

مدل نفوذی سه بعدی جهت پیش بینی پخش ذرات معلق خروجی دودکش کارخانه سیمان فارس

مهدی شمسی جی، منصور طاهری انارکی

شیراز، دانشکده مهندسی شماره ۱، بخش مهندسی شیمی

mehdishams@yahoo.com

چکیده

برای بررسی نحوه پخش ذرات معلق حاصل از یک منبع نقطه ای ثابت یک برنامه کامپیوتری تهیه شده است. مبنای این برنامه بر مدل نفوذی استوار است. پروفایل باد و نفوذ چرخانه ای بکار رفته در این مدل با مشخص شدن ارتفاع لایه اختلاط، سرعت باد در انتهای لایه اختلاط، جریان حرارت خالص ورودی به اتمسفر وزبری سطحی تعیین میشود. در این برنامه ته نشینی ذرات بر روی زمین در نظر گرفته شده است. در اینجا اثر عوامل ذکر شده در پخش ذرات برای اتمسفر خنثی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصل از آن در هر حالت، شامل نمودار و تفسیر فیزیکی نتایج ارائه شده است.

واژه های کلیدی: آلودگی هوا؛ ذرات معلق؛ منبع نقطه ای

مقدمه

ذرات معلق که از یک منبع نقطه ای مانند دودکش یک کارخانه پخش می شوند، فاکتور مهمی در تعیین کیفیت هوا می باشند. برای بیان این کیفیت، یک مدل پخش اتمسفری مورد نیاز است که توزیع غلظت آلاینده ها را نسبت به مبدا پخش در فضا محاسبه کند. غلظت آلاینده ها در هوای محیط به نرخ پخش شدن آنها، ارتفاع موثر منبع تولید آلاینده ها از سطح زمین، شرایط جوی مختلف و شرایط اقلیمی بستگی دارد.

مدل پلوم گوس متدی است که عموماً برای محاسبه غلظت آلاینده های هوای محیط نسبت به منبع نقطه ای استفاده میشود. ضعف اصلی این متد، ثابت فرض نمودن سرعت باد و ضریب پخش متلاطم است و وابستگی این دو پارامتر به ارتفاع که لحاظ نشده است. علاوه بر این، ضریب پخش گوسی به زبری ایرودینامیکی سطح نیز بستگی دارد که

رابطه مناسبی برای آن ارائه نشده است. ضریب پخش گوسی در شرایط مرزی مختلف به روش تجربی محاسبه شده است. بعنوان نمونه، Turner ضرایب پخش گوسی را برای دودکش های بلند در نواحی باز بیان کرده و McErloy ضرایب پخش گوسی را برای نواحی شهری ارائه داده است. در این مقاله، رابطه بین پروفایل باد و نفوذ چرخانه ای با زبری سطحی، سرعت باد در نواحی فوقانی لایه مرزی و نرخ خالص جریان حرارت بیان میشود. پروفایل باد و نفوذ چرخانه ای محاسبه میشود و تاثیر تغییرات حاصل از در نظر گرفتن زبری سطحی مشاهده میشود.

برقراری معادله پیوستگی نقطه آغاز آنالیز ریاضی توزیع اتمسفری است. برای یک منبع نقطه ای که بطور پیوسته ذرات را پخش میکند، از مدل سه بعدی استفاده می شود و با اعمال قانون فیک، یک معادله دیفرانسیل جزئی حاصل میگردد.

معادله نفوذ

مدل ریاضی مورد استفاده بر پایه حل معادله بقای جرم ذرات به روش تفاضل محدود می باشد. معادله در دستگاه کارترین حل می شود که در آن محور X در جهت وزش باد، Y عمود بر جهت باد در صفحه افقی و Z جهت قائم است. با در نظر گرفتن سیستم به صورت پایا (steady-state) قانون فیک برای نفوذ به صورت زیر در می آید:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial C}{\partial z}) = 0 \quad (1)$$

که $u = u(z)$ سرعت باد در جهت X

$C = C(x, y, z)$ غلظت آلاینده مورد نظر در محیط

$K_y = K_y(z)$ ضریب نفوذ چرخانه ای متلاطم در جهت

Y

و $K_z = K_z(z)$ ضریب نفوذ چرخانه ای متلاطم در جهت

Z می باشد.

در این مقاله، از نفوذ در راستای X (جهت باد) صرف نظر شده است.

شرایط مرزی عبارتند از:

۱- غلظت آلاینده ها قبل از منبع نقطه ای صفر در نظر گرفته شده می شود.

۲- آلاینده ها با شدت Q از منبع نقطه ای پخش می شوند.

۳- آلاینده ها با سرعت حد بر روی زمین ته نشین می شوند.

۴- نفوذ آلاینده ها در راستای قائم حداکثر تا ارتفاع اختلاط صورت می گیرد.

۵- نفوذ آلاینده ها در راستای افقی (y) تا فاصله معینی صورت می گیرد، که این فاصله با توجه به شرایط مختلف پایداری اتمسفر محاسبه میشود.

به جای حل مستقیم معادله (۱)، اتمسفر محیط را به المانهای کوچک تقسیم کرده و برای هر المان قانون بقای جرم نوشته می شود. یک حجم کوچک از سیال را با ابعاد $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ که در نقطه $i+1, j, k$ قرار دارد در نظر گرفته می شود. غلظتها در نقطه i, j, k معلوم و در نقطه $i+1, j, k$

در روش حل تحلیلی معادله سه بعدی نفوذ برای یک منبع نقطه ای مرتفع، در نظر گرفتن سرعت باد و نفوذ چرخانه ای متغیر تنها با اعمال فرضیات محدود کننده امکان پذیر است. Smith رابطه اصلاح شده توانی را برای پروفایل باد و نفوذ بکار برد و فرض کرد که تغییرات در جهت عمود بر باد همیشه از قانون گوس پیروی میکنند. Denisov قانون توانی را برای نفوذ در جهت Y و Z بکار برد اما سرعت باد را ثابت در نظر گرفت. Gandin و Sdoveichik روش حل تحلیلی معتبری را ارائه دادند که در آن: $u = u_1 z^n$ و $k_y = k_0 z^n$ و $k_z = k_1 z$. در این معادلات u سرعت باد، k_y و k_z به ترتیب نفوذ چرخانه ای در جهت محوری و عمودی میباشد. Peters و Klinzing، اثر تغییرات توان را در حالتی که باد ثابت فرض میشود بدست آوردند.

در سطوح نزدیک به زمین پروفایل باد بیشتر از رابطه لگاریتمی پیروی میکند تا رابطه توانی (حداقل برای شرایط خنثی). متأسفانه، هیچ روش تحلیلی برای حل معادله نفوذ با در نظر گرفتن پروفایل لگاریتمی سرعت باد موجود نیست. بنابراین با در نظر گرفتن پارامترهای جوی بیشتر و کاملتر درون مدل باید از روشهای حل عددی استفاده کرد. در حال حاضر، با حضور کامپیوترهای سرعت بالا، روش حل عددی بهترین و مناسبترین روشها است.

در شکل (۱)، [که در ضمیمه (۱) آورده شده است] شمای فیزیکی مساله دیده میشود. منبع نقطه ای مرتفع پیوسته توسط زمین و یک لایه پایداری فوقانی به نام ارتفاع اختلاط احاطه شده است. فرض بر این است که آلاینده ها به داخل زمین یا به لایه فوقانی نفوذ نمی کنند. واکنش شیمیایی آلاینده ها در این تحلیل نادیده گرفته میشود اما ته نشینی آنها بر روی سطح زمین لحاظ شده است. آلاینده ها بطور افقی در جهت باد حرکت میکنند و در جهت عمودی و محوری توسط چرخانه های متلاطم در اتمسفر نفوذ می کنند. پروفایل باد و نفوذ با افزایش ارتفاع از سطح زمین تغییر می کنند و تابع جریان خالص حرارت ورودی به اتمسفر و زبری سطحی منطقه می باشند.

۱×۹ از غلظتهای معلوم المانهای مشابه در ردیف قبلی به اضافه ترم Q می باشد. با جایگذاری مقادیر زیر در معادله (۲)

$$\begin{aligned} u\Delta y\Delta z &= a \\ K_y\Delta x\Delta z / \Delta y &= e \\ K_z\Delta x\Delta y / \Delta z &= f \end{aligned} \quad (6)$$

$v_i\Delta x\Delta y = s$
ماتریس A به شکلی که در ضمیمه (۱) نشان داده شده است، حاصل میشود. حل معادله فوق به صورت زیر است:

$$[C] = [A]^{-1}[D] \quad (7)$$

پارامترهای جوی

سرعت باد و نفوذ چرخانه ای به صورت تابعی از فاصله عمودی از سطح زمین و زبری سطحی مشخص می شود. سرعت باد و نفوذ چرخانه ای به پایداری اتمسفر بستگی دارند. پایداری اتمسفر با L نشان داده شده و توسط رابطه زیر تعریف میگردد. (Monin & Obokov, 1954)

$$L = \frac{u_*^3 c_p \rho T}{kgH} \quad (8)$$

در این رابطه u_* سرعت اصطکاکی، H جریان خالص حرارت ورودی به اتمسفر، ρ و c_p به ترتیب دانسیته و حرارت ویژه اتمسفر، T دمای محیط و k ثابت کارمن می باشد که $(k=0.4)$ و g شتاب جاذبه زمین و L دارای واحد طول است.

به دلیل اینکه سرعت باد در اتمسفر آزاد (Geostrophic wind) یک پارامتر جهانی است و به شرایط جوی و منطقه ای بستگی ندارد، u_* به صورت تابعی از ضریب دراگ، c_g و سرعت باد در اتمسفر آزاد، u_g بیان میشود.

$$u_* = c_g u_g \quad (9)$$

c_g به صورت تابعی از عدد Rossby سطحی ($R_0 = U_g / Z_0 f$) و L تعریف می شود (f پارامتر coriolis زمین و Z_0 زبری سطحی است).

نامعلوم است. معادله بقای جرم برای المان سیال در نقطه $i+1, j, k$ به صورت زیر نوشته میشود.

$$\begin{aligned} &u_k C_{i+1,j,k} \Delta y \Delta z \\ &+ (K_y)_k \Delta x \Delta z (C_{i+1,j,k} - C_{i+1,j+1,k}) / \Delta y \\ &+ (K_y)_k \Delta x \Delta z (C_{i+1,j,k} - C_{i+1,j-1,k}) / \Delta y \\ &+ (K_z)_{k+1/2} \Delta x \Delta y (C_{i+1,j,k} - C_{i+1,j,k+1}) / \Delta z \\ &+ (K_z)_{k-1/2} \Delta x \Delta y (C_{i+1,j,k} - C_{i+1,j,k-1}) / \Delta z \\ &= u_k C_{i,j,k} \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2)$$

که مقادیر سرعت باد و نفوذ چرخانه ای معلوم هستند. در المانی که منبع نقطه ای قرار دارد، در سمت راست معادله فوق ترم Q به عنوان منبع انتشار آلاینده ها ظاهر می شود.

در المانهایی که مجاور زمین قرار دارند نفوذ به سمت زمین در نظر گرفته نمی شود، در عوض فرض می شود که آلاینده ها با سرعت حد خود بر روی زمین ته نشین می شوند. به عبارت دیگر:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) = v_i \frac{\partial c}{\partial z} \quad (3)$$

که v_i سرعت حد ذرات میباشد و از رابطه زیر بدست می آید

$$v_i = \frac{d_p^2 \rho_p g}{18\mu} \quad (4)$$

در نقاط مرزی سیستم یک جمله یا بیشتر از سمت چپ معادله فوق حذف می شود. یک سری به صورت n (تعداد المانها در هر مقطع) معادله وجود دارند که هریک از این معادلات مربوط به یکی از المانها در ردیف $i+1$ می باشد که باید همزمان حل شوند. سپس همین مراحل برای ردیف $i+2$ تکرار می شود.

برای نمایش این مسئله هر ردیف را به ۹ المان (۳ تا در راستای y و ۳ تا در راستای z) تقسیم می کنیم. به این ترتیب ۹ معادله حاصل می شود که برای ردیف $i+1$

به صورت زیر است:

$$[A][C] = [D] \quad (5)$$

که A یک ماتریس 9×9 ، C یک ماتریس 1×9 از غلظتهای نامعلوم (غلظتهای همین ردیف) و D یک ماتریس

Lettau(1959) رابطه تجربی زیر را برای شرایط اتمسفر خنثی پیشنهاد داد:

$$c_g = 0.16 / [\log(R_0) - 1.8] \quad (10)$$

برای اعمال اثر شرایط مختلف پایداری اتمسفر، ضرایبی برای ضرائب درگ در نظر گرفته شده است.

$$c_g = 1.2c_g(\text{neutral}) \quad \text{ناپایدار (۱۱-الف)}$$

$$c_g = 0.6c_g(\text{neutral}) \quad \text{پایدار (۱۱-ب)}$$

زبری سطحی، Z_0 را می توان از رابطه زیر که توسط Lettau(1972) ارائه شده است، محاسبه کرد:

$$Z_0 = hs_* / 2s \quad (12)$$

در این رابطه h میانگین ناهمواری، S_* مقطع عمود بر جهت جریان باد برای ارتفاع میانگین برجستگی و S سطح ویژه می باشد که از تقسیم تعداد کل المانها بر کل سطح افقی بدست می آید. به عنوان مثال، Z_0 برای نواحی باز 0.01-0.1 متر، برای مناطق جنگلی 1-0.1 متر و برای نواحی شهری 10-0.5 متر می باشد (Lettau 1970).

تعیین جریان خالص حرارت ورودی به اتمسفر نیازمند قوه تشخیص و تجربه فراوانی می باشد. Pasquill روشی برای طبقه بندی شرایط مختلف پایداری اتمسفر پیشنهاد کرد که بسیار مورد قبول واقع شد. Turner(1964) این روش را با معرفی اندیس تشعشع خالص تصحیح کرد.

Regland(1973) جدولی برای نشان دادن رابطه بین H و U با طبقه بندی Pasquill ارائه داد.

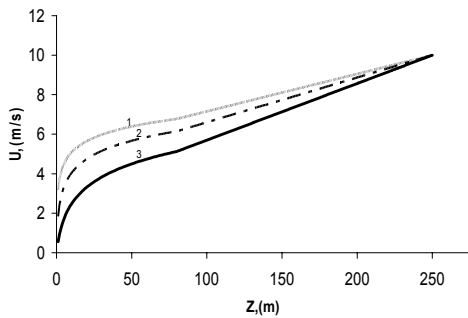
برای اتمسفر خنثی مقدار H برابر صفر می باشد. توزیع سرعت باد و نفوذ چرخانه ای بکاررفته در این مدل در جدول (۱) آورده شده است.

بر اساس جدول (۱) لایه مرزی به دو قسمت تقسیم شده است: لایه سطحی که تا حدود ۱۰۰ متر از سطح زمین است و لایه مرزی سیاره ای که تا ۱۰۰۰ متر و بیشتر می تواند ادامه یابد. U_{sl} سرعت باد دز بالای لایه سطحی، Z_{sl} است و Z_m انتهای لایه مرزی سیاره ای (ارتفاع اختلاط) است.

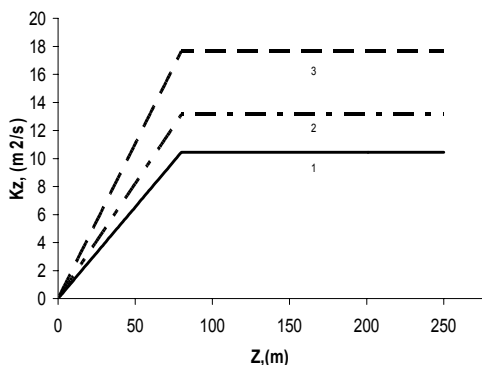
همان طور که مشاهده می شود، در این طرح سرعت باد تابعی از ارتفاع و زبری سطحی منطقه ای است. در لایه

سطحی پروفایل باد لگاریتمی در نظر گرفته می شود. (به علت وجود پارامتر زبری سطحی).

برای لایه مرزی سیاره ای یک پروفایل توانی در نظر گرفته شده که در Z_{sl} با پروفایل لگاریتمی سازگاری باشد. در این مورد تساوی سرعت ها در Z_{sl} غیر واقعی است و از این رو یک پروفایل خطی باد از $Z_{sl} - Z_m$ در نظر گرفته می شود. پروفایل سرعت باد و نفوذ چرخانه ای با معلوم بودن Z_m, Z_0, H, U_g مشخص می شود. در حالت کلی، Z_{sl} تابعی از Z_m, H, U_g است. اما به هر حال برای دستیابی به یک پروفایل سرعت واقعی تر، Z_{sl} در تمام موارد ۸۰ متر در نظر گرفته می شود. نمودار (۱) و (۲) به ترتیب پروفایل باد و نفوذ چرخانه ای در راستای قائم را برای مقادیر مختلف زبری سطحی اتمسفر خنثی ($H=0$) نشان می دهد.

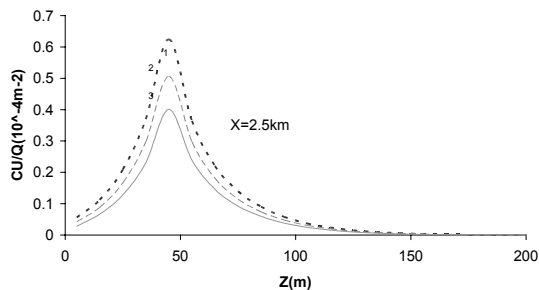
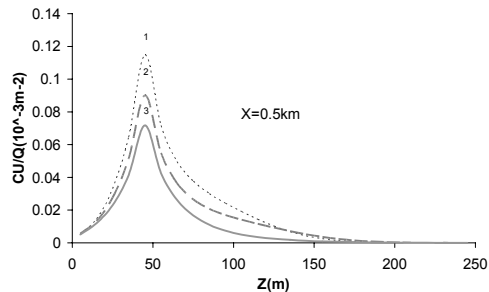


نمودار ۱- پروفایل باد در اتمسفر خنثی برای زبری سطحی (۱) ۰,۰۲، (۲) ۰,۰۲، (۳) ۲ متر



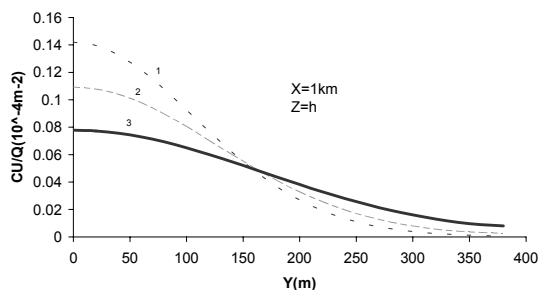
نمودار ۲- پروفایل نفوذ قائم در اتمسفر خنثی برای زبری سطحی (۱) ۰,۰۲، (۲) ۰,۰۲، (۳) ۲ متر

نمودار ۳- توزیع غلظت در راستای قائم در فواصل ۰,۵ و ۲,۵km از منبع



نمودار ۴- توزیع غلظت در راستای قائم در فاصله ۰,۵ و ۲,۵km از منبع برای زبری سطحی (۱) ۰,۲، (۲) ۰,۲، (۳) ۲ متر

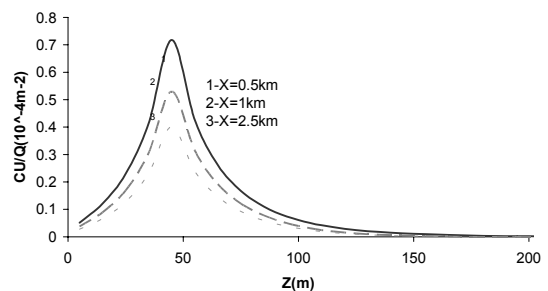
وقتی که زبری سطحی افزایش می یابد غلظت نقطه ماکزیمم کاهش می یابد و همچنین با افزایش فاصله از منبع و افزایش زبری سطحی نقطه ماکزیمم غلظت به سمت زمین نزدیک می شود.

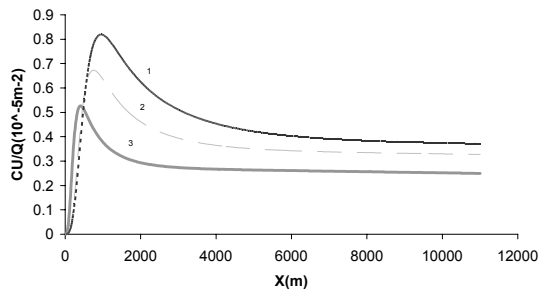


حل معادله نفوذ

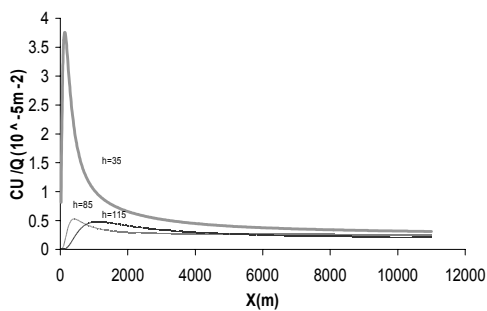
در این قسمت حل معادله (۱) با در نظر گرفتن پروفایل باد و نفوذ چرخانه ای نشان داده شده در جدول (۱) ارائه شده است. برای مشخص کردن پروفایل باد و نفوذ، در ابتدا لازم است که زبری سطحی و سرعت باد در ارتفاع اختلاط تعیین شود. برای تمامی نتایج ارائه شده، ارتفاع لایه اختلاط ۲۵۰m و ارتفاع لایه سطحی ۸۰m و $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ به ترتیب برابر ۲۰، ۲۰ و ۱۰m در نظر گرفته شده اند. با توجه به شرایط پایداری اتمسفر، دامنه نفوذ آلاینده ها در جهت Y حدود ۴۰۰ متر بدست می آید. از آنجا که تعیین زبری سطحی منطقه ای کار دشواری می باشد، در این تحقیق پارامتر زبری سطحی بین ۰,۲ تا ۲ متر متغیر در نظر گرفته شده است. برنامه برای شرایط اتمسفر خنثی تهیه شده و سرعت باد در ارتفاع اختلاط متغیر و بین ۵m/s تا ۱۵m/s در نظر گرفته شده است. ارتفاع موثر دودکش کارخانه ۸۵ متر و خروجی آن $200000 \text{ m}^3/\text{hr}$ با غلظت $200 \text{ mgr}/\text{m}^3$ می باشد. قطر ذرات خروجی برابر 10μ در نظر گرفته شده است.

در ابتدا تغییرات غلظت با ارتفاع در فواصل مختلف از منبع بررسی می شود. نمودار (۳) پروفایل غلظت را در جهت عمودی برای فواصل مختلف از منبع در جهت باد نشان می دهد و نمودار (۴) اثر زبری سطحی را بر پروفایل غلظت در جهت عمودی در فاصله ۰,۵ و ۲,۵km از منبع نشان می دهد.





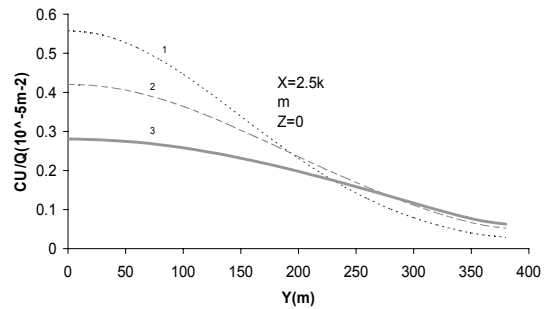
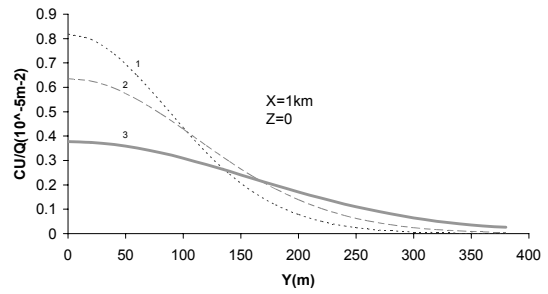
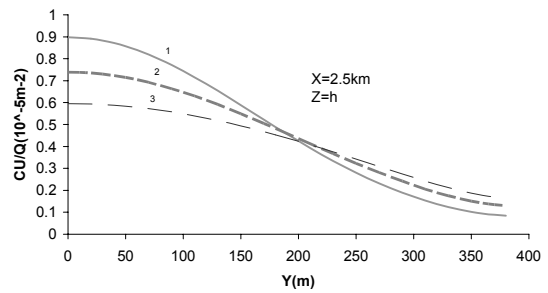
نمودار ۶- توزیع غلظت در امتداد منبع و در لایه نزدیک سطح زمین برای زبری سطحی (۱) ۰,۰۲، (۲) ۰,۰۲، (۳) ۲ متر



نمودار ۷- توزیع غلظت در امتداد منبع و در لایه نزدیک سطح زمین برای مقادیر مختلف ارتفاع موثر منبع

در نمودار (۷) اثر تغییر ارتفاع دودکش بر روی غلظت لایه نزدیک سطح زمین نمایش داده شده است. همانطور که دیده می شود با افزایش ارتفاع دودکش غلظت نقطه ماکزیمم در روی لایه نزدیک سطح زمین کاهش یافته و این نقطه از منبع دورتر می شود.

نمودار (۸) اثر تغییرات سرعت باد در انتهای لایه اختلاط را بر روی غلظت لایه نزدیک سطح زمین نشان می دهد. مشاهده می شود که افزایش سرعت باد در این لایه موجب افزایش غلظت نقطه ماکزیمم و نزدیکتر شدن این نقطه به منبع می شود. از طرف دیگر هرچه سرعت باد در بالای لایه اختلاط بیشتر باشد، غلظت لایه نزدیک سطح زمین نیز بیشتر خواهد بود.

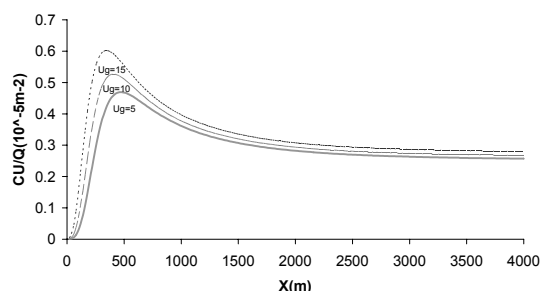


نمودار ۵- توزیع غلظت در راستای افقی (عمود بر باد) در ارتفاع منبع و در سطح زمین برای فواصل ۰,۰۲ (۱)، ۰,۰۲ (۲)، ۰,۰۲ (۳) متر

نمودار (۵) تغییرات غلظت را در جهت محوری (۱) در ارتفاع منبع و (۲) در لایه نزدیک سطح زمین، در فواصل ۰,۰۲، ۰,۰۲، ۰,۰۲ km از منبع نشان می دهد. افزایش زبری سطحی باعث افزایش پخش ذرات در این جهت می گردد نمودار (۶) توزیع غلظت در امتداد منبع در لایه نزدیک سطح زمین را با زبری سطحی مختلف نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود افزایش زبری سطحی موجب کاهش غلظت در سطح زمین می شود. غلظت نقطه ماکزیمم نیز کاهش یافته و این نقطه به منبع نزدیکتر می شود.

مراجع

1. Kenneth W. Ragland and Robin L. Dennis , "Point source atmospheric diffusion model with variable wind and diffusivity profiles" J. of Atmospheric Environment , Vol.9 , p175-189 , 1975
2. Alfred K. Blackadar , "Turbulence and Diffusion in the Atmosphere" Springer-Verlag , Berlin Heidelberg , p27-34, 1997
3. Seinfeld , J. H. , "Air pollution, Physical and Chemical Fundamentals" McGraw Hill Book Company, New York , 1975
4. Perry J. Samson , "Stability and PBL Structure" , Lecture Notes From AOSS563 , University of Michigan , 1997
5. Lettau H. H. "Wind profile, surface stress and Geostrophic drag coefficient" Advances in Geophysics , Vol.6 ,p241-256, Academic Press , New York , 1959
6. Ragland K. W. "Multiple box model for dispersion of air pollutants from area sources" , J of Atmospheric Environment , Vol.7, p1017-1032 , 1973



نمودار ۸- توزیع غلظت در امتداد منبع و در لایه نزدیک سطح زمین برای مقادیر مختلف سرعت باد در انتهای لایه اختلاط

نتیجه گیری

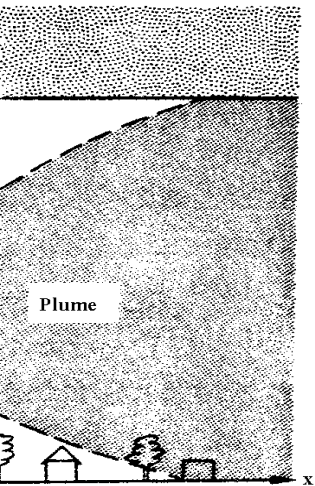
اثر پلوم روی سطح زمین به تغییرات زبری سطحی حساس است. زمانی که زبری سطحی افزایش یابد، مکانی که غلظت در آن بالاتر است به نزدیکی منبع تمایل پیدا می کند و غلظت آن نیز افزایش می یابد. چشم پوشی کردن از پارامتر زبری سطحی زمانی که مدلسازی نفوذ منبع نقطه ای انجام می گیرد باعث خطاهای واضح و آشکاری می شود. ارتفاع مناسب دودکش می تواند تاثیر بسزایی در کاهش آلودگی لایه نزدیک سطح زمین، خصوصاً در نواحی نزدیک منبع داشته باشد.

ضمائم

جدول ۱. روابط بکار برده شده برای محاسبه پروفایل باد و نفوذ چرخانه ای

شکل
(۱) -
شما
ی
فیز
یکی
مسئله
له

پایداری	فاصله عمودی	سرعت باد u	نفوذ چرخانه ای
	در لایه سطحی		
خنثی	$0 < z \leq z_{sl}$	$\frac{u_*}{0.4} \ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right)$	$K_z = 0.4u_*z$ $K_y = 5K_z$
	بالای لایه سطحی		
خنثی	$z_{sl} < z \leq z_m$	$(u_g - u_{sl})\left(\frac{z - z_{sl}}{z_m - z_{sl}}\right) + u_{sl}$	$K_z = 0.4u_*z_{sl}$ $K_y = 5K_z$



شکل ۲. ماتریس نفوذ برای تقسیم بندی ۴×۴ صفحه y-z

a_1+e_1 $+f_2+s$	$-e_1$.	$-f_2$
$-e_1$	a_1+2e_1 $+f_2+s$	$-e_1$.	$-f_2$
.	$-e_1$	a_1+2e_1 $+f_2+s$.	.	$-f_2$.	.	.
$-f_2$.	.	a_2+e_2 $+f_2+f_3$	$-e_2$.	$-f_3$.	.
.	$-f_2$.	$-e_2$	a_2+2e_2 $+f_2+f_3$	$-e_2$.	$-f_3$.
.	.	$-f_2$.	$-e_2$	a_2+e_2 $+f_2+f_3$.	.	$-f_3$
.	.	.	$-f_3$.	.	a_3+e_3 $+f_3$	$-e_3$.
.	.	.	.	$-f_3$.	$-e_3$	a_3+2e_3 $+f_3$	$-e_3$
.	$-f_3$.	$-e_3$	a_3+e_3 $+f_3$