

محاسبه اثر پراکندگی کشسان هسته‌ای در توان توقف ذرات باردار در پلاسمای همجوشی

طه کوهرخ، محمد مهدوی*

دانشگاه مازندران، دانشکده علوم، بخش فیزیک

چکیده:

سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کشسان یک پرتابه از یون‌های پلاسما شامل سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کشسان کولنی، سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کشسان هسته‌ای و جمله مربوط به اثر تداخلی هسته‌ای-کولنی است. با توجه به اینکه در پلاسمای همجوشی تابع توزیع ذرات پس‌زمینه پلاسما در شرایط تعادل حرارتی به صورت تابع توزیع ماکسول-بولتزمن می‌باشد، در این مقاله با استخراج سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی کشسان هسته‌ای و جمله مربوط به اثر تداخلی از داده‌های تجربی و همچنین حل معادله بولتزمن، توان توقف ذره باردار در نتیجه پراکندگی کشسان هسته‌ای در پلاسمای همجوشی محاسبه شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که پدیده اصلی در توقف پروتون‌های پرتانرژی در پلاسمای داغ پراکندگی کشسان هسته‌ای می‌باشد.

کلمه کلیدی: پراکندگی کشسان هسته‌ای، تابع توزیع ماکسول-بولتزمن، توان توقف

۱- مقدمه

فرآیندهای مؤثر در توقف ذرات باردار در یک پلاسما عبارتند از: ۱- پراکندگی کشسان کولنی با الکترون‌های حرارتی ۲- تداخل متقابل پراکندگی کشسان کولنی و هسته‌ای با یون‌های حرارتی ۳- برهمکنش‌های هسته‌ای با یون‌های حرارتی. اندازه‌گیری سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان ذرات باردار بر یون‌ها شامل پراکندگی کولنی، پراکندگی هسته‌ای و همچنین تداخل متقابل مؤلفه‌های کولنی و هسته‌ای می‌شود. از آنجایی که پراکندگی کولنی کاملاً شناخته شده است، با تفریق سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان کولنی از سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان اندازه‌گیری شده می‌توان سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان هسته‌ای و جمله مربوط به اثر تداخلی را بدست آورد. توزیع زاویه‌ای پراکندگی کولنی روبه‌جلو است. در وضعیتی که در آن برهمکنش کولنی غالب است، توقف ذره باردار توسط تعداد زیادی پراکندگی زاویه کوچک انجام می‌گیرد که هرکدام از این پراکندگی‌ها انرژی اندکی از ذره پرتابه تلف می‌کنند. بنابراین در یک مدل ساده می‌توان اینطور تصور کرد که پرتابه در یک مسیر تقریباً مستقیم طی مسیر کرده و انرژی خود را با آهنگ dE_p/dt از دست می‌دهد. از طرف دیگر، پراکندگی کشسان هسته‌ای^۱ و اثر تداخل پراکندگی کشسان هسته‌ای-کولنی^۲ (NI) باعث پراکندگی در زاویای بزرگ می‌شوند و در نتیجه انرژی زیادی از پرتابه می‌گیرند. بنابراین اگرچه سطح مقطع

¹ Nuclear Elastic Scattering² Nuclear-Coulomb Interference Elastic Scattering

NI از سطح مقطع کولنی کمتر است، اما اثر دو فرآیند بر توقف پرتابه می‌تواند مشابه باشد. Devaney و Stein اولین کسانی بودند که اثر پراکندگی کشسان هسته‌ای را در آهنگ توقف ذرات باردار در پلاسما بررسی کردند [۱]. در عبارت بدست آمده توسط آن‌ها از حرکت یون‌های پلاسما صرف‌نظر شده است. در این مقاله با احتساب حرکت یون‌های پلاسما، توان توقف یک پرتابه که در پلاسما متعادل با تابع توزیع ماکسول-بولتزمن طی مسیر می‌کند، بدست آمده است.

۲- تغییر انرژی پرتابه در نتیجه یک برخورد کشسان

پرتابه‌ای را با جرم m_p در نظر می‌گیریم که با سرعت \mathbf{v}_p در دستگاه آزمایشگاه به هدفی با جرم m_b و سرعت \mathbf{v}_b برخورد می‌کند. (حروف درشت کمیت‌های برداری و حروف غیردرشت اندازه کمیت را نشان می‌دهند). سرعت مرکزجرم این سیستم از نظر سیستم مختصات آزمایشگاه برابر است با:

$$\mathbf{V} = \frac{m_p \mathbf{v}_p + m_b \mathbf{v}_b}{m_p + m_b} \quad (1)$$

ارتباط سرعت دو ذره قبل از برخورد در دستگاه مرکزجرم با سرعت مرکزجرم و مقادیر آن‌ها در دستگاه آزمایشگاه عبارتست از:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_p = \mathbf{V} + \mathbf{v}_p^c \\ \mathbf{v}_b = \mathbf{V} + \mathbf{v}_b^c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_p^c = \mathbf{v}_p - \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_b^c = \mathbf{v}_b - \mathbf{V} \end{cases} \quad (2)$$

که با جاگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_p^c = \mathbf{v}_p - \mathbf{V} = \mathbf{v}_p - \frac{m_p \mathbf{v}_p + m_b \mathbf{v}_b}{m_p + m_b} = \frac{m_b}{m_p + m_b} (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_b) \\ \mathbf{v}_b^c = \mathbf{v}_b - \mathbf{V} = \mathbf{v}_b - \frac{m_p \mathbf{v}_p + m_b \mathbf{v}_b}{m_p + m_b} = \frac{m_p}{m_p + m_b} (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_p) = -\frac{m_p}{m_p + m_b} (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_b). \end{cases} \quad (3)$$

مستقیماً از این رابطه نتیجه می‌شود که سرعت نسبی پرتابه و هدف از انتخاب سیستم مختصات مستقل بوده و در هر دو دستگاه با هم برابر است:

$$\mathbf{v}_{pb} = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_b = \mathbf{v}_p^c - \mathbf{v}_b^c. \quad (4)$$

همچنین از رابطه (۳) ملاحظه می‌شود که اندازه تکانه خطی ذرات را در سیستم مختصات مرکزجرم $|\mathbf{p}_p^c| = |\mathbf{p}_b^c| = m_{pb} v_{pb}$ که در آن $m_{pb} = m_p m_b / (m_p + m_b)$ جرم کاهش‌یافته سیستم پرتابه و هدف است، می‌توان بدست آورد. روابط (۱) تا (۴) بطور مشابه برای کمیت‌های بعد از برخورد که آن‌ها را پریم نشان خواهیم داد نیز برقرار است. به‌طور مشابه رابطه (۳) سرعت پرتابه در دستگاه مرکزجرم در حالت بعد از برخورد برابر است با:



$$\begin{cases} \mathbf{v}'_p = \mathbf{v}'_p - \mathbf{V} = \frac{m_b}{M_{pb}} \mathbf{v}'_{pb} \\ \mathbf{v}'_b = \mathbf{v}'_b - \mathbf{V} = -\frac{m_p}{M_{pb}} \mathbf{v}'_{pb} \end{cases} \quad (5)$$

با استفاده از بقاء تکانه خطی و انرژی جنبشی در دستگاه مرکز جرم می توان نشان داد که سرعت نسبی ذرات در قبل و بعد از پراکندگی با هم برابر است $|\mathbf{v}_{pb}| = |\mathbf{v}'_{pb}| = v_{pb}$ و در نتیجه برخورد کشسان تنها سرعت نسبی دچار تغییر زاویه خواهد شد که زاویه بین \mathbf{v}_{pb} و \mathbf{v}'_{pb} همان زاویه پراکندگی در دستگاه مرکز جرم است که آن را با Θ نمایش می دهیم.

اکنون به دنبال آن هستیم که تغییر انرژی جنبشی پرتابه را در دستگاه آزمایشگاه با استفاده از اطلاعات اولیه سیستم یعنی سرعت پرتابه \mathbf{v}_p ، سرعت هدف \mathbf{v}_b و همچنین زاویه بین سرعت های پرتابه و هدف θ بدست آوریم. با کم کردن رابطه (5) از (3) داریم:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_p^c = \mathbf{v}_p - \mathbf{V} = \frac{m_b}{M_{pb}} \mathbf{v}_{pb} \\ \mathbf{v}_p^c = \mathbf{v}'_p - \mathbf{V} = \frac{m_b}{M_{pb}} \mathbf{v}'_{pb} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}'_p = \mathbf{v}_p + \frac{m_b}{M_{pb}} \Delta \mathbf{v}_{pb} \quad (6)$$

به همین ترتیب با انجام محاسبات، تغییر انرژی پرتابه در نتیجه یک برخورد کشسان بر حسب زاویه پراکندگی در دستگاه مرکز جرم Θ ، سرعت پرتابه \mathbf{v}_p ، سرعت هدف \mathbf{v}_b و همچنین زاویه بین سرعت های پرتابه و هدف θ بصورت زیر حاصل خواهد شد:

$$E'_p - E_p = \left[\frac{(m_{pb} v_{pb})^2}{m_p} - m_{pb} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_{pb} \right] (1 - \cos \Theta) + m_{pb} v_p v_b \sin \theta \sin \Theta \quad (7)$$

۳- معادله بولتزمن و توان توقف ذرات باردار در برخوردهای کشسان

معادله بولتزمن برای چگالی فضای فاز $f_p(\mathbf{p}_p)$ ذره نوع p عبارت است از [۲]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla \right] f_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t) = \sum_b C_{pb}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t). \quad (8)$$

که در آن جمله برخوردی برای ذره نوع b برابر است با [۳]:

$$C_{pb}(\mathbf{p}_p) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}'_b}{(2\pi \hbar)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'_p}{(2\pi \hbar)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_b}{(2\pi \hbar)^3} |T(W, q^2)|^2 (2\pi \hbar)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}'_b + \mathbf{p}'_p - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_p) \quad (9)$$

$$(2\pi \hbar) \delta \left(\frac{1}{2} m_b v_b'^2 + \frac{1}{2} m_p v_p'^2 - \frac{1}{2} m_b v_b^2 - \frac{1}{2} m_p v_p^2 \right) [f_b(\mathbf{p}'_b) f_p(\mathbf{p}'_p) - f_b(\mathbf{p}_b) f_p(\mathbf{p}_p)]$$

این معادله برای توصیف پراکندگی ذرات با جرم m_p و m_b ، پراکندگی از تکانه‌های اولیه $|T(W, q^2)|$ با دامنه پراکندگی $\mathbf{p}_p = m_p \mathbf{v}_p$ ، $\mathbf{p}_b = m_b \mathbf{v}_b$ به تکانه‌های نهایی $\mathbf{p}'_p = m_p \mathbf{v}'_p$ ، $\mathbf{p}'_b = m_b \mathbf{v}'_b$ وابسته به انرژی مرکزجرم W و مربع تکانه انتقال یافته q^2 به کار می‌رود. همچنین خصوصیت جنبشی کامل از فرآیند پراکندگی، شامل جزئیات تقارن توازن را به طور صریح به نمایش می‌گذارد و نشان می‌دهد که جمله برخوردی (۹) هنگامی که همه ذرات با چگالی متناسب با $f(\mathbf{p}) \sim \exp\{-\beta m v^2/2\}$ در تعادل حرارتی هستند به علت بقاء انرژی وارد شده توسط تابع دلتا، از بین می‌رود.

به طور کلی با کمیتی وابسته به تکانه مانند $q(\mathbf{p})$ که برای ذرات نوع p چگالی فضایی و بردار شار به صورت زیر می‌دهند سروکار داریم:

$$Q_p(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi\hbar)^3} q(\mathbf{p}_p) f_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t), \quad (10)$$

$$F_p^k(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi\hbar)^3} q(\mathbf{p}_p) \frac{p_p^k}{m_p} f_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t). \quad (11)$$

در نتیجه معادله بولتزمن (۸) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_p(\mathbf{r}, t) + \nabla^k F_p^k(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi\hbar)^3} q(\mathbf{p}_p) \sum_b C_{pb}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t). \quad (12)$$

جمع، برخورد با ذرات پلاسما را شامل می‌شود. در نتیجه تعریف مشخصی از آهنگ تبادل به هر ذره b در پلاسما داریم. دامنه پراکندگی، تابع دلتا و انتگرال‌های تکانه در جمله برخوردی تحت تعویض ذرات اولیه و نهایی متقارنند. بنابراین می‌توانیم تعویض زیر را انجام دهیم:

$$q(\mathbf{p}_p) [f_b(\mathbf{p}'_b) f_p(\mathbf{p}'_p) - f_b(\mathbf{p}_b) f_p(\mathbf{p}_p)] \rightarrow [q(\mathbf{p}'_p) - q(\mathbf{p}_p)] f_b(\mathbf{p}_b) f_p(\mathbf{p}_p). \quad (13)$$

جمله برخوردی را در معادله (۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi\hbar)^3} q(\mathbf{p}_p) \sum_b C_{pb}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t) = - \sum_b \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi\hbar)^3} f_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}_p, t) \frac{dQ_{pb}}{dt}, \quad (14)$$

علامت طوری انتخاب شده است که dQ_{pb}/dt نشان‌دهنده شارش کمیت Q از ذرات p به ذرات پلاسما b است. به طور کلی سطح مقطع برای پراکندگی ذره p از روی ذره b به بازه تکانه Δ برابر است با:

$$v_{pb} \int_{\Delta} d\Omega \left(\frac{d\sigma_{pb}}{d\Omega} \right) = \int_{\Delta} \frac{d^3 \mathbf{p}'_b}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'_p}{(2\pi\hbar)^3} |T(W, q^2)|^2 (2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}'_b + \mathbf{p}'_p - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_p) (2\pi\hbar) \delta \left(\frac{1}{2} m_p v_p'^2 + \frac{1}{2} m_b v_b'^2 - \frac{1}{2} m_p v_p^2 - \frac{1}{2} m_b v_b^2 \right). \quad (15)$$

با استفاده از این تعریف خواهیم داشت:

$$\frac{dQ_b}{dt} = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}_b}{(2\pi\hbar)^3} f_b(\mathbf{p}_b) v_{pb} \int d\Omega \left(\frac{d\sigma_{pb}}{d\Omega} \right) [q(\mathbf{p}'_p) - q(\mathbf{p}_p)]. \quad (16)$$

اکنون می توان این ملاحظات را برای آهنگ تبادل انرژی dE_b/dt بصورت زیر بدست آورد:

$$\frac{dE_b}{dt} = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}_b}{(2\pi \hbar)^3} f_b(\mathbf{p}_b) v_{pb} \int d\Omega \left(\frac{d\sigma_{pb}}{d\Omega} \right) [E'_p - E_p]. \quad (17)$$

رابطه (۱۷) بیانگر آهنگ تغییر انرژی پرتابه است که برابر است با تغییر انرژی پرتابه در یک برخورد، ضربدر آهنگ برخوردها. با جاگذاری رابطه (۷) برای تغییر انرژی پرتابه در یک برخورد کشسان در این رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{dE_b}{dt} = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}_b}{(2\pi \hbar)^3} f_b(\mathbf{p}_b) v_{pb} \int d\Omega \left(\frac{d\sigma_{pb}}{d\Omega} \right) \left\{ \left[\frac{(m_{pb} v_{pb})^2}{m_p} - m_{pb} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_{pb} \right] (1 - \cos \Theta) + m_{pb} v_p v_b \sin \theta \sin \Theta \right\} \quad (18)$$

برای محاسبه توان توقف پرتابه در نتیجه برخورد کشسان هسته ای و جمله تداخل هسته ای-کولنی، کافی است سطح مقطع پراکندگی کشسان هسته ای و تداخلی (NI) را در رابطه (۱۸) قرار دهیم و از رابطه $dE/dx = (1/v_p) dE/dt$ استفاده کنیم:

$$\frac{dE^{NI}}{dx} = - \frac{dE_p^{NI}}{dx} = \sum_b \frac{dE_b^{NI}}{dx} = - \sum_b \frac{1}{v_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_b}{(2\pi \hbar)^3} f_b(\mathbf{p}_b) v_{pb} \int d\Omega \left(\frac{d\sigma_{pb}^{NI}}{d\Omega} \right) \left\{ \left[\frac{(m_{pb} v_{pb})^2}{m_p} - m_{pb} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_{pb} \right] (1 - \cos \Theta) + m_{pb} v_p v_b \sin \theta \sin \Theta \right\} \quad (21)$$

که در آن $f_b(\mathbf{p}_b)$ تابع توزیع ماکسول-بولتزمن ذره b است:

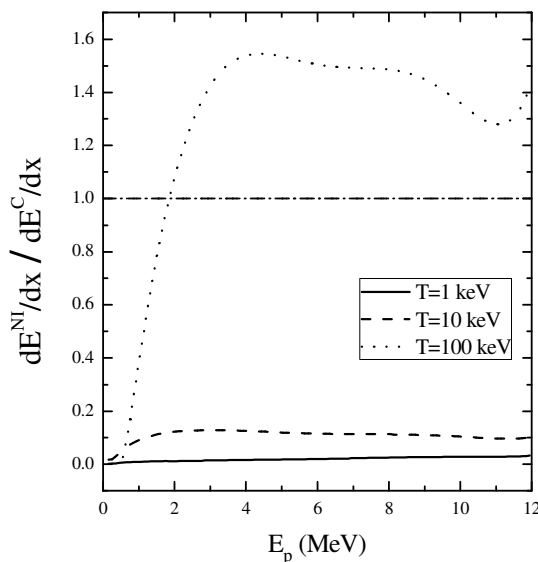
$$f_b(\mathbf{p}_b) = n_b \left(\frac{2\pi \hbar^2 \beta_b}{m_b} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \beta_b m_b v_b^2 \right\} \quad (22)$$

که در آن چگالی n_b و $\beta_b = 1/T_b$ معکوس دما ذره b است.

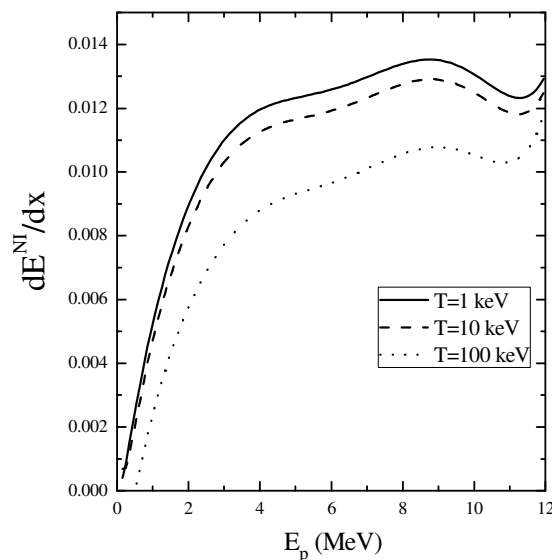
۴- نتیجه گیری

با محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان کولنی (رادرفورد) و تفاضل آن از سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان ارائه شده در منابع [۴]، سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان NI برای واکنش های $D(p,p)D$ و $T(p,p)T$ بدست آمده است. به کمک رابطه (۲۱) ارائه شده و جایگذاری سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان NI بدست آمده در آن، توان توقف پرتابه پروتونی در اثر پراکندگی کشسان هسته ای dE^{NI}/dx در پلاسمای همجوشی هم مولار دوتریوم-تریوم با چگالی $n = 5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ برای دماهای $T = 1 \text{ keV}$ ، $T = 10 \text{ keV}$ و $T = 100 \text{ keV}$ محاسبه شده است (شکل (۱)). همانطور که ملاحظه می شود توان توقف dE^{NI}/dx با

افزایش انرژی پرتابه، افزایش می یابد. همچنین مشاهده می شود که با افزایش دمای پلاسمای محیط بدلیل افزایش انرژی ذرات پس زمینه پلاسمای، توان توقف کاهش می یابد. به منظور بررسی اثر پراکندگی کشسان هسته ای نسبت توان توقف dE^{NI}/dx به توان توقف کولنی dE^C/dx [۵]، در شرایط مشابه شکل (۱) محاسبه شده است (شکل (۲)). ملاحظه می شود با افزایش دمای پلاسمای تأثیر پراکندگی کشسان هسته ای در توقف پرتابه پروتونی بیشتر می شود. به طوریکه این افزایش برای پروتون با انرژی $E_p \geq 2 \text{ MeV}$ در پلاسمای با دمای $T = 100 \text{ keV}$ کاملاً مشهود است. بنابراین محاسبات نشان می دهند که اگرچه با افزایش دمای پلاسمای توان توقف dE^{NI}/dx کاهش می یابد، اما نسبت آن به توان توقف کولنی dE^C/dx افزایش خواهد یافت. در نتیجه فرآیند غالب برای توقف پروتون های پُرانرژی در پلاسمای داغ پراکندگی کشسان هسته ای خواهد بود.



شکل (۲): نسبت توان توقف پرتابه پروتونی در اثر پراکندگی کشسان به توان توقف کولنی بر حسب انرژی در پلاسمای همجوشی هم مولار دوتریوم-تریوم با چگالی $n = 5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ و دماهای $T = 100 \text{ keV}$ و $T = 10 \text{ keV}$ ، $T = 1 \text{ keV}$



شکل (۱): توان توقف پرتابه پروتونی در اثر پراکندگی کشسان هسته ای بر حسب انرژی در پلاسمای همجوشی هم مولار دوتریوم-تریوم با چگالی $n = 5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ و دماهای $T = 100 \text{ keV}$ و $T = 10 \text{ keV}$ ، $T = 1 \text{ keV}$

مراجع:

- [1] J. E. Devaney and M. L. Stein, *Nucl. Sci. Eng.*, **46** (1971) 232.
- [2] D. Kremp, M. Schlages and W. D. Kraeft (2005) *Quantum Statistics of Nonideal Plasmas* (Berlin: Springer).
- [3] P. Danielewicz, *Ann. Phys.* **152** (1984) 239.
- [4] M.B. Chadwick *et al* (2006) ENDF/B-VII.0: Next generation evaluated nuclear data library for nuclear science and technology *Nucl. Data Sheets*.
- [5] L. S. Brown, D. L. Preston and R. L. Singleton Jr., *Phys. Rep.* **410** (2005) 237-333.