توسعه کد PFENT2 جهت حل معادله ترابرد درمختصات دو بعدی X-Y با استفاده از روش اجزای محدود و بسط هارمونیک های کروی

محمدرضاعباسی* – احمدرضاذوالفقاری – عبدالحمیدمینوچهر

دانشگاه شهید بهشتی – دانشکده مهندسی هسته ای

چکیده

در محیطهایی که تغییرات شار وابستگی شدیدی به جهت و مکان دارد نمی توان از روشهایی مانند معادله پخش استفاده نمود. در این مقاله جهت حل معادله ترابرد گروهی نوترون از اصل تغییرپذیری ($K^{+}(\varphi^{+})$) استفاده شده است. در این اصل از بسط هارمونیک های کروی[1] با پاریته زوج برای وابستگی زاویه ای شار و از روش اجزای محدود[2] برای بخش مکانی معادله ترابرد استفاده شده است. در بدست آوردن $K^{+}(\varphi^{+})$ از روش تعمیم یافته مجذور مربعات خطا استفاده شده است که در متن مقاله به آن اشاره شده است از مزایای این روش حل معادله ترابرد در محیط هایی که پراکندگی در آنها غیر همسانگرد یا جذب غیرشکافتی در آنها زیاد است، می باشد.در این مقاله توسط کد کامپیوتری PFENT2 که نوشته شده است، شار نوترون و متوسط شار برای هر ناحیه و همچنین ضریب تکثیر موثر برای محیطهای دوبعدی محاسبه شده و نتایج مورد بررسی قرار گرفته است.

کلید واژه: معادله ترابرد نوترون–هارمونیک های کروی– روش اجزای محدود– اصل تغییر پذیری– محاسبات قلب

مقدمه

مطالعه و طراحی راکتورهای هسته‌ای، مستلزم آگاهی از نحوهٔ توزیع ذرات علی‌الخصوص نوترون در محیط براساس مکان، انرژی، جهت و زمان می باشد. معادلهٔ اساسی که توزیع جمعیت نوترونی در یک محیط را ارائه می کند از طریق انجام موازنهٔ نوترون برروی واکنش های مختلف نوترون از قبیل تولید، فرار، جذب در یک المان حاصل می گردد[2]. در طی سالهای گذشته روش های مختلفی از قبیل جهت های مجزا[3][2,7]، مونت کارلو[4] [2,7] روش نودال [1]وبسط هارمونیک های کروی [1]و برای حل معادلهٔ ترابرد بکار گرفته شده اند. در این مقاله نیز هدف حل معادلهٔ ترابرد نوترون در محیط های دو بعدی با استفاده از روش اجزاء محدود برای بخش مکانی و استفاده از هارمونیک های کروی زوج برای در نظر گرفتن جهت می باشد. از مزایای روش پاریته زوج این است که تقریباً نیمی از عبارت های ناشی از بسط زاویه ای استفاده می شود و

---

1 Spherical Harmonic Method
2 Finite Element Method
3 Discrete Ordinate Method
4 Monte Carlo Method

شرایط مرزی را می توان به سادگی اعمال نمود. شار متوسط در هر ناحیه نیز به عنوان پارامتر بسیار مهم در محاسبات سلولی محاسبه شده است.

معادله ترابرد در قالب پاریته زوج

معادله ترابرد وابسته به مکان و جهت وانرژی نوترون در حالت ایستا را می توان به صورت زیر نوشت[1,3]

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi_0(r,\Omega,E)+\Sigma_t(r,E)\varphi_0(r,\Omega,E)=\int dE'\int d\Omega'\Sigma_s(r,\Omega',E'\to\Omega,E)\varphi_0(r,\Omega',E')$$
$$+\frac{\chi(E)}{4\pi}\int_0^{\infty}dE'\int_{4\pi}d\Omega'\nu(E')\Sigma_f(r,E')\varphi_0(r,\Omega',E')+S(r,\Omega,E) \qquad (۱)$$

با توجه به اینکه اپراتورهای C و G^{-1} برای یک تابع اختیاری $u(r,\Omega)$ به صورت زیرتعریف می شوند[1,3]:

$$Cu(r,\Omega)=\Sigma_t(r)u(r,\Omega)-\int_{4\pi}\Sigma_s^{+}(r,\Omega.\Omega')u(r,\Omega')d\Omega' \qquad (۲)$$

$$G^{-1}u(r,\Omega)=\Sigma_t(r)u(r,\Omega)-\int_{4\pi}\Sigma_s^{-}(r,\Omega.\Omega')u(r,\Omega')d\Omega' \qquad (۳)$$

می توان معادله ترابرد در قالب پاریته زوج و فرد را به صورت زیر نوشت [1,3]:

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^{-}(r,\Omega)+C\varphi_0^{+}(r,\Omega)=S^{+}(r,\Omega) \qquad (۴)$$

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\varphi_0^{+}(r,\Omega)+G^{-1}\varphi_0^{-}(r,\Omega)=S^{-}(r,\Omega) \qquad (۵)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات [3] که منجربه تولید خطاهایی روی سطح و حجم می شود[1] می توان اصل تغییرپذیری را بصورت زیر معرفی نمود[1,3]:

$$K^{+}(\varphi^{+})=\int_v\int_{4\pi}\{2\varphi^{+}S^{+}+2\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^{+}GS^{-}-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^{+}G\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^{+}-\varphi^{+}C\varphi^{+}\}d\Omega dV$$
$$+4\int_{\partial v}\int_{\vec{\Omega}.\vec{n}<0}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|T\varphi^{+}d\Omega dS-\int_{\partial v}\int_{4\pi}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|\varphi^{+^2}d\Omega dS \qquad (۶)$$

در صورتی که مقدار $K^{+}(\varphi^{+})$ بیشینه شود مقدار خطاهای روی سطح وحجم کمینه خواهد شد و با ارضای شرایط مرزی جواب های قابل قبولی برای $\varphi^{+}(r,\Omega)$ بدست می آید.

بیشینه کردن $K^{+}(\varphi^{+})$ در مختصات دوبعدی X-Y

با توجه به اینکه $\varphi^{+}(r,\Omega)$ یک تابع زوج می باشد یعنی $\varphi^{+}(r,\mu,\omega)=\varphi^{+}(r,-\mu,\omega+\pi)$ اسـت، بنـابراین می توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\varphi^{+}(r,\mu,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[Y_{nm}^{o}(\mu,\omega)\psi_{nm}^{o}(r)+Y_{nm}^{e}(\mu,\omega)\psi_{nm}^{e}(r)] \qquad (۷)$$

که در آن

$$Y^{e}_{nm}(\mu,\omega)=[\frac{2n+1}{4\pi}(2-\delta_{m0})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}]^{1/2}P^{m}_{n}(\mu)\mathrm{Cos}(m\omega) \qquad (۸)$$

$$Y^{o}_{nm}(\mu,\omega)=[\frac{2n+1}{4\pi}(2-\delta_{m0})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}]^{1/2}P^{m}_{n}(\mu)\mathrm{Sin}(m\omega) \qquad (۹)$$

می باشد. تعداد ممان های این بسط برابر است با

$$M=\sum_{n=even}^{N-1}(2n+1)=\frac{(N+1)^2}{4} \qquad (۱۰)$$

بنابراین می توان $\varphi^{+}(r,\mu,\omega)$ را به صورت زیر تعریف نمود

$$\varphi^{+}(r,\mu,\omega)=\sum_{j=1}^{E}\sum_{n=even}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{p=1}^{N_e}[Y^{e}_{nm}(\mu,\omega)B^{j}_{p}(r)\psi^{ej}_{nm}+Y^{o}_{nm}(\mu,\omega)B^{oj}_{p}(r)\psi^{oj}_{nm}] \qquad (۱۱)$$

که این عبارت را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت(j شماره المان و p شماره گره می باشد)

$$\varphi^{+}(r,\mu,\omega)=\sum_{j=1}^{E}\underline{B}^{jT}(r)\otimes\underline{Q}^{+T}(\mu,\omega)\underline{\psi}^{j} \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$\underline{Q}^{+T}(\mu,\omega)=[Y^{e}_{00},Y^{e}_{20},Y^{e}_{22},Y^{o}_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,Y^{e}_{N-1,N-1},Y^{o}_{N-1,N-1}]$$

$$\underline{\psi}^{jT}=[\psi^{e}{}_{100},\ldots,\psi^{e}{}_{p00},\psi^{e}{}_{120},\ldots,\psi^{e}{}_{p20},\psi^{e}{}_{p21}..\psi^{e}{}_{p21},\psi^{o}{}_{p21}..\psi^{o}{}_{p21},\ldots,\psi^{o}{}_{1N-1,N-1},\ldots,\psi^{o}{}_{p,N-1,N-1}]$$
(۱۳)

درآیه های ماتریس B توابع شکلی مربوط به روش اجزای محدود می باشد..

عبارت آخر در جمله اول رابطه (۶) به صورت زیر می باشد:

$$\int_{x_i}^{R_{Ne}}\int_{4\pi}\varphi^{+}C\varphi^{+}d\Omega dV=\int_{R_i}^{R_{Ne}}\int_{4\pi}\underline{B}^{jT}(r)\otimes\underline{Q}^{+T}(\mu,\omega)\underline{\Psi}^{j}C\varphi^{+}(r,\mu,\omega) \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$C\varphi^{+}(r,\mu,\omega)=\sum_{n=even}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\Sigma_n\int_{4\pi}P_n(\mu_0)\varphi^{+}(r,\mu',\omega')d\Omega' \qquad (۱۵)$$

و عبارت $P_n(\mu_0)$ به صورت زیر تعریف می شود که می توان آنرا بصورت ماتریسی زیر نوشت

$$P_n(\mu_0)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=0}^{n}[Y^{e}_{nm}(\mu,\omega)\;\;Y^{o}_{nm}(\mu,\omega)]\begin{bmatrix}Y^{e}_{nm}(\mu',\omega')\\Y^{o}_{nm}(\mu',\omega')\end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

با قرار دادن بسط $\varphi^{+}(r,\mu,\omega)$ در عبارت بالا و استفاده از نماد انتگرالی [7]این جمله به صورت زیر ساده می شود که برای سادگی بیشتر آنرا به شکل ماتریسی زیر می نویسیم

$$\underline{A}^{+}_{2}=\sum_{n=even}^{N-1}\Sigma_n\sum_{m=0}^{n}<\underline{Q}^{+},\begin{bmatrix}Y^{e}_{nm}\\Y^{o}_{nm}\end{bmatrix}><[Y^{e}_{nm}\;\;Y^{o}_{nm}],\underline{Q}^{+T}> \qquad (۱۷)$$

همچنین برای جمله وابسته به مکان داریم

$$\underline{S}_2^{+j} = \int_{x_1}^{x_{ne}} \int_{y_1}^{y_{ne}} \underline{B}^j(x,y)\underline{B}^{jT}(x,y)\,dx\,dy \qquad (۱۸)$$

از آنجاییکه $\vec{\Omega}.\vec{\nabla}$ در مختصات $X-Y$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla} = \sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Cos}\,\omega\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Sin}\,\omega\frac{\partial}{\partial y} \qquad (۱۹)$$

با توجه به تعریف عملگر G به روشی مشابه برای دیگر جمله های موجود در معادله به نتایج مشابه دیگری می رسیم که در مرجع [1] موجود می باشد.

جمله اول رابطه (۶) **به صورت** $\int_V \int_{4\pi} \varphi^+ S^+(r,\Omega)\,d\Omega dV$ می باشد که مربوط به چشمه حجمی است و در صورتی که محاسبات بحرانی شدن مورد نظر باشد $S^+(r,\Omega)$ را به صورت $S^+(x,y) = \frac{\nu\Sigma_f}{4\pi K}\varphi^+(x,y,\Omega)$ تعریف می کنیم که با جایگذاری در انتگرال بالا به عبارت زیر برای قسمت های زاویه ای و مکانی می رسیم[2]

با توجه به روابط نوشته شده در مجموع می توان ماتریس $\underline{A}^{+j}$ و B^{+j} را به صورت زیر نوشت :

$$\underline{A}^{+j} = [\underline{S}_{31}^j \otimes \underline{A}_{31}^+ + \underline{S}_{32}^j \otimes \underline{A}_{32}^+ + \underline{S}_{33}^j \otimes \underline{A}_{33}^+ + \underline{S}_{34}^j \otimes \underline{A}_{34}^+] + \underline{S}_2^j \otimes \underline{A}_2^+$$

$$\underline{B}^{+j} = \underline{S}_1^j \otimes \underline{A}_1^+$$

اگر ماتریس های فوق را برای هر المان نوشته و آنها را در کنار یکدیگر قرار دهیم، $K^+(\varphi^+)$ را می توان به صورت $K^+(\varphi^+) = 2\underline{\Psi}^T\underline{B}^+ - \underline{\Psi}^T\underline{A}^+\underline{\Psi}$ نوشت.

شرایط مرزی در صفحه $X-Y$

با توجه به اینکه حل معادله ترابرد فقط با اعمال دقیق شرایط مرزی امکان پذیر می باشد، لذا به بررسی شرایط مرزی در هندسه دوبعدی می پردازیم.

الف)شرط مرز برهنه:تنها جمله باقی مانده از رابطه (۶) جمله $\int_{\partial v}\int_{4\pi}\left|\vec{\Omega}.\vec{n}\right|\varphi_1^+\varphi_2^+ d\Omega dS$ مربوط به المان های مرزی است. با توجه به اینکه $\vec{\Omega}.\vec{n}$ در مختصات صفحه $X-Y$ به صورت $\vec{\Omega}.\vec{n} = \sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Cos}(\omega-\omega_n)$ مشخص می شود که در آن ω_n زاویه بین بردار نرمال سطح مورد نظر و محور x ها می باشد.

بنابراین انتگرال مربوط به قسمت زاویه ای به صورت زیر در می آید

$$\int_{4\pi}\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Cos}(\omega-\omega_n)\underline{Q}^+(\mu,\omega)\underline{Q}^{+T}(\mu,\omega)\,d\mu d\omega = <\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Cos}(\omega-\omega_n)\underline{Q}^+,\underline{Q}^{+T}> \qquad (۲۰)$$

که به دو حالت زیر ساده می شود

$$\omega_n = 0 \text{ or } \pi \;\Rightarrow\; \vec{\Omega}\vec{n} = \sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Cos}\,\omega = \Omega_x \quad \text{و} \quad \omega_n = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; \vec{\Omega}.\vec{n} = \sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{Sin}\,\omega = \Omega_y$$

که با جایگذاری در انتگرال قبلی و دو قسمت نمودن انتگرال داریم:

$$A_{41}^{+} =< \sqrt{1-\mu^2} Sin\omega \underline{Q}^{+}, \underline{Q}^{+T} > \qquad \text{در بالا و پایین صفحه} \qquad (۲۱)$$

$$A_{42}^{+} =< \sqrt{1-\mu^2} Cos\omega \underline{Q}^{+}, \underline{Q}^{+T} > \qquad \text{در چپ و راست صفحه} \qquad (۲۲)$$

و برای قسمت مکانی هم روابط زیر بدست می آید

$$\underline{S}_{41}^{+j} = \int \underline{B}^{j}(x,y)\underline{B}^{jT}(x,y)\,dx \qquad \text{در مرز بالا و پایین صفحه} \qquad (۲۳)$$

$$\underline{S}_{42}^{+j} = \int \underline{B}^{j}(x,y)\underline{B}^{jT}(x,y)\,dy \qquad \text{در مرز چپ و راست صفحه} \qquad (۲۴)$$

ب)شرط مرز بازتابنده کامل:شرط مرزی بازتابنده کامل در مواردی که تقارن وجود دارد بسیار سودمند است که به صورت زیر اعمال می شود

$$\varphi^{+}(r,\Omega) = \varphi^{+}(r,\Omega^{*}) \qquad \text{for} \quad \vec{\Omega}.\vec{n} \neq 0 \qquad (۲۵)$$

باید توجه داشت که در مختصات $X-Y$ می توان $\Omega^{*} \rightarrow (\mu, 2\gamma-\omega)$ را به این صورت تعریف نمود.با توجه به تساوی باید $\underline{Q}^{+T}(\mu,\omega) = \underline{Q}^{+T}(\mu, 2\gamma-\omega)$ باشد، بنابراین باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} Cos(2m\gamma) = 1 \\ Sin(2m\gamma) = 0 \end{cases} \qquad (۲۶)$$

اگر $m = 0$ باشد این شرط برآورده می شود ولی اگر $m \neq 0$ باشد شرط بر آورده نمی شود پس باید تمام ممان هایی که در آن $m \neq 0$ است برابر با صفر قرار داد.

باید دقت داشت که برای المان های مرزی ماتریس $\underline{A}^{+j}$ در رابطه() به صورت زیر در می آید

$$\underline{A}^{+j} = \underline{A}^{+j} + \underline{S}_{41}^{j} \otimes \underline{A}_{41}^{+} \quad or \quad \underline{S}_{42}^{j} \otimes \underline{A}_{42}^{+} \qquad (۲۷)$$

مثال ها و نتایج عددی

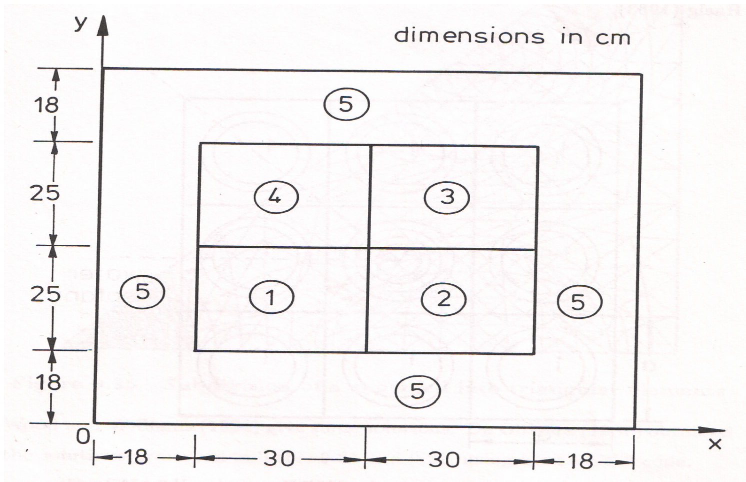
برای حل معادله ترابرد در دو بعد کد رایانه ای به نام PFENT2 به زبان فرترن نوشته شده است که قابلیت استفاده از المان های مثلثی و مربعی را دارد.تعدادی از مثال های موجود توسط آن حل گردیده و جواب ها مورد بررسی قرار گرفته است.

مثال ۱)محاسبه ضریب تکثیر و شار متوسط در راکتور استخری[5]

این مسئله شامل یک راکتور استخری با ۵ ناحیه می باشد که اولین بار توسط استپانک[6] با کد SURCU **بروش احتمال برخورد حل شد و یک سال بعد توسط ویلیامز[1]با کد FELICIT بروش P_N حل گردید . داده های مربوط به سطح مقاطع در جدول ۳ ارائه شده و شکل ۱ هندسه مسئله را مشخص می کند.**

5 Swimming pool reactor

شکل ۱) ابعاد راکتور استخری



جدول۳) اطلاعات سطح مقطع نواحی مختلف

ناحیه	Σ_t	Σ_S	$\nu\Sigma_f$
۱	۰/٦	۰/٥۳	۰/۰۷۹
۲	۰/٤۸	۰/۲	۰/۰
۳	۰/۷	۰/٦٦	۰/۰٤۳
٤	۰/٦٥	۰/٥	۰/۰
٥	۰/۹	۰/۸۹	۰/۰

ضریب تکثیر و شار متوسط نرمالیزه شده بر تعداد نوترون های حاصل از شکافت در هر ناحیه با تقریب P_3 بدست آمده و با نتایج استپانک و ویلیامز در جدول ٤ و ٥ مقایسه شده است.

جدول٤)مقایسه ضریب تکثیرراکتور استخری

نام کد	PNFENT2	FELICIT	SURCU
K_{eff}	۱/۰۰۷۱٤۲	۱/۰۰٦۹	۱/۰۰۸۳

جدول٥)مقایسه شار متوسط هر ناحیه برای راکتور استخری

ناحیه	۱	۲	۳	٤	٥
PNFENT2	۰/۰۱٦۸٥۲٤۱	۰/۰۰۰۱۲٦٦۸۱۷	۰/۰۰۰۰٤۳۳	۰/۰۰۰۲۹۸۹	۰/۰۰۰۸۰۱
FELICIT	۰/۰۱٦۸٥	۰/۰۰۰۱۲۷	۰/۰۰۰۰٤۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۷۹۷
SURCU	۰/۰۱٦۸٦	۰/۰۰۰۱۲٥	۰/۰۰۰۰٤۱	۰/۰۰۰۲۹٥	۰/۰۰۰۷۹۱

نتیجه گیری

مقلیسه شار و ضریب تکثیر نشان می دهد روش ذکر شده با تقریب بسیار خوبی با جواب های دقیق موجـود همخوانی دارد.از مزایای این روش سهولت در اعمال شرایط مرزی و کاهش تعداد ممان های بسط هارمونیک کروی و توانایی حل هندسه های پیچیده می باشد.

منابع و مراجع

[1]. Ron T. Ackroyd, Finite Element Methods for Particle Transport Applications to Reactor and Radiation Physics, John Wiley & Sons, New York,1997

[2]. G.I. Bell & S. Glasstone, Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold, New York, 1970

[۳]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ا. حقیقت طلب، " استفاده از اصل تغییر پذیری $K^+(\varphi^+)$ و روش اجزاء محدود برای حل معادله ترابرد نوترون"،چهاردهیمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، یزد، اسفندماه۱۳۸۶

[۴]. م. عباسی، ا. ذوالفقاری، ع. مینوچهر، " حل معادله ترابرد نوترون چندگروهی و محاسبه فاکتور عدم مزیت با استفاده از روش اجزا محدود و بسط هارمونیک های کروی"،پانزدهیمین دوره کنفرانس هسته ای ایران، گرگان، اسفندماه۱۳۸۷

[5]. J.R. Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, John Wiley & Sons, New York, 1966

[6]. Stepanek, J.,Thermal reactor Benchmark Calculations, Techniques, Results and Applications, EPRI NP.2855, PP. 26-31, 1983

[7]. C.R.E. de Oliveria, Finite Element Techniques for Multi group Neutron Transport Calculations with Anisotropic Scattering ,London University Ph.D. Thesis., 1987

[8]. W. M. Stacey, Nuclear Reactor Physics, John Wiley & Sons, New York, 2006