (5)$$

زیر نویس g نشاندهنده گروه نوترونی بوده و در نواحی دور از مرزهای داخلی حالت پایا بر سامانه غالب است ($\phi_{gasy}(x) = \varphi_{1g}\psi_1(x)$) و در فاصله دور از مرز نواحی، شار بوسیله این مولفه تعیین می شود درحالی که مقدار مولفه ناپایدار ($\phi_{ghm}(x) = \varphi_{2g}\psi_2(x)$) در مرزها به برقراری شرایط مرزی کمک می کند. در رابطه (۵)، $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ به ترتیب مدهای پایدار و ناپایدار ویژه توابع هستند، که از معادله زیر بدست می آیند

$$\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} + e_i\psi_i(x) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

نسبت مؤلفه های یک ویژه بردار را بصورت زیر معرفی می کنیم

$$s_i = \varphi_{i2} / \varphi_{i1} \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

برای ساده سازی روابط استخراج شده، ویژه توابع را با اعمال $\varphi_{i1} = 1$ و در نتیجه $\varphi_{i2} = s_i$ بهنجار می کنیم و بنابراین ویژه توابع بصورت $\Phi_i = [1, s_i]^T$ برای $i = 1, 2$ می شوند. لذا شار گروهی می تواند بصورت زیر

بیان شود

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \quad (8-f)$$

$$\varphi_2(x) = s_1\psi_1(x) + s_2\psi_2(x) \quad (8-b)$$

مد پایداری برابر است با

$$\psi_1(x) = \begin{cases} a \sin Bx + b \cos Bx & e1 = B^2 > 0 \\ a \sinh Bx + b \cosh Bx & e1 = B^2 < 0 \end{cases} \quad (9-f)$$

که B^2 معرف باکلینگ هندسی است. مد ناپایدار نیز برابر است با

$$\psi_2 = c \sinh \lambda x + d \cosh \lambda x \quad e_2 = -\lambda^2 \quad (9-b)$$

با جفت کردن ضرایب در معادله (۸-ب) داریم:

$$s_1 = \frac{e_1 - m_{11}}{m_{12}} = \frac{m_{21}}{e_1 - m_{22}} \quad (10-f)$$

$$s_2 = \frac{e_2 - m_{11}}{m_{12}} = \frac{m_{21}}{e_2 - m_{22}} \quad (10-b)$$

با توجه به تعریف درایه های ماتریس سطوح مقاطع (۲)، نتایج فوق نسبت مقادیر شار گروهی را با مقادیر سطوح مقاطع گره می زند.

۳- تجزیه و تحلیل معکوس

در این بخش به فرمول‌بندی مسئله معکوس می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که توزیع شار گروهی را داریم. در این مقاله از خطای اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی یا حل رو به جلوی شار صرف نظر می‌شود. با توجه به روابط استخراج شده مشاهده می‌شود که امان‌های ماتریس ضرایب به مقادیر پارامترهای معادله پخش گروهی به مقادیر e_2, e_1, s_2, s_1 بستگی دارند. با معلوم بودن این مقادیر، درایه‌های ماتریس ضرایب نیز محاسبه شده و به این ترتیب می‌توان مقادیر سطوح مقاطع را محاسبه نمود.

$$m_{11} = \frac{s_1 e_2 - s_2 e_1}{s_1 - s_2}, m_{12} = \frac{e_1 - e_2}{s_1 - s_2} \quad (10)$$

$$m_{21} = \frac{s_1 s_2 (e_2 - e_1)}{s_1 - s_2}, m_{22} = \frac{s_1 e_1 - s_2 e_2}{s_1 - s_2}$$

همچنین با استفاده از شرط برابری جریان در مرزهای داخلی و داشتن ضرایب پخش برای یک ناحیه می‌توان ضرایب پخش نواحی دیگر را بصورت زیر بدست آورد:

$$D_g^{(k)} = D_g^{(k-1)} \frac{d\phi_g^{(k-1)}}{dx} / \frac{d\phi_g^{(k)}}{dx} \quad (11)$$

و به این ترتیب مقادیر مربوط به پارامترهای $\nu\Sigma_{f2}, \Sigma_{12}, \Sigma_{a2}$ از معادلات (۱۰) و (۳) بدست می‌آیند. برای توان تولیدی هر ناحیه رابطه $\nu\Sigma_{f1}\bar{\phi}_1 + \nu\Sigma_{f2}\bar{\phi}_2 = p_r$ برقرار است پس در هر ناحیه برای محاسبه Σ_{f1} از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\nu\Sigma_{f1} = \frac{p_r}{\bar{\phi}_1} - \nu\Sigma_{f2} \frac{\bar{\phi}_2}{\bar{\phi}_1} \approx \frac{p_r}{\bar{\phi}_1} - \nu\Sigma_{f2} s_1 \quad (12)$$

در نهایت، با قرار دادن مقدار $\nu\Sigma_{f1}$ در رابطه $m_{11} = (\nu\Sigma_{f1}/k - \Sigma_{r1})/D_1$ مقدار Σ_{r1} بدست می‌آید.

۴- برآورد مقادیر e_2, e_1, s_2, s_1

محاسبه e_1 نیازمند داشتن مقادیر توزیع شار در نواحی داخلی دور از مرزها برای هر ناحیه هستیم.

$$e_{1g}(x) = -\frac{d^2\phi_g(x)}{\phi_g(x) dx^2} \rightarrow -\frac{d^2\phi_{gasy}(x)}{\phi_{gasy}(x) dx^2} = -\frac{d^2\psi_1(x)}{\psi_1(x) dx^2} = e_1 \quad g = 1, 2 \quad (13)$$

از طرف دیگر در محاسبه مقادیر s_1 مربوط به هر ناحیه از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)} = \frac{s_1\psi_1(x) + s_2\psi_2(x)}{\psi_1(x) + \psi_2(x)} \rightarrow \frac{\phi_{2asy}(x)}{\phi_{1asy}(x)} = s_1 \quad (14)$$

برای یافتن مقادیر e_2 باید توجه کنیم که این مقدار به مقادیر مد ناپایداری شار بستگی دارد.

$$\psi_i(x) = (-1)^i \frac{\phi_2(x) - s_j \phi_1(x)}{s_2 - s_1} \quad (15)$$

برای محاسبه ویژه مقدار e_2 داریم:
برای $i, j = \{1, 2\}$ و اگر $i = 1$ باشد $j = 2$ می‌شود و از طرفی می‌دانیم که برای مد ناپایداری $i = 2$ است پس

$$e_2 = -\frac{\frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2}}{\psi_1(x)} = -\frac{\frac{d^2 \phi_2(x)}{dx^2} - s_1 \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2}}{\phi_2(x) - s_1 \phi_1(x)} \quad (16)$$

و در نهایت برای محاسبه s_2 که همانند e_2 در نقاط نزدیک مرز بین نواحی محاسبه می‌شود از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

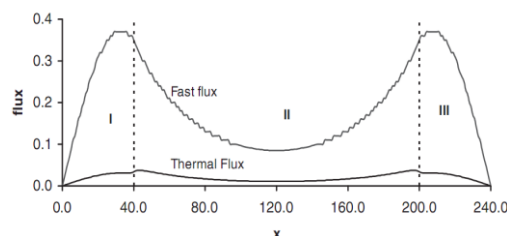
$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{[e_{t1}(x) - e_2][e_{t2}(x) - e_1]}{[e_{t1}(x) - e_1][e_{t2}(x) - e_2]} \quad (17)$$

۵- مثال‌های عددی

برای آزمودن الگوریتم از شار بدست آمده از حل مستقیم معادله توسط کد DONJON به عنوان شار مرجع استفاده شده و به عنوان خوراک به الگوریتم داده می‌شود. چنانچه مقادیر سطوح مقاطع بازیابی شده صحیح باشند، شار حاصل از این سطوح مقاطع باد بر توزیع شار مرجع منطبق شود. در این خصوص از یکی از محک‌های معتبر ANL استفاده شده است.

۱-۵- محک ANL-BSS-۶-A۲

طول قلب این رآکتور یک بعدی دو گروهی و سه ناحیه‌ای متقارن 240cm است [۲]. ابتدا مسئله را بصورت رو به جلو با استفاده از کد DONJON حل کرده و به این ترتیب توزیع شار ورودی مورد نیاز برای محاسبه مسئله معکوس ساخته می‌شود. سپس با اعمال روند توضیح داده شده در بالا پارامترهای مجهول را محاسبه کرده و در نهایت میزان خطای مربوط به هر پارامتر در مقایسه با مقادیر اصلی آن را محاسبه کردیم. نمودار توزیع شار بصورت زیر است. ارائه نتایج حاصل از حل مسئله معکوس و مقایسه آن با مقادیر واقعی در جدول ۱ ارائه شده است.



شکل ۱: نمودار توزیع شار نوترونی گروهی برحسب طول قلب رآکتور [۲]

جدول ۱: نتایج حاصل از محک با $k = 0.901584$

	ناحیه اول			ناحیه دوم			ناحیه سوم		
	واقعی	معکوس		واقعی	معکوس		واقعی	معکوس	
p_r	0.30227			0.395446			0.30227		
$\bar{\phi}_1$	2.6327			5.33			2.6328		
$\bar{\phi}_2 / \bar{\phi}$	0.083358			0.1236			0.083357		
e_1	0.002307	0.0021261		-	-0.00084037		0.002307	0.0021281	
e_2	-0.37224	-0.37203		-	-0.17361		-0.37224	-0.37222	
s_1	0.082803	0.082844		0.125526	0.12566		0.082803	0.0822844	
s_2	-2.44987	-2.4807		-1.45099	-1.4644		-2.44987	-2.4657	
			خطا(درصد)			خطا(درصد)			خطا(درصد)
D_1	1.500	1.500	0	1.000	0.96204	-3.7958	1.500	1.5000	0
D_2	0.500	0.5	0	0.500	0.46395	-7.2822	0.500	0.50006	-0.0127
Σ_{r1}	0.026	0.02600	5.07E-05	0.020	0.01996	-0.20112	0.026	0.02599	-0.0141
Σ_{a2}	0.018	0.17997	-0.01725	0.080	0.074154	-7.3072	0.180	0.18005	0.02737
Σ_{12}	0.015	0.014997	-0.01725	0.010	0.0092692	-7.3072	0.015	0.015006	0.02793
$\nu\Sigma_{f1}$	0.010	0.01006	0.60454	0.005	0.00547	9.5137	0.010	0.00995	-0.4595
$\nu\Sigma_{f2}$	0.200	0.19927	-0.36262	0.099	0.095151	-3.8876	0.200	0.20055	0.27564

۶- بحث و نتیجه گیری:

در این مقاله، پارامترهای معادله پخش برای قلب رآکتور چند ناحیه‌ای در دو گروه انرژی از روی توزیع شار بازیابی می‌شوند. مزیت الگوریتم روش معکوس معرفی شده، عدم نیاز به استفاده از کتابخانه‌های داده‌های هسته‌ای یا شار الحاقی است. دیگر ویژگی این روش استقلال از بعد مکانی است و به راحتی می‌توان آن را به دو و سه بعد تعمیم داد. گسترش کاربرد این روش در بهینه‌سازی چیدمان سوخت می‌تواند محور پژوهش‌های آتی باشد.

۷- مراجع:

[۱] M. Aydin, M. Atalay, "Inverse Neutron Diffusion Problems in Reactor Design", Nucl. Sci. & Tech., Vol. ۴۴, No. ۹, pp. ۱۱۴۲-۱۱۴۸, (۲۰۰۷).