

ارائه یک مدل جدید غیرخطی دوبعدی برای حرکت سیال غیرنیوتنی خون در شریان ها

احمد رمضانی سعادت آبادی، مریم ادیمی، محمد جعفر عبدخدایی

دانشکده مهندسی شیمی و نفت، دانشگاه صنعتی شریف

E-mail: ramezani@sharif.edu

چکیده

مقاله حاضر در برگزیده یک مدل جدید غیرخطی دوبعدی برای حرکت جریان پالسی سیال غیرنیوتنی خون در شریانهاست که در آن رفتار غیرخطی جریان پالسی خون بوسیله جریان یک سیال تراکم ناپذیر غیرنیوتنی در لوله الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است، مدل در نظر گرفته شده در این مقاله شامل ترمهای تجمع غیرخطی معادلات حرکت لحظه ای می باشد و از روش عددی اختلافات محدود (finite difference) برای حل این سیستم غیرخطی استفاده شده است که به ما اجازه می دهد که با کمترین پیچیدگی در محاسبات، پروفیلهای جریان و فشار را بعنوان توابعی از زمان بدست آوریم و سپس با داشتن میزان جریان خون بتوانیم تنش برشی دیواره رگ را محاسبه نمائیم که کنترل این عامل می تواند نقش مهمی در تشخیص و کنترل بیماریهای سیستم گردش خون و عروق ایفا کند. نتایج حاصله از کار صورت گرفته همانگونه که در نمودارها آمده است به خوبی با نتایج تجربی تطابق دارد و بیانگر این نکته است که شرایط در نظر گرفته شده در مدل برای جریان خون و حرکت دیواره شریان به شرایط حاکم در بدن نزدیک می باشد. نتایج حاصل بیانگر آنست که تغییرات پالسی در قطر شریانها نقش مهمی را در تطبیق داده های مدل با داده های تجربی بعهدہ دارد.

واژه های کلیدی: معادلات حرکت، جریان خون، افت فشار

شریانی را پیش بینی و بررسی کرد [1-6]. روابط بین سرعت و دبی جریان آرام خون در لوله های سخت با داشتن افت فشار معین در طول لوله اولین بار بوسیله پوازیه (Poisele) در سال ۱۸۴۲ بدست آمد و در سال ۱۹۵۸ بمدت (Bomdet) یک مدل تک بعدی برای جریان خون منتشر کرد و بوسیله روش خاصی آنرا حل نمود ولی بعلت تک بعدی بودن نتوانست پروفیل سرعت را مشخص کند [1].

برای جریان خون مطالعات اولیه روی معادلات حرکت به صورت خطی و صرفنظر از ترمهای جابجایی در معادلات حرکت و تغییرات الاستیک محدود شریان متمرکز شده اند که این فرضیات باعث شدند که حل های تحلیلی برای

مقدمه

همانطور که می دانیم اغلب بیماریهای سیستم گردش خون وابستگی زیادی به شرایط جریان خود در رگهای خونی دارند، چون با دانستن میزان جریان خون می توان تنش برشی دیواره رگ را نیز محاسبه کرد و از روی آن می توان انواع بیماریهای سیستم گردش خون نظیر آترواسکلروز و گرفتگی شریان ها و غیره را در مراحل اولیه پیش بینی نمود، به همین دلیل خواص جریان خون در شریانها تاکنون مورد توجه زیادی قرار گرفته است تا از این طریق بتوان بسیاری از بیماریهای عروق خونی و اختلافات

مدل کردن جریان خون در رگهای خونی در حالت هم دما نیازمند حل معادلات حرکت و پیوستگی در محیط رگ می باشد که حل معادلات مذکور نیازمند فرضیاتی برای دیواره شریان، نوع جریان و نوع معادله قانونمند حاکم بر رفتار خون می باشد، فرضیات بکار گرفته شده در این مدلسازی به شرح زیر است:

الف) مدل حرکت دیواره شریان

در این مقاله دیواره شریان الاستیک خالص و تغییر شکل پذیر در نظر گرفته شده که از مواد تراکم ناپذیر با یک سطح دوار بدون حرکت محوری تشکیل یافته است و برای بیان ارتباط بین شعاع داخلی شریان و فشار داخل آن از مدل (Mazumdar) استفاده شده است زیرا بر طبق داده ها برای شریان ایلیاک که مدلسازی بر اساس داده های تجربی برای این شریان صورت گرفته است، این مدل رابطه بین شعاع شریان و فشار داخل آن را بخوبی توجیه می کند [2].

ب) معادله قانونمند حاکم بر رفتار خون

در مدل ارائه شده، خون یک سیال نیوتنی تعمیم یافته که از مدل (Herschel-Burkley) پیروی می کند در نظر گرفته شده است، زیرا بر طبق آزمایشات صورت گرفته در شریانها ریت برشی خون کمتر از 500 sec^{-1} بوده و ویسکوزیته خون هنوز به مقدار ثابتی نرسیده است و لذا نمی توان خون را سیال نیوتنی در نظر گرفت، البته انطباق رفتار خون با مدل (Herschel-Burkley) در این محدوده از ریت برشی توسط دوتا (Dutta) و همکارانش در سال ۱۹۹۶ به اثبات رسیده است، نکته قابل توجه دیگری که در مدل مذکور موجود است وجود تنش تسلیمی می باشد که اکثر محققین در وجود چنین تنشی برای خون اتفاق نظر دارند [5].

ج) مدل کردن جریان خون

چون قلب انسان مانند یک تلمبه منقطع عمل می کند، لذا جریان خون بعنوان یک جریان پالسی در نظر گرفته شده است و با توجه به تقارن محوری رگ، جریان خون نیز می تواند دارای تقارن محوری باشد، بعلاوه چون شعاع رگ

محاسبه جریان خون در شریانها بدست آید، اما این راه حلها و فرضیات در تشریح میدان سرعت بخصوص در شریانهای بزرگ مناسب نبودند، زیرا امروزه به اثبات رسیده که ترمهای غیرخطی معادلات حرکت که بعنوان ترمهای جابجایی شناخته می شوند، باعث ایجاد افت فشار قابل توجهی در جهت جریان خون شده و صرفنظر از آنها خطای زیادی در محاسبات بهمراه خواهد داشت [6]. بنابراین در سالهای اخیر آنالیزهای معادلات حرکت غیرخطی برای حرکت خون در شریانها بیان شده که تئوری جریان محلی نامیده می شود و بدین صورت است که از یک روش تقریباً عددی برای بدست آوردن پروفیل جریان از میان اندازه گیری محلی تابع شعاع - فشار در شریان الاستیک استفاده می شود. این تئوری پروفیل سرعت در یک محل ثابت از شریان را به خوبی شرح می دهد ولی نمی تواند یک حل پیوسته در اطراف یک بخش از شریان بیان کند [7]. بعدها این تئوری پایه ای برای کارهای بعدی که در سال ۱۹۹۰ توسط آقای ونگ (wang) و همکارانش صورت گرفته شد [8]. در سالهای اخیر نیز مدلهای زیادی برای حرکت جریان خون در رگهای خونی بزرگ ارائه گردیده است که اختلاف اساسی این مدلها در نوع فرضیات بکار گرفته شده برای نوع سیال خون (نیوتنی یا غیرنیوتنی بودن) و نوع حرکت دیواره شریان و روشهای حل معادلات می باشد. امروزه با کارهای صورت گرفته به اثبات رسیده که علاوه بر تأثیرات غیرنیوتنی خون، اثرات حرکت دیواره شریان نیز روی میزان جریان خون بسیار مهم می باشد چنانکه مورد آخر با افزایش پارامتر بی نظمی (unsteadness) افزایش می یابد لذا در این مقاله سعی خواهد شد که مدلی ارائه گردد که علاوه بر در نظر گرفتن ماهیت غیرنیوتنی خون، اثرات حرکت دیواره شریان نیز بگونه ای در نظر گرفته شود که به واقعیت نزدیک باشد.

ارائه مدل

می توان آنرا حل نمود اگر در معادله دیفرانسیل حاصل حل شده به ازای $\eta = 1$ با استفاده از شرایط مرزی (۱-۳) و (۲-۳) و جایگزینی مقادیر بدست آمده در معادله ۲ البته در حالیکه خون را سیال غیرنیوتنی که از مدل (Herschel-Burkley) پیروی می کند در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{-1}{R} \int_0^1 \eta \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} d\eta \quad (۸)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\eta R^2} \left[\int_0^\eta \eta \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} d\eta - \eta^2 \int_0^1 \eta \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} d\eta \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{D \cdot \eta}{\rho R^{n+1}} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} +$$

$$\frac{D}{R^{n+1} \rho \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (۹)$$

با حل معادلات ۸ و ۹ می توانیم توابع $R(z,t)$ و $p(z,t)$ و $w(\eta, z, t)$ را بدست آوریم. برای کامل شدن حل مساله باید رابطه فشار داخلی شریان و شعاع آنرا داشته باشیم که همانطور که در ابتدا توضیح داده شد، در این مقاله از مدل (Mazumdar) استفاده شده است که به صورت زیر می باشد:

$$p(z, t) = p_m + \frac{A}{R(z, t)} e^B \left[e^{\frac{R(z, t)}{R_m}} - 1 \right] \quad (۱۰)$$

p_m : فشار اولیه در لحظه $t=0$

A و B ثوابتی هستند که از راه آزمایش و نمودار حاصل می شوند. [2]

روش حل معادلات:

برای حل معادله ۹ که یک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی است از فرضیه زیر استفاده می کنیم:

$$w(\eta, z, t) = f(z, t)(\eta^2 - 1) \quad (۱۱)$$

که رابطه ۱۱ اشاره به تقارن محوری نمودار سرعت محوری می کند با قرار دادن این معادله در معادله ۹ به معادله جدیدی می رسیم که فقط به جهات t و z بستگی

موردنظر خیلی کوچکتر از طول موج در موجهای فشاری است. بهمین دلیل از تغییرات فشار در جهت شعاعی صرفنظر شده است.

بیان معادلات جریان و شرایط مرزی

اگر معادله پیوستگی و معادله حرکت در جهت محوری را برای یک سیال نیوتنی بنویسیم و تغییر متغیری بصورت

$$\eta = \frac{r}{R(z, t)}$$

نیز در این معادلات بدهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{\eta R} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\eta}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{R} (\eta w \frac{\partial R}{\partial z} - u + \eta \frac{\partial R}{\partial t}) \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \frac{\partial w}{\partial z} +$$

$$\frac{v}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (۲)$$

که $u = u(\eta, z, t)$ و $w = w(\eta, z, t)$ همان مولفه

های سرعت شعاعی و محوری می باشند.

شرایط مرزی و اولیه

$$u(\eta, z, t) \Big|_{\eta=1} = \frac{\partial R}{\partial t} \quad (۱-۳)$$

$$w(\eta, z, t) \Big|_{\eta=1} = 0 \quad (۲-۳)$$

$$u(\eta, z, t) \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (۱-۴)$$

$$\frac{\partial w(\eta, z, t)}{\partial z} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (۲-۴)$$

$$u(\eta, z, t) \Big|_{z=0} = 0 \quad (۱-۵)$$

$$w(\eta, z, t) \Big|_{z=0} = \phi(r, t) \quad (۲-۵)$$

$$u(\eta, z, t) \Big|_{z=L} = 0 \quad (۱-۶)$$

$$w(\eta, z, t) \Big|_{z=L} = 0 \quad (۲-۶)$$

$$u(\eta, z, t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (۱-۷)$$

$$w(\eta, z, t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (۲-۷)$$

$$p(\eta, t, z) \Big|_{t=0} = p_m \quad (۳-۷)$$

مدل ریاضی دیواره و حرکت خون

اگر معادله ۱ را در ηR ضرب کنیم به یک معادله دیفرانسیل درجه اول برای $u(\eta, z, t)$ تبدیل می شود که

دارد و آنرا از روش عددی اختلافات محدود (finite-difference) حل می کنیم. [1]

بدین ترتیب که اگر حول شریان را به تقسیمات مساوی قسمت کنیم، یعنی داشته باشیم:

$$z_i = i\Delta z, \quad i = 0, \dots, m, \quad m\Delta z = L$$

که L طول شریان مورد نظر و m تعداد تقسیمات طولی و i شمارشگر هر تقسیم است و به همین ترتیب توابع $f_i(t)$ و $P_i(t)$ و $R_i(t)$ خواهیم داشت و اگر تمامی ترمهای معادله ۹ را به صورت ترمهای (finite difference) به صورت بالا در جهات t و z بنویسیم به معادله جدیدی می رسیم که به ازای یک η مشخص و با داشتن مقادیر ρ و D و n و R_m که از مدل حاکم بر رفتار خون بدست می آیند، می توان $f(i, k)$ را برای هر لحظه از زمان و هر قسمت از شریان بدست آورد و با استفاده از آن و روابط قبل می توان میزان جریان خون را محاسبه نمود.

$$Q(z, t) = 2\pi R^2 \int_0^1 \eta w(\eta, z, t) d\eta \quad (12)$$

اگر معادله ۱۱ را در معادله ۱۲ جایگزین کنیم به نتیجه

زیر می رسیم:

$$Q(i, k) = -1/5R^2(i, k)f(i, k)$$

که معادله ۱۳ میزان جریان را در هر لحظه از زمان و هر

قسمت از شریان به ما نشان می دهد.

البته نکته قابل تأمل اینست که در این مقاله در ابتدای شریان فرض می کنیم که یک جریان پالسی متغیر با زمان داریم که یک تابع کسینوسی است و فشار اولیه نیز برابر 70 mmHg می باشد و شعاع رگ با زمان و در امتداد رگ تغییر می کند.

بحث و ارائه نتایج:

۱- در شکل ۱ نتایج بدست آمده برای موجهای جریان محاسبه شده در نقاط ابتدایی، انتهایی و وسط شریان آمده است و نشان می دهد که نوسانات نرخ جریان در انتهای شریان به کمترین مقدار خود می رسد و بیشترین جریان به سمت انتها پیش می رود و علت این امر همان جابجایی

شعاعی دیواره شریان است و بهر حال مقدار کلی جریان در هر قسمت از شریان مورد بحث در طول یک سیکل قلبی ثابت می ماند و این پیوستگی بسیار مهم است [9].

در شکل ۲ موجهای فشار در قسمتهای مختلف شریان نشان داده شده است و با توجه به شکل در می یابیم که تغییرات فشار در امتداد شریان کم است (کمتر از ۵ درصد) که البته این شکل موجها مربوط به فشار دیواره هستند و بهمین دلیل خیلی سریع سفر می کنند.

در شکل ۳ مقایسه ای میان جریان محاسبه شده بوسیله مدل حل شده در مقاله و جریان در شرایط فیزیولوژی برای شریان ایلیاک البته در حالتیکه انتهای شریان را مسدود در نظر بگیریم صورت گرفته است و این مقایسه نتیجه می گیریم که مدل حل شده با واقعیت تطبیق می کند و نسبت به سایر مدلهای ارائه شده به شرایط حاکم بر بدن نزدیکتر است [10].

نتیجه گیری

صرفنظر از ترمهای تجمع (convection) در معادله حرکت در جهت Z (امتداد محور شریان) خطای زیادی را در محاسبه میزان جریان خون بویژه در رگهای خونی بزرگ ایجاد می کند.

از مقایسه نتایج بدست آمده برای نرخ جریان بر اساس مدل حل شده و مقادیر جریان در حالتی که خون را سیال نیوتنی در نظر بگیریم یا دیواره شریان را سخت در نظر بگیریم به این نتیجه می رسیم که اثرات حرکت دیواره شریان روی میزان جریان خون به مراتب بیشتر از اثرات معادله قانونمند خون می باشد و با داشتن میزان جریان خون می توان ریت برشی دیواره شریان را محاسبه نموده و از روی آن و داشتن ویسکوزیته دیواره می توان تنش برشی آن را محاسبه نمود که با کنترل این عامل می توان بسیاری از بیماریهای سیستم گردش خون را در مراحل اولیه پیش بینی کرد.

پیشنهادات

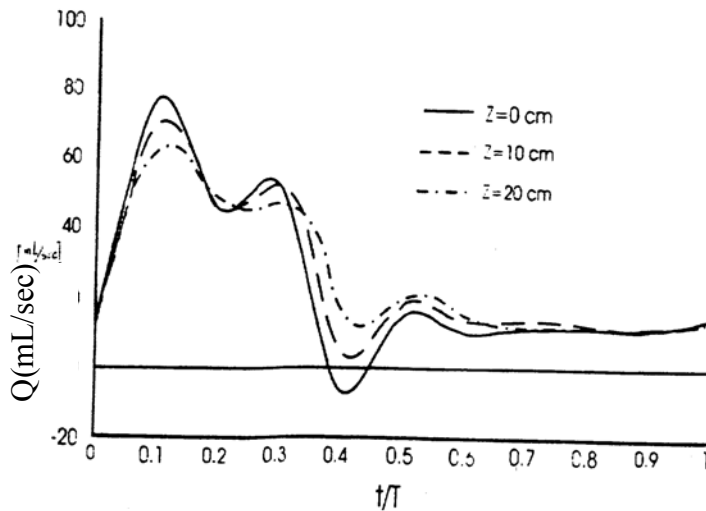
برای بهبود کار و نزدیکتر شدن به واقعیت حاکم بر بدن

می توان $\frac{\partial R}{\partial z}$ را متغیر با زمان در نظر گرفت و مساله را حل نمود زیرا امروزه ثابت شده که در شرایط واقعی اینگونه است، همچنین برای تقریب دقیق تر در حدس رابطه برای سرعت محوری (w_z) می توان از سریها استفاده نمود یعنی داشته باشیم:

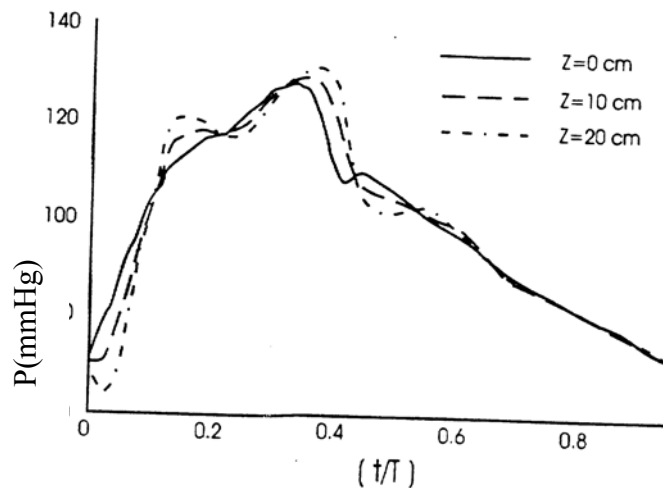
$$w_z = \sum_{k=1}^n f(z,t)\eta^{2k}$$

k شمارنده است، η و $f(z,t)$ هم قبلاً تعریف شده اند.

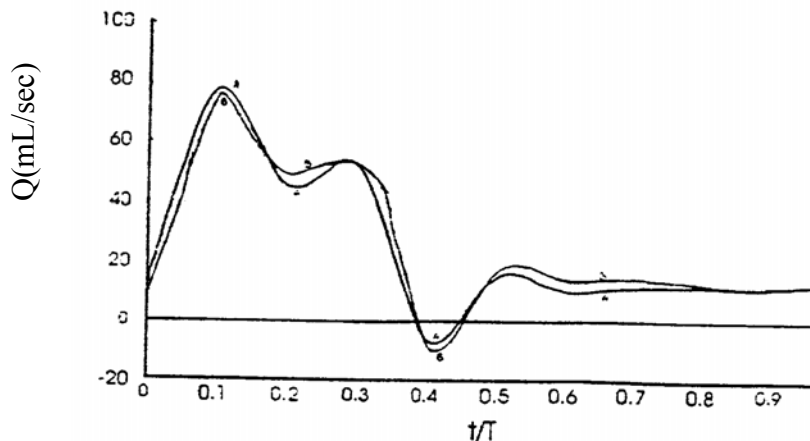
البته نیازی به مقادیر بالا برای n نیست و تا ۷ جمله کفایت می کند. هر چقدر با تقریب های دقیق تر بتوانیم شرایط مساله را به شرایط حاکم بر بدن نزدیک کنیم می توانیم الگوی بهتری از رفتار خون در رگهای خونی ارائه دهیم.



شکل ۱- موجهای جریان در قسمتهای مختلف شریان برای مدل حل شده در مقاله



شکل ۲- موجهای فشار در نقاط مختلف شریان برای مدل حل شده در مقاله



شکل ۳- مقایسه مقادیر آزمایشی و محاسبه شده توسط مدل حل شده در مقاله در شرایط فیزیولوژی در شریان ایلیاک A: مقادیر جریان محاسبه شده به وسیله مدل ارائه شده در مقاله B: مقادیر جریان در شرایط فیزیولوژی برای شریان ایلیاک در حالتی که انتهای شریان مسدود باشد. [11]

مراجع

8. Dutta, A., and Wang, D.M., "Numerical Analysis of flow in an Elastic Artery Model", J. Biomech. Eng, Vol. 114, p26, 1992.
9. Pedly, T. J., "The Rheology and Tube flow of Blood", Handbook of BioEngineering, 1987.
10. Ramsey, M. W., and Sugaware, M., "Arterial wave intensity and ventriculararteries interaction", Heart and Vessels, Vol. 12, pp.128-134, 1997.
۱۱. دکتر فروتن، عباس، مدل کردن جریان و فشار خون در سیستم های قلب و عروق، انتشارات دانشکده علوم پزشکی دانشگاه شهید بهشتی، دیماه ۱۳۷۲.

1. Ma, X. and Lee G.C., "Numerical Simulation for Pulsatile Waves in Arteries", J. Biomechanical Engineering, Vol.144, 1992.
2. Mazumdar, j. N., "Biofluid Mechanics", World Scientific, Inc., 1992.
3. Hennerici M., and Doris Neuerburg, "Vascular Diagn. Sis. with Ultrasound", circulation research, pp. 231,1998.
4. Lightfoot, E. N., "Transport Phenomena and living Systems", John Wiley & Sons, 1973.
5. Dutta, A., and Tarbell, J. M., "Influence of Non Newtonian behaviour of blood on flow in elastic Artery", J. Biomech. Eng, Vol. 118, pp. 111, 1996.
6. Bellardinelli, E., and Cavalcant, "Theoretical Analysis of Pressure Pulse Propagation in Arterial Vesseles", comput. Biomedical, Vol. 21, No. 12, 1991.
7. Ling, S.C., and Atabak, H.B., "A Nonlinear Analysis of Pulsatile flow in Artries" J. Fluid Mech., Vol. 55, pp. 493-511, 1972.