جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

معرفی توابع لوباتوجهت حل معادله ترابرد درمختصات یک بعدی با استفاده از روش اجزای محدود طیفی

محمدرضاعباسی * – احمدرضاذوالفقاری – عبدالحمیدمینوچهر
دانشگاه شهید بهشتی – دانشکده مهندسی هسته ای

چکیده

حل معادله ترابرد با استفاده از توابع درجات بالادر روش اجزای محدود مستلزم تغییر در انتگرال های قسمت مکانی و ماتریس های توابع پایه می باشد.. در این مقاله از بسط هارمونیک های کروی با پاریته زوج[1] برای وابستگی زاویه ای شار و از روش اجزای محدود طیفی[2] و بسط توابع لوباتو[3] برای بخش مکانی معادله ترابرد استفاده شده است که علاوه بر سادگی روابط در انتگرال های مکانی و بالا بردن درجه هر المان شکل ماتریس های توابع پایه حفظ می شود و همچنین زمان اجرای برنامه کاهش محسوسی خواهد داشت. شار نوترون و همچنین ضریب تکثیر موثر برای محیطهای یک بعدی محاسبه شده و نتایج بست آمده و زمان اجرای برنامه مورد بررسی قرار گرفته است.

کلید واژه: معادله ترابرد نوترون- روش اجزای محدود طیفی –بسط هارمونیک های کروی - اصل تغییر پذیری- توابع لوباتو

مقدمه

معادلهٔ اساسی که توزیع جمعیت نوترونی در یک محیط را ارائه می کند از طریق انجام موازنهٔ نوترون برروی واکنش های مختلف نوترون از قبیل تولید، فرار، جذب در یک المان حاصل می گردد که معادله ترابرد نوترون نام دارد[1]. در طی سالهای گذشته روش های مختلفی از قبیل جهت های مجزا[4][2,7]، مونت کارلو[5] [2,7] روش نودال [6][8]وبسط هارمونیک های کروی [1] برای حل معادلهٔ ترابرد بکار گرفته شده اند. در این مقاله نیز هدف حل معادلهٔ ترابرد نوترون در محیط های یک بعدی با استفاده از روش اجزاء محدود طیفی برای بخش مکانی و استفاده از بسط هارمونیک های کروی زوج برای قسمت زاویه ای می باشد. از مزایای روش اجزای محدود طیفی این است که تعداد المان های بکار رفته در حل معدله ترابرد کاهش چشمگیری داشته و دقت محاسبات افزایش می یابد. همچنین زمان حل معادله به عنوان پارامتری مهم کاهش پیدا می کند.

---

[1] Even parity
[2] Spectral Finite Element Method
[3] Lobatto Function
[4] Discrete Ordinate Method
[5] Monte Carlo Method
[6] Nodal Method

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

توابع پایه شکلی در روش اجزای محدود طیفی

فرض کنید می خواهیم جواب های معادله ترابرد را در(l) المان با چند جمله ای های p(l) تقریب بـزنیم [1,2] . برای سادگی درجه هر المان را m فرض می کنیم که هر المان می تواند درجه خاص خـود را داشـته باشـد همچنین با تعریف متغیر ζ حدود هر المان را می توان بین (-1,1) تعیین نمود.

$$x(\zeta)=\frac{1}{2}(X_2^{(l)}+X_1^{(l)})+\frac{1}{2}(X_2^{(l)}-X_1^{(l)})\zeta \qquad (۱)$$

که در آن $X_1^{(l)}$ مختصات نقطه اول المان (l) و $X_2^{(l)}$ مختصات نقطه دوم المان (l) می باشد. در روش اجـزای محدود از توابع لاگرانژ استفاده می شود[1,3]. توابع لاگرانژ درجه m را برای هر المان می توان بصورت زیـر تعریف نمود.

$$\psi_i(\zeta)=\frac{(\zeta-\zeta_1).....(\zeta-\zeta_{m+1})}{(\zeta_i-\zeta_1).....(\zeta_i-\zeta_{m+1})} \qquad (۲)$$

که برای نقاط $i=1,2,.....,m+1$ این چندجمله ای ها شرایط زیر را برآورده می کنند [1,5]:

$$\psi_i(\zeta_j)=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases} \qquad (۳)$$

رابطه (۲) را می توان به صورت معادل زیر نوشت.

$$\psi_i(\zeta)=\frac{\Phi_{m+1}(\zeta)}{(\zeta-\zeta_1)\Phi'_{m+1}(\zeta_i)} \qquad (۴)$$

که در آن[1,3]:

$$\Phi_{m+1}(\zeta)=(\zeta-\zeta_1).....(\zeta-\zeta_{m+1}) \qquad (۵)$$

یک تابع درجه m+1 می باشد.

متغیـر x را بـر حسـب متغیـر ζ مـی تـوان نوشـت بـا توجـه بـه اینکـه $h_1=X_2^{(l)}-X_1^{(l)}$ طـول المـان و $dx=\frac{h_1}{2}d\zeta$ می باشد.

ماتریس های مکانی در مختصات یک بعدی

انتگرال های قسمت مکانی در مختصات یک بعدی برای هر المان به دو صورت زیر می باشند.

$$A_{ij}^{(l)}=\int_{X_1^{(l)}}^{X_2^{(l)}}\frac{d\psi_i(x)}{dx}\frac{d\psi_j(x)}{dx}dx=\frac{2}{h_1}\int_{-1}^{1}\frac{d\psi_j(\zeta)}{d\zeta}\frac{d\psi_j(\zeta)}{d\zeta}d\zeta \qquad (۶)$$

$$B_{ij}^{(l)}=\int_{X_1^{(l)}}^{X_2^{(l)}}\psi_i(x)\psi_j(x)dx=\frac{h_1}{2}\int_{-1}^{1}\psi_i(\zeta)\psi_j(\zeta)d\zeta \qquad (۷)$$

$$C_i^{(l)}=\int_{X_1^{(l)}}^{X_2^{(l)}}\psi_i(x)\,dx=\frac{h_1}{2}\int_{-1}^{1}\psi_i(\zeta)\,d\zeta \qquad (۸)$$

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

ماتریس های سختی مکانی برای هر المان ترکیبی از این دو انتگرال (۶) و (۷) می باشد که با تغییر درجه المان ها این ماتریس ها نیز تغییر می کند. می توان با انتخاب مناسب توابع پایه شکلی انتگرال هایی را بدست آورد که با روش های تحلیلی و عددی قابل حل هستند.

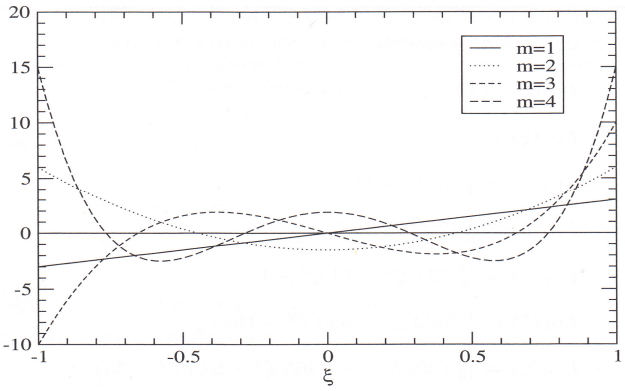
استفاده از بسط توابع لوباتو بجای توابع شکلی پایه لاگرانژ

درونیابی روی المان درجه m را می توان با استفاده از صفرهای توابع متعامد لوباتو انجام داد. چند جمله اول توابع لوباتو و جمله عمومی آن به صورت زیر نوشته می شود[2]:

$$
\begin{aligned}
&L_0(\zeta) = 1 \\
&L_1(\zeta) = 3\zeta \\
&L_2(\zeta) = \frac{3}{2}(5\zeta^2 - 1) \qquad (۹) \\
&\dots\dots\dots \\
&L_m(\zeta) = \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{d^{m+1}}{d\zeta^{m+1}}(\zeta^2-1)^{m+1}
\end{aligned}
$$

نمودار این توابع برای توابع درجه ۱ تا ۴ در شکل ۱ نشان داده شده است.

شکل ۱) توابع شکلی لوباتو تا درجه ۴



شرط تعامد برای توابع لوباتو به صورت زیر می باشد

$$\int_{-1}^{1} L_i(\zeta)L_j(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta = \frac{2(i+1)(i+2)}{2i+3}\delta_{ij} \qquad (۱۰)$$

دلیل اصلی انتخاب صفرهای توابع لوباتو برای درون یابی روی المان این است که مقدار آنها بین [-1,1] تغییر می کند و همچنین مستقل از درجه تقریب m برای هر المان می باشد. به دلیل این ویژگی همگرایی درون یابی با درجه m سریعتر از توابع لاگرانژ صورت می گیرد.

با توجه به تعریف توابع لوباتو و جایگذاری آنه در رابطه (۷) می توان آنرا به صورت زیر نوشت

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{h_1}{2}\int_{-1}^{1}\psi_i(\zeta)\psi_j(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{m^2(m+1)^2 L_m(\zeta_j)L_m(\zeta_i)}\int_{-1}^{1} f_{ij}(\zeta)\,d\zeta \qquad (۱۱)$$

که درآن

$$f_{ij}(\zeta) = \frac{(\zeta^2-1)}{(\zeta-\zeta_i)(\zeta-\zeta_j)}L_{m-1}^2(\zeta) \qquad (۱۲)$$

انتگرال رابطه (۱۱) را می توان به روش عددی با استفاده از روش وزنی حل نمود.

$$\int_{-1}^{1} f_{ij}(\zeta)\,d\zeta \cong \sum_{p=1}^{k+1} f_{ij}(\zeta=z_p)w_p = \delta_{ij}\,\delta_{i1}\,L_{m-1}^2(\zeta=-1)w_1 + \sum_{p=2}^{k+1} f_{ij}(\zeta=z_p)w_p + \delta_{ij}\,\delta_{i(m+1)}\,4L_{m-1}^2(\zeta=1)\,w_{k+1} \qquad (۱۳)$$

که در آن z_p صفرها و w_p وزن های توابع لوباتو می باشند.

مثال ها و نتایج عددی

برای حل معادله ترابرد در یک بعد کد رایانه ای به نام PNGNT به زبان فرترن نوشته شده بود [5] که با تغییراتی که در آن صورت گرفت امکان استفاده از بسط توابع لوباتو در آن امکان پذیر شده است.

مثال۱)محاسبه شار نوترون در تیغه جذب کننده خالص

تیغه ای به ضخامت ۱ cm از یک ماده جاذب خالص $\Sigma_t = \Sigma_a = 1$ مورد نظر می باشد . چشمه سطحی به قدرت $1\ \frac{neutron}{cm^2\,s}$ در یک طرف آن قرار دارد. شار مکانی و زاویه ای نوترون با تقریب P_9 در امتداد تیغه با استفاده از روش اجزای محدود با در نظر گرفتن ۱۰ المان محاسبه شده و همچنین با روش اجزای محدود طیفی برای المان درجه ۲ و ۳ و ۵ محاسبات انجام شده است و نتایج در جدول ۱ با مقادیر دقیق [1] مقایسه شده است.

جدول۱) مقایسه شار نوترون برای یک تیغه جذب کننده خالص با روشهای مختلف

	روش اجزای محدود طیفی			روش اجزا محدود	حل تحلیلی
فاصله (Cm)	$N_e=5$ $N_m=2$	$N_e=4$ $N_m=3$	$N_e=2$ $N_m=5$	$N_e=10$ $N_m=1$	مقدار دقیق
۰	۰/۹۶۶۷۲۳	۰/۹۶۷۲۰۳	۰/۹۶۷۲۲۵	۰/۹۶۱۶۲۳	۱/۰
۱/۰	۰/۱۴۸۰۸۱	۰/۱۴۸۰۷۲	۰/۱۴۸۰۷۴	۰/۱۴۷۷۲۸	۰/۱۴۸۴۹۶
زمان اجرا (10^{-4} Sec)	۲/۴۹۹	۳/۷۴۹	۷/۴۹۹	۷/۲	

در جدول ۲ N_e تعداد المان، N_m درجه المان می باشد.

با توجه به تعداد المان ها و درجات آنها کمترین زمان اجرای برنامه مربوط به ۵ المان درجه ۲ می باشد که جواب های دقیق تری نسبت به روش اجزای محدود بدست می آید.

مثال۲) محاسبه ضریب تکثیر بحرانی سیستم با استفاده از سطح مقاطع Hanson-Roach

این مسئله که به مسئله GODIVA نیز معروف است، یکی از سیستم های بدون بازتابنده بحرانی می باشد . در این مسئله یک کره به شعاع ۸/۷۱ cm در گرفته می شود که شامل اورانیوم غنی شده با درصد بالا (٪ ۹۳/۹)است . اورانیوم مخلوط همگنی از U^{235} و U^{238} می باشد که چگالی اتمی آنها برابر با 4.45×10^{22} و 2.56×10^{21} اتم بر سانتیمتر مکعب است .

سطح مقاطع استفاده شده برای این مسئله سطح مقاطع ۶ گروهی Hanson-Roach [8] می باشد . بدلیل اینکه این سیستم بحرانی می باشد ضریب تکثیر آن حدود ۱ بدست می آید . این مسئله با در نظر گرفتن ۲۰۰ المان خطی حل شده است و جوابهایی که به ازای P_{27} بدست آمده است و زمان اجرای برنامه با جوابهای حاصل از ۱۰ المان درجه ۲ مقایسه شده و نتایج در جدول ۲ آمده است.

جدول۲) مقایسه ضریب تکثیر کره Godiva

	ضریب تکثیر موثر	مقدار دقیق	درصد خطا	زمان اجرا (Sec)
$N_e = 10$ $N_m = 2$	۹۹۴۴۶۴۶ ۰/	۹۹۵۹۷ ۰/۱	۱۵۱ ۰/۲	۰/۸۵۵۵
$_e = 200$ $_m = 1$	۹۹۴۴۷۰۳ ۰/	۹۹۵۹۷ ۰/۱	۱۵۰ ۰/۶	۵/۵۷۸

مشاهده می شود با کاهش المان ها زمان برنامه بطور محسوسی کاهش یافته و جواب ها نیز با دقت خوبی قابل قبول می باشد.

نتیجه گیری

در این روش با افزایش درجه المان ها تعداد آنها کاهش یافته همچنین به دلیل همگرایی سریع تر توابع لوباتو زمان اجرای برنامه بطور محسوسی کاهش یافته و تقریب درجات بالا جواب های دقیقتری را بدست می دهد.

منابع و مراجع

[1]. Ron T. Ackroyd, Finite Element Methods for Particle Transport Applications to Reactor and Radiation Physics, John Wiley & Sons, New York,1997

[2]. C. Pozrikidis, Introduction to Finite and Spectral Element Methods Using MATLAB, Chapman & Hall, San Diego, 2005

[3]. Jan S. Hesthaven, Einar M. Rønquist, Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations, Springer, 2010

[۴]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ا. حقیقت طلب، " استفاده از اصل تغییر پذیری $K^{+}(\varphi^{+})$ و روش اجزاء محدود برای حل معادله ترابرد نوترون"،چهاردهیمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، یزد، اسفندماه۱۳۸۶

[۵]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ع. مینوچهر، " حل معادله ترابرد نوترون چندگروهی و محاسبه فاکتور عدم مزیت با استفاده از روش اجزا محدود و بسط هارمونیک های کروی"،پانزدهیمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، گرگان، اسفندماه۱۳۸۷

[6]. J.R. Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, John Wiley & Sons, New York, 1966

[7]. W. M. Stacey, Nuclear Reactor Physics, John Wiley & Sons, New York, 2006

[8]. C.R.E. de Oliveria, Finite Element Techniques for Multi group Neutron Transport Calculations with Anisotropic Scattering ,London University Ph.D. Thesis., 1987