مطالعه ی گذارفاز شکل برای هسته های ناحیه گذاری $U(5)-SO(6)$ با استفاده از نظریه ی بحران

محمد علی جعفری زاده – ناصرفولادی – حسن فتحی * – میثم قدمی – هادی صبری
دانشگاه تبریز، دانشکده فیزیک، گروه فیزیک هسته ای

چکیده

در این مقاله سطوح انرژی مربوط به هامیلتونین گذاری در ناحیه $U(5)-SO(6)$ مدل بوزون اندرکنشی و همچنین نقطه گذارفازی برای ایزوتوپ‌های مختلف با استفاده از نظریه بحران تعیین شده است. با استفاده از هامیلتونین گذاری تعریف شده برپایه جبر $SU(1,1)$ و فرمولبندی نظریه ی بحران کلاسیک، تابعیت نقطه‌ی بحرانی گذار فازی بر حسب پارامترهای کنترلی این هامیلتونین حاصل می گردد. نتایج حاصل برای ایزوتوپ‌های مختلف هسته های Ru و Pd مورد بررسی قرار گرفته و دو ایزوتوپ $^{104}_{44}Ru$ و $^{102}_{46}Pd$ به عنوان بهترین نمونه ها برای توصیف نقطه بحرانی این گذار فازی پیشنهاد می شود.

کلیدواژه : *حالت همدوس[۱]، گذارفازشکل[۲] ، نظریه بحران[۳]، سطوح انرژی پتانسیل[۴] ، دوشاخه شدگی[۵]*

مقدمه

گـذار فـاز کوانتومی در مقـدار بحرانی پارامترهای کنترلی و در دمای صـــفر رخ می دهد. مفهوم گذار فاز کوانتومی که گاهی اوقات گذار فاز در دمای صـــفر و یا گذار فاز حالت پایه نامیده می‌شـــود ، به تغییرات ناگهانی در حالت‌های تعادلی سیســتم اشــاره دارد. حالت یک سیســتم، تابعی از متغیرهای حالت(پارامتر نظم) و پارامترهای کنترلی می‌باشــد. گذار فاز کوانتومی در هســته‌های اتمی در اثر تغییرتعداد N یا Z رخ می‌دهد که موجب تغییرات ناگهانی در ساختار هسته‌ها می‌شود[۱]. این گذارها به طورگسترده‌ای در اوایل

---

۱ Coherent State
۲ Shape Phase Transition
۳ Catastrophe Theory
۴ Potential Energy Surfaces

دهه ی ۸۰ در چارچوب مدل بوزون اندرکنشی[٦] مورد مطالعه قرار گرفت. روش کلی در دهه‌ی ۷۰ توسط گیلموربا اســتفاده از ترکیب حالت‌های همدوس[۲] با نظریه ی بحران[۳] بنیان گذاری شــدو توســط دیپرینک،اسـکالتن و یاکللو و فنگ، گیلمور و دینز و کاستانو لوپز-مورنو در فیزیک هسته‌ای به کار گرفته شد.[٤-۷]

روش کار

هامیلتونین گذار $U(5)-SO(6)$ در مدل بوزون اندرکنشی بر اساس مولدهای جبر $SU(1,1)$ به شکل زیر است[۸]

$$H = gS_0^+S_0^- + \alpha S_1^0 + \gamma\hat{C}_2\big(SO(5)\big) + \delta\hat{C}_2\big(SO(3)\big) \qquad (1)$$

که در آن g و α و γ و δ پارامترهای حقیقی‌اند. $\hat{C}_2(SO(5))$ و $\hat{C}_2(SO(3))$ کازمیر گروه‌های $SO(5)$ و $SO(3)$ هستند. با استفاده از روابط جبر $SU(1,1)$، برای جمله‌ی اول هامیلتونین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} gS_0^+S_0^- = \frac{g}{4}\Big(&c_s^2 s^\dagger s^\dagger ss + c_s c_d s^\dagger s^\dagger(\tilde{d}.\tilde{d}) + c_s c_d(d^\dagger.d^\dagger)ss \\ &+ c_d^2(d^\dagger.d^\dagger)(\tilde{d}.\tilde{d})\Big) \end{aligned} \qquad (2)$$

به همین ترتیب برای جمله‌ی دوم نیز داریم:

$$\begin{aligned} S_n^0 &= c_s^{2n} S^0(s) + c_d^{2n} S^0(d) \\ \alpha S_1^0 &= \alpha\left(\frac{c_s^2}{4}(s^\dagger s + s^\dagger s) + \frac{c_d^2}{4}\sum_\mu(d_\mu^\dagger d_\mu + d_\mu d_\mu^\dagger)\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

بنابراین در هامیلتونین (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H = \frac{g}{4}\Big(&c_s^2 s^\dagger s^\dagger ss + c_s c_d s^\dagger s^\dagger(\tilde{d}.\tilde{d}) + c_s c_d(d^\dagger.d^\dagger)ss \\ &+ c_d^2(d^\dagger.d^\dagger)(\tilde{d}.\tilde{d})\Big) \\ &+ \alpha\left(\frac{c_s^2}{4}(s^\dagger s + s^\dagger s) + \frac{c_d^2}{4}\sum_\mu(d_\mu^\dagger d_\mu + d_\mu d_\mu^\dagger)\right) \\ &+ \gamma\hat{C}_2(SO(5)) + \delta\hat{C}_2(SO(3)) \end{aligned} \qquad (4)$$

---

[٦] Interacting Boson Model (IBM)

با توجه به رابطه ی (٤) مشــاهده می‌نماییم، درصــورتی که $c_d = c_s$ باشــد هامیلتونین گذاری معادل با هامیلتونین $SO(6)$ می‌شــود و وقتی $c_s=0$ و $c_d \neq 0$ باشــد، معادل با هامیلتونین $U(5)$ میگردد. بنابراین تنها شرایط $c_d \neq c_s \neq 0$، متناظر با حالت گذاری $U(5) - SO(6)$ می‌باشد[۹].

کازمیر گروه $SO(5)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{C}_2(SO(5)) = [d^\dagger \times \tilde{d}]^3_k.[d^\dagger \times \tilde{d}]^3_k + [d^\dagger \times \tilde{d}]^1_k.[d^\dagger \times \tilde{d}]^1_k \tag{5}$$

که در آن $\tilde{d}_m = (-1)^{2-m} d_{-m}$. به‌همین ترتیب کازمیر گروه $SO(3)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{C}_2(SO(3)) = [d^\dagger \times \tilde{d}]^1_k.[d^\dagger \times \tilde{d}]^1_k = \sum_{q_2=-1}^{+1} (-1)^{q_2}[d^\dagger \times \tilde{d}]^1_{q_2}[d^\dagger \times \tilde{d}]^1_{-q_2} \tag{6}$$

می توان کازیمیرهای گروههای $SO(5)$ و $SO(3)$ را برحسب عملگرهای خلق و فنای بوزونی نوشت. اثر

عملگرهای خلق و فنای بوزونی بر روی این حالت‌های همدوس به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
d|N,\alpha_m\rangle &= N\alpha_m|N-1,\alpha_m\rangle \\
s|N,\alpha_m\rangle &= N|N-1,\alpha_m\rangle \\
d^\dagger_m|N,\alpha_m\rangle &= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\frac{\partial}{\partial\alpha_m}|N+1,\alpha_m\rangle \\
s^\dagger_m|N,\alpha_m\rangle &= \left(1-\frac{1}{\mathrm{N}+1}\alpha_m\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\right)|N+1,\alpha_m\rangle
\end{aligned} \tag{7}$$

از رابطه‌ی زیر برای محاسبه ی سطح انرژی استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{\langle N,\alpha_m|H|N,\alpha_m\rangle}{\langle N,\alpha_m|N,\alpha_m\rangle} \tag{8}$$

بنابراین سطح انرژی برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}
E(\beta,\gamma) = &\frac{g}{4}\left(\frac{N(N-1)}{(1+\beta^2)^2}\right)(c_s^2 + 2c_s c_d\beta^2 + c_d^2\beta^4) + \frac{\alpha c_s^2}{4}\left(\frac{2N}{1+\beta^2}+1\right) \\
&+ \frac{\alpha c_d^2}{4}\left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2}+5\right) + 2\frac{\gamma N\beta^2}{1+\beta^2} + \frac{3}{5}\frac{\delta N\beta^2}{1+\beta^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

یکی از روش‌های متداول درزمینه‌ی مطالعه گذارفاز درهسته‌ها ، استفاده از روش نظریه‌ی بحران می‌باشد. این نظریه تلاش دارد با درنظر گرفتن وابســتگی جواب‌های معادلات به پارامترهای ظاهر شــده درآن‌ها، چگونگی تغییر کیفی جواب‌ها را بررســی کند وروش مناســبی را برای مدل ســازی ســیســتم هایی که با تغییرات ناگهانی همراه هســتند ، ارائه می نماید. دراین روش، اولین مرحله یافتن نقاط بحرانی ســطوح

انرژی و تعیین مورس یا نامورس[7] بودن آن‌ها می‌باشد. درنقاط مورس می‌توان سطوح انرژی را توسط تابع درجه دومی تقریب زد، درحالی‌که در نقاط نامورس انجام چنین‌کاری امکان‌پذیر نیست و سطوح انرژی به شکل توابع بحرانی که متشکل از جرم و اختلال می‌باشند ، نوشته می‌شوند. اختلال در همسایگی یک نقطه غیربحرانی تاثیری در مشخصات کمی سیستم ندارد درحالی‌که درحوالی یک نقطه نامورس ، اختلال ماهیت سیستم را تغییر می‌دهد. درمرحله بعدی درنقاط بحرانی نامورس ابتدا مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی راتعیین می‌کنیم. این مجموعه، مکان هندسی نقاط بحرانی است که دارای تبهگنی بوده و گذار از یک مینیمم نسبی به مینیمم نسبی دیگرصورت می‌گیرد. این شرایط ازتکتایی ماتریس هسین[8] یا ماتریس پایداری حاصل می‌شود. درصورتی که فرض کنیم $v(x_1, x_2, \dots, x_k)$باشد، برای نقاط بحرانی تبهگن داریم:

$$\begin{aligned} &\nabla v(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \\ &det\left|v_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_k)\right| = 0_{crit.pt.} \end{aligned} \tag{10}$$

حال نظریه‌ی بحران معرفی شده در قسمت قبل را بر هامیلتونین گذاری $U(5) - SO(6)$ اعمال می‌کنیم. مطابق نظریه‌ی بحران،سطح انرژی حول نقطه $\beta = 0$ بسط سری تیلور داده می شود

مرحله بعد تعیین مجموعه‌ی دوشاخه‌شدگی است که این مجموعه مکان هندسی نقاطی در فضای

$$\begin{aligned} E(\beta) = &\frac{g}{4}N(N-1)c_s^2 + \frac{N}{2}\alpha c_s^2 + \frac{1}{4}\alpha(c_s^2 + 5c_d^2) \\ &+ \frac{1}{2}[N(N-1)gc_s(c_d - c_s) + N(\alpha(c_d^2 - c_s^2) + \frac{6}{5}\delta + 4\gamma)]\beta^2 \\ &+ \Big[\frac{3}{4}N(N-1)gc_s^2 - N(N-1)gc_dc_s + \frac{1}{4}N(N-1)gc_d^2 + \frac{1}{2}N\alpha(c_s^2 - c_d^2) \\ &\qquad - \frac{3}{5}N\delta - 2N\gamma\Big]\beta^4 + O(5) \end{aligned} \tag{11}$$

پارامترهای کنترلی اساسی است که گذار از یک مینیمم نسبی به مینیمم نسبی دیگر اتفاق می افتدرا تعیین می کند.این مجموعه از شرط صفر شدن ماتریس پایداری به دست می آید. این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{ij} = \left.\frac{\partial^2 E(x_i, x_j)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_1^c, x_2^c} \tag{12}$$

[7] Morse or Non-Morse

[8] Hessian Matrix

آنگاه ازشـرایط گفته شـده برای مجموعه‌ی شـاخه‌بندی، وباتوجه به تک متغیره بودن تابع سـطح انرژی ، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}\left[N(N-۱)gc_s(c_d-c_s)+N\left(\alpha(c_d^۲-c_s^۲)+\frac{٦}{٥}\delta+٤\gamma\right)\right]=۰ \qquad (۱۳)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی فوق برای مجموعه شاخه‌بندی به رابطه‌ی زیر برای تعیین c_s می‌رسیم :

$$c_s=\frac{g(N-۱)c_d+\sqrt{g^۲(N-۱)^۲c_d^۲+٤[g(N-۱)+\alpha]\left[\alpha c_d^۲+٤\gamma+\frac{٦}{٥}\delta\right]}}{۲(g(N-۱)+\alpha)} \qquad (۱٤)$$

نتایج

مطابق مفاهیم اشـاره شـده در بخش قبل، هامیلتونین گذار، معادله (٤)، به ازای مقادیر مختلف c_s و c_d ، بیانگر تقارن‌های $U(٥)$ یا $SO(٦)$ و یا حالت گذاری $SO(٦)\leftrightarrow U(٥)$ می باشـد. در محاسـبات این مقاله، پارامتر c_d برابربا ۱ فرض شـده و برای تحلیل حالت‌های تقارنی مختلف، تغییرات c_s را در نظر می‌گیریم. $c_s=۰$ حـد تقـارنی $U(٥)$ و $c_s=۱$ حد تقارنی $SO(٦)$ را نتیجه می‌دهد بنابراین انتظار داریم $c_s=۰.٥$ بهترین حالت گذار فازی میان دو حد تقارنی (تقارن نقطه‌ی بحرانی $E(٥)$) باشـد. در جـداول زیر با اسـتفاده از روش کمترین مربعات، سـایر پارامترهای ظاهر شـده در هامیلتونین را برای هسته‌های مختلف، برازش می‌کنیم که مقادیر مربوطه در جدول (۱) برای ایزوتوپ های محتاف هسته Ru نمایش داده شده است.

هسته	c_d	g	α	γ	δ
Ru	۱	۱	٤,٤٧٧۰	-۱,۲٤٥۱	-۰,۰۲۳۷

جدول ۱: پارامترهای **هامیلتونین که با استفاده از داده های تجربی**. برای **ایزوتوپ‌های مختلف هسته** Ru برازش شده **است**.

حال با اسـتفاده از این مقادیر در رابطه (۱٤)، مقدار پارامتر کنترلی به ازا ایزوتوپ های مختلف هسـته Ru حاصل می گردد که در جدول (۲) بیان شده است.

ایزوتوپ	$^{100}_{44}Ru$	$^{102}_{44}Ru$	$^{104}_{44}Ru$	$^{106}_{44}Ru$	$^{108}_{44}Ru$	$^{110}_{44}Ru$
N	٦	٧	٨	٩	۱۰	۱۱
c_s	۰,۳٨	۰,٤٦	۰,٥۲	۰,٥٦	۰,٦۰	۰,٦۳

جدول ۲:.**مقادیر پارامتر کنترلی برای ایزوتوپ های مختلف هسته** Ru.

با تکرار فرآیند اشاره شده برای ایزوتوپ های هسته Pd، ثابت ها هامیلتونین محاسبه می گردد.

هسته	c_d	g	α	γ	δ
Pd	۱	۱	٤,۰۲۱۸	-۱,۰۰۱۳	۰,۰۱٤۷

جدول ۳: پارامترهای **هامیلتونین که با استفاده از داده های تجربی**. برای **ایزوتوپ‌های مختلف هسته** Pd برازش شده **است.**

مجددا با اســـتفاده از این مقادیر در رابطه (١٤)، مقدار پارامتر کنترلی به ازا ایزوتوپ های مختلف هســـته Pd حاصل می گردد که در جدول (٤) بیان شده است.

ایزوتوپ	$^{102}_{46}\mathrm{Pd}$	$^{104}_{46}\mathrm{Pd}$	$^{106}_{46}\mathrm{Pd}$	$^{108}_{46}\mathrm{Pd}$	$^{110}_{46}\mathrm{Pd}$	$^{112}_{46}\mathrm{Pd}$
N	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
c_s	٠,٥١	٠,٥٦	٠,٦٠	٠,٦٤	٠,٦٧	٠,٦٩

جدول ٤:مقادیر پارامتر کنترلی برای ایزوتوپ های مختلف هسته Pd.

نتایج محاسبات حاکی ازآن است که اولا در ناحیه گذاری $U(٥) \leftrightarrow SO(٦)$، گذار فاز در یک نقطه‌ی ایزوله اتفاق می‌افتد و ناحیه همزیستی فازها مشاهده نمی‌شود، ثانیا با توجه به مقادیر c_s ملاحظه می‌نماییم که در بین ایزوتوپ‌های مختلف Ru و Pd، $^{104}_{44}Ru$ و $^{102}_{46}Pd$ کاندید نقطه تقارن بحرانی $E(٥)$ درمثلث کاستن می‌باشند

بحث و نتیجه‌گیری

ناحیه گذاری $U(٥) \leftrightarrow SO(٦)$ با اســـتفاده از نظریه بحرانمطالعه شـــده ورابطه ای برای نقطه‌ی دقیق گـذارفـازی بـه‌دســـت می‌آید. در این ناحیه، گذار فاز در یک نقطه‌ی ایزوله اتفاق می‌افتد. همچنین نتایج معزف وجود گذار فازی مرتبه دوم و همچنین عدم وجود ناحیه همزیســـتی فازها می باشـــد. با توجه به مقادیر پارامتر کنترلی، c_s ، در بین ایزوتوپ‌های مختلف Ru و Pd ، دو هسته $^{104}_{44}Ru$ و $^{102}_{46}Pd$ کاندید نقطه‌ی بحرانی $E(٥)$ می‌باشند.

مراجع

[۱].E. Lopez-Moreno, O.Castanos, Phys. Rev. C ٥٤ (١٩٩٦)٢٣٧٤; Rev. Mex. Fıs. ٤٩(٢٠٠٣)١٥.
[۲].PavelCejnar, Jan Jolie, Richard F. Casten, Rev. Mod.Phys. ٨٢(٢٠١٠)٢١٥٥
[۳].Shakin, Y.R. Waghmare, and M.H. Hull, Phys. Rev.١٦١(١٩٦٧)١٠٠٦.
[٤].A. Bohr and B. R. Mottelson,'Collective and Individual-Particle aspects Of Nuclear Structure' Mat. Fys. Dan. Vid. Selsk, Vol. ٢٧, p. ١٧٤,(١٩٥٣).
[٥].A. Bohr and B. R. Mottelson, 'Nuclear Structure' Vol. ٢.(١٩٧٥),
[٦] A.E.L. Dieperink, O. Scholten and F. Iachello, Phys. Rev. Lett. ٤٤(١٩٨٠)١٧٤٧.
[٧].Dieperink and O. Scholten, Nucl. Phys.A. ٣٤٦ (١٩٨٠)١٢٥.
[٨]. W.-M. Zhang, D.H. Feng and R. Gilmore, Rev. Mod. Phys. ٦٢(١٩٩٠)٨٦٧.
[٩]. R. Gilmore, J. Math. Phys. ٢٠(١٩٧٩)٨٩١.